Reikningur og talnakerfi

math104-1calc Inngangur að stærðfræðigreiningu

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

September 20, 2015

Talnakerfin

Náttúrlegar tölur

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Heilar tölur

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Ræðar tölur (rational numbers)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{q}{p} : \quad q, p \in \mathbb{Z}, \quad p \neq 0 \right\}$$

Dæmigerð notkun...
$\mathbb{N}$: Einföld talning. Líka tvær aðgerðir, samlagning og margföldun.
$\mathbb{Z}$: Talning, samlagning, margföldun og frádráttur.
$\mathbb{Q}$: Samlagning, margföldun, frádráttur og deiling.
Athugið að $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ eru teljanleg (countable) mengi.
Það er ætlast til þess að nemendur kunni almennar reiknireglur, s.s. að reikna upp úr

$$7 - 7/7 + 7 \times 7$$

og fá út 55, eða

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

Rauntölur

Rauntölur (real numbers) Til eru tölur sem ekki eru hægt að skrifa sem brot, t.d. lausnir á $x^2 = 2$, $x^2 = 3$.

Safn rauntalna, $\mathbb{R}$, er óteljanlegt, þessar tölur eru **ekki** teljanlega margar.
Dæmigerð notkun: Viljum oft reikna einfalda hluti eins og stystu leið milli horna í rétthyrningi. Slíkar fjarlægðir er oftast ekki hægt að rita sem brot.

Reiknireglur

Gert er ráð fyrir að nemendur kunni helstu reiknireglur.

Hér er átt við forgangsröð aðgerða, margföldun innan sviga, samlagningu brota o.s.frv.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} : \frac{7}{11} = \ldots$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} = \ldots$$

Spurningar innan þessa "fyrirlesturs" gefa þjálfun og prófanir í þessum reglum. Skráið ykkur inn í tutor-web kerfið, finnið þessa glæru og veljið spurningar.

Svara skal 8 spurningum rétt í hverjum fyrirlestri, en svara má eins mörgum og hver vill. Einkunn er reiknuð í kerfinu fyrir síðustu 8 svör í hverjum fyrirlestri.

Stæður

Dæmi um stæður

$$x + 3$$

$$w + x$$

$$x^2 + x$$

Viljum oft einfalda eða umrita stæður, t.d. byrja með $ay + yb$ og umrita: $ay + yb = y(a + b)$.

Stæður lýsa gjarnan fullyrðingum á formlegan hátt. "Tvöföldun hitastigs umfram 15 gráður" verður $2(T - 15)$.

Stæða er ekki jafna nema í henni komi fyrir jafnaðarmerki.

Að reikna með stæðum

Getum lagt saman stæður, t.d. $(a+b)+a=2a+b$
Getum margfaldað saman stæður t.d. $(a+b)x=ax+bx$
Höfum t.d.

$$(2x+3)(4x+6)=8x^2+24x+18$$

Við notum stæður oft til að lýsa fyrirbærum, "tveimur árum eldri en Sigrún" verður $S+2$ o.s.frv.

Eftirfarandi er gjarnan kennt sem "staðreynd" eða "regla" en hverjum nemanda er hollt að sýna fram á, hvers vegna þetta er rétt:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

og

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Jöfnur

Jafna inniheldur alltaf jafnaðarmerki:

$$x = 2$$

$$3 - 2x = (a - b)^2$$

Getum gert aðgerðir á jöfnum: lagt það sama við báðar hliðar, margfaldað báðar hliðar með sömu stærð o.s.frv.

Við notum stæður og jöfnur oft til að lýsa fyrirbærum, "tveimur árum eldri en Sigrún" verður $S + 2$ og "Jón er tveimur árum eldri en Sigrún" verður $J = S + 2$ o.s.frv.

Ef $x = y$ eru sama talan og a er tala, þá vitum við að $ax = ay$, $a + x = a + y$. Þá vitum við líka að við megum leggja sömu tölu við báðar hliðar jafnaðarmerkis eða margfalda báðar hliðar með sömu tölu.

Ekki segja færa yfir jafnaðarmerki.

Við getum síðan notað aðgerðirnar fyrir stæður til að umrita jöfnur.

Dæmi: Jafnan $y = 1 + 2x$ lýsir y fyrir gefið x. Við getum umritað hana og fengið jöfnu sem reiknar x fyrir gefið y - þ.e. við getum "einangrað x".

Dæmi: Á sama hátt má umrita og t.d. einangra x í flóknari jöfnum s.s.

$$y + x = \frac{x^2}{x + 1} + 2.$$

Tölugildi og ójöfnur

Tölugildi: $|a| = a$ ef $a \geq 0$ en $|a| = -a$ ef $a < 0$.
Munum að við getum möndlað með ójöfnur, t.d.

$$a < b \Rightarrow -b < -a.$$

Höfum síðan ef $b > 0$ að $|a| < b \Rightarrow -b < a < b$.

$a < b$ og $b > a$ þýðir að a sé minni tala en b. Mjókkunin bendir á minni töluna.
Munum að við getum möndlað með ójöfnur, t.d. $a < b \Rightarrow -b < -a$. Athugum líka að ef a og b eru tölur með $a < b$ og $c < 0$, þá er $ca > cb$.
Höfum síðan ef $b \geq 0$ að $|a| < b \Rightarrow -b < a < b$.
Við notum oft táknið $\Rightarrow$ ("þar af leiðir") og munum að það má alls ekki rugla því saman við $\Leftrightarrow$.

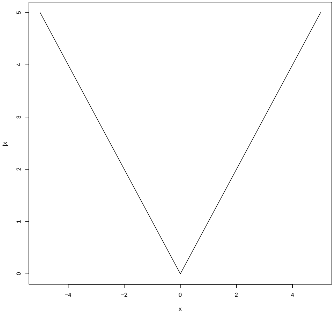

Figure : The absolute-value function

Mengi

Bil, mengi talna og mengjaaðgerðir

Gerum ráð fyrir að $a < c < b$:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[a, b[\cup \{b\} = [a, b]$

$[a, b] \setminus \{b\} = [a, b[$

$[a, b] \setminus \{c\} = [a, c[\cup]c, b]$

$[a, c] \cap [c, b] = \{c\}$