Tvinntölur

math104-1calc Inngangur að stærðfræðigreiningu

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

September 20, 2015

Útvíkkun talnakerfisins: Tvinntölur

Tvinntala z er tvennd (x, y); $\quad x, y \in \mathbb{R}$.

$$z = (x, y)$$

- $x = \mathrm{Re}(z)$ (raunhluti z)
- $y = \mathrm{Im}(z)$ (þverhluti z)

Við skilgreinum $i = (0, 1)$ og skrifum $z = x + iy$.

Við þurfum rauntölur til að geta leyst jöfnuna $x^2 = 2$ því $\sqrt{2}$ er ekki brot. Við þurfum aðra útvíkkun til að geta leyst jöfnuna $x^2 = -1$ því engin rauntala uppfyllir hana. Sú útvíkkun er **tvinntalnaplanið**.

Notkun: Rafmagnsverkfræði, tölfræði (kenniföll), almennt tól til að finna rætur í margliðum, …

Hlekkir í útskýringar: `https://www.youtube.com/watch?v=oxF5VQSA4Hw`

Samok tvinntölu

Samok (conjugate) tvinntölu z er táknað $\overline{z}$

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = x - iy$$

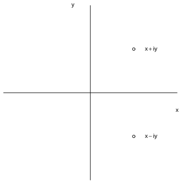


Figure : Samok tvinntölu.

Speglun um raunásinn (x-ás).

Tvinntölur, reikniaðgerðir

Samlagning: $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
Frádráttur: $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
Margföldun: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
Deiling: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2^2+y_2^2)}$
Athugið hvernig deiling er hugsuð og framkvæmd: Deiling tveggja talna a og b á að vera þannig að útkoma deilingar, $c = a/b$ sé sú tala sem uppfyllir skilyrðið $cb = a$. En ef við skrifum bara hlutfall tveggja tvinntalna, þá er alls ekki augljóst hvernig á að reikna hlutfallið. Hins vegar hefur samokið $\bar{z} = x - iy$ þann þægilega eiginleika að $z\bar{z} = x^2 + y^2$ er rauntala.

Tvinntölulausnir

Alltaf er til tvinntölulausn á jöfnunni

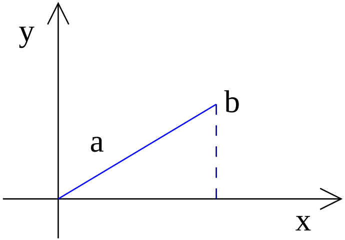
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ eða } x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Lengd tvinntölu

Lengd (modulus, absolute value) z er táknað $|z|$

$$z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

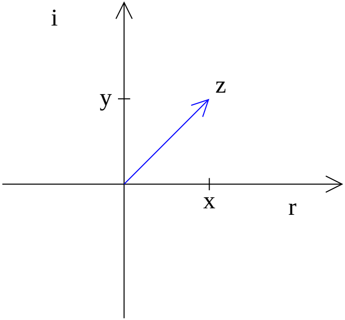


Nokkrir aðrir eiginleikar:

1. $z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\text{Re}(z)$
2. $z - \overline{z} = x + iy - (x - iyf) = 2i\text{Im}(z)$
3. $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i0 = |z|^2$

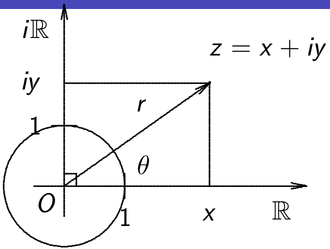
Tvinntalnaplanið

Samlagning tvinntalna er hér eins og samlagning vektora



Pólhnit tvinntölu

Við getum staðsett tvinntölu $z = x + iy$ í tvinntöluplaninu með hnitunum (x, y) eða með pólhnitum $[r, \theta]$


$i\mathbb{R}$
$z = x + iy$
iy
r
1
θ
O
1
x
$\mathbb{R}$

Regla de Moivre

$$[\cos\theta + i\sin\theta]^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Meira um tvinntölur

Skilgreinum cis$\theta = \cos\theta + i\sin\theta$.

