Þríhyrningar, línur í plani, vigrar og hringferlar

math104-1calc Inngangur að stærðfræðigreiningu

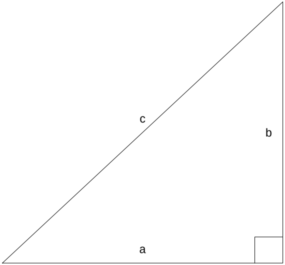
Kjartan G. Magnusson, followed by many others

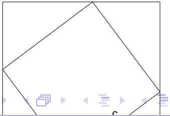
September 20, 2015

Rétthyrndir þríhyrningar og Pýþagoras

Setning Pythagorasar um rétthyrndan þríhyrning með skammhliðar af lengd a, b og langhlið af lengd c:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



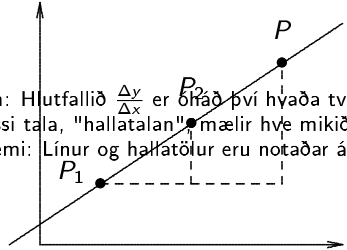


testing

just testing

Hallatala línu

Lína ákvarðast af tveimur punktum



Hallatala:

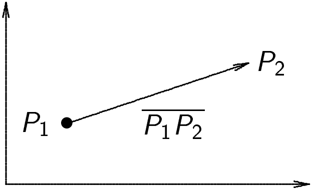
$$h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ath: Hlutfallið $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ er óháð því hvaða tvo punkta við veljum á línunni.
Þessi tala, "hallatalan", mælir hve mikið y breytist þegar x hækkar um einn (eina einingu).
Dæmi: Línur og hallatölur eru notaðar á öllum sviðum vísinda og á hverjum degi í dagblöðum.

Vigrar í plani

Vigur er "strik með stefnu".
Vigurinn $\mathbf{v}$ milli punktanna $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$ er

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$



Látum $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$ vera tvo punkta í plani og drögum strik frá P_1 til P_2 og gefum því stefnu frá P_1 til P_2. Þetta stefnubundna strik nefnist *vigurinn frá P_1 til P_2* og er táknað með $\overline{P_1P_2}$ og á mynd teiknum við hann sem ör frá P_1 til P_2.

Munum að vigra má leggja saman, margfalda með tölu og innfeldi vigra er skilgreint, svo ef $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ eru vigrar og $k \in \mathbb{R}$ er rauntala, þá skilgreinum við samlagningu vigra, margföldun með tölu og innfeldi vigra með $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$, $k\mathbf{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Jafna línu

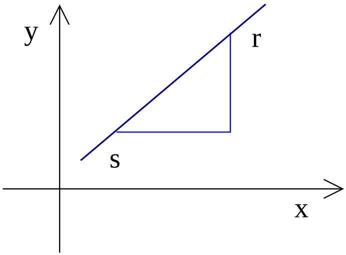
Finnum nú jöfnu línu sem fer í gegnum punkt (x_1, y_1) og hefur hallatölu m.

Tökum einhvern punkt (x, y) á línunni $(x \neq x_1)$. Hallatalan er

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \Leftrightarrow \quad m(x - x_1) = y - y_1$$

$\Leftrightarrow$

$$y = m(x - x_1) + y_1$$



Þetta er jafna línu sem fer í gegnum (x_1, y_1) og hefur hallatölu m.

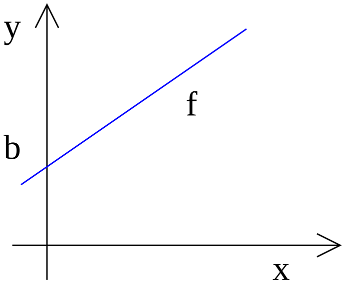
Jafna línu sem halli og skurðpunktur

Jöfnuna

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

má skrifa

$$\begin{aligned} y &= mx + \overbrace{y_1 - mx_1}^{b} \\ y &= mx + b \end{aligned}$$



Jafna línu með normalvigri

Ef $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, þá lýsir

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

línu í gegnum punktinn (x_0, y_0) með **normalvigur n**, þ.e. þessi vigur er hornréttur á línuna.
Drögum saman og einföldum:

$$ax + by + c = 0$$

Samsíða línur

Samsíða línur hafa sömu hallatölu, en mismunandi skurðpunkt við y-ás.

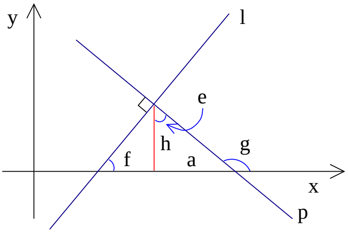
$$L_1 : \quad y = mx + b_1 \quad ; \quad L_2 : \quad y = mx + b_2$$

GeoGebra getur teiknað línurnar..

Hornréttar línur

Jafna línu sem er hornrétt á línuna $L_1 : y = m_1 x + b_1$, gegnum punkt (x_1, y_1) er:

$$y = -\frac{1}{m_1}x + b_2 \qquad \left(m_2 = -\frac{1}{m_1}\right)$$



Fjarlægðir og lengdir í plani

Fjarlægð milli tveggja punkta:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Lengd vigurs reiknast á sama hátt.
Afleiðing af Pýþagoras...

Hringferlar

Jafna hrings:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

GeoGebra er kjörið tól til að kanna hringi, línur o.s.frv.
Athugið að þessi jafna er einfaldlega útreikningur á fjarlægð.

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\right\}$$