Þá gildir cisθcisψ = cis$(\theta + \psi)$, þ.e. „cis-fallið“ hefur veldisvísiseiginleikann $f(\theta + \psi) = f(\theta)f(\psi)$.

Því skilgreinum við (sjá nánar síðar)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

og ritum oft

$$z = re^{i\theta}$$

Tvinntölujöfnur

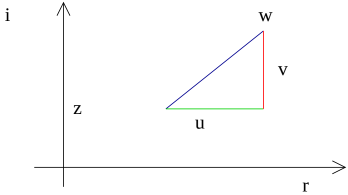
Til að leysa jöfnur í tvinntölum er oft gott að notfæra sér að

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im} z_2$$

Fjarlægðir í tvinntalnaplaninu

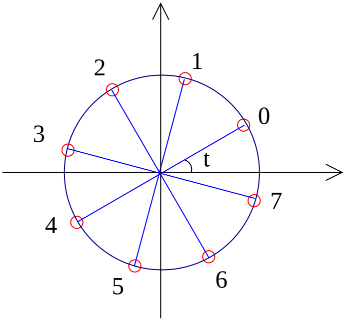
$|z - w|$ þar sem $z, w \in \mathbb{C}$ er fjarlægð z frá w

$$\begin{aligned} |z - w| &= |x + iy - (u + iv)| \\ &= |x - u + i(y - v)| \\ &= \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \end{aligned}$$



Rætur

Lausnir á $z^n = w$, fyrir gefið w: Skrifum $R = |w|$ og w á forminu $w = Re^{i\phi}$.
Ef $z = re^{\theta}$ á að vera lausn þá vitum við að að það þarf að gilda $r^n = R$ og $n\theta = \phi + k \cdot 2\pi$.



Dæmi: Ef við viljum draga fjórðu rót af $w = -1$, þ.e. finna lausn á jöfnunni $z^4 = -1$, þá byrjum við á að skrifa hægri hliðina á forminu $w = Re^{i\phi}$, en hér er $R = |w| = |-1| = 1$ og $-1 = e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ svo $\cos\phi = -1$ og $\sin\phi = 0$, þ.e. hornið ϕ er af gerðinni $\phi = \pi + k \cdot 2\pi$. Á sama hátt skrifum við $z = re^{i\theta}$ og ef á að gilda $z^4 = -1$ þá fæst $r^4 e^{4i\theta} = Re^{i\phi}$, þ.e. $r^4 = 1$ og $4\theta = \pi + k \cdot 2\pi$ eða $r = 1$ og $\theta = \pi/4 + k \cdot \pi/2$. Lausnirnar liggja þá á einingarhringnum og fást með $k = 0, 1, 2, 3$: $z_0 = e^{\pi/4} = \cos\pi/4 + i\sin\pi/4 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$, $z_1 = e^{3\pi/4} = \cos 3\pi/4 + i\sin 3\pi/4 = -1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$, $z_2 = e^{5\pi/4} = \cos 5\pi/4 + i\sin 5\pi/4 = -1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}$, $z_3 = e^{7\pi/4} = \cos 7\pi/4 + i\sin 7\pi/4 = -1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}$.

Margliður og rætur

Margliður geta haft rauntölu- eða tvinntölustuðla
n-ta stigs margliða p hefur nákvæmlega n rætur og má skrifa $p(z) = a_n(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$.
Ef p er margliða með rauntölustuðla:

- Ef z er rót, þá er $\bar{z}$ líka rót því $p(z) = 0 \Rightarrow 0 = \overline{p(z)} = p(\bar{z})$.
- $(z - z_0)(z - \bar{z_0})$ er annars stigs margliða með rauntölustuðla.
- $p(x)$ má því leysa upp í margfeldi liða af gerðinni $(x - \alpha)$ og $q(x) = ax^2 + bx + c$ þar sem α eru rauntölurætur og q er rauntölumargliða, með tvær tvinntölurætur.