math104-3calc Diffrun og afleiður

Kjartan G. Magnusson o.m.fl.

8. febrúar 2016

Efnisyfirlit

1 Diffrun og afleiður

1.1 Meðalhraði

Höfum stærð y sem er fall af x, $y = f(x)$. Látum nú x breytast frá x_1 í x_2;

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

þá breytist y um

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$$

Meðalhraði breytingar í y á bilinu $[x_1, x_2]$ er:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

1.1.1 Details

Aðalástæðan fyrir því að vilja reikna halla falls er sú, að hallinn er núll þar sem fallið er "flatt"í einhverri merkingu. Við viljum finna aðferðir til að finna bestu lausnir s.s. hámarka hagnað, finna línur sem passa best í gegnum gögn o.s.frv. Allt þetta er gert með því að finna staði þar sem fall er "flatt", þ.e. þar sem halli þess er núll. Til þess þurfum við að skilgreina nákvæmlega hvað átt er við og hvernig er hægt að leysa slík verkefni.
Afleiður má líka nálgast út frá **breytingahraða** (rate of change) og **snertilínum** (tangent lines).

Byrjum með stærð y sem er fall af x, $y = f(x)$ og látum x breytast frá x_1 í x_2;

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

þá breytist y um

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$$

Meðalhraði breytingar í y á bilinu $[x_1, x_2]$ er halli línustriksins frá (x_1, y_2) til $(x_2, y - 2)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

1.1.2 Examples

Dæmi 1.1. $y(t)$ fjarlægð frá viðmiðunarpunkti á tíma t:

$$v_m = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

er meðalhraði í $[t_1, t_2]$.

Dæmi 1.2. $T(x)$ er hitastig á dýpi x (sjávar)

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T(x_2) - T(x_1)}{x_2 - x_1}$$

er meðalhraði breytingar á hitastigi með dýpi á dýptarbilinu $[x_1, x_2]$.

Dæmi 1.3. $C(t)$ er styrkur efnis í lausn á tíma t. Efnið myndast við ákveðið efnahvarf:

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{C(t_2) - C(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{C_2 - C_1}{t_2 - t_1}$$

er (meðal) hraði efnahvarfsins á $[t_1, t_2]$

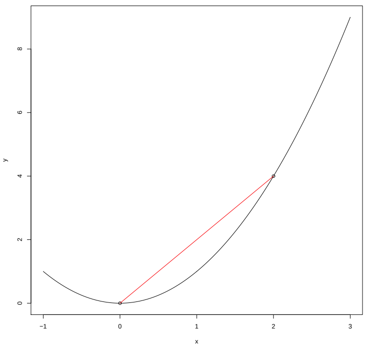
1.2 Hallatala strengs

Gefið er fall $f(x)$, skilgreint á bili I, sem inniheldur punkta x_1 og x_2.
Athugum nú strenginn (secant) milli punktanna $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$

Hallatala strengsins er

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(þetta köllum við mismunakvóta). Hvað gerist þegar $x_2 \to x_1$?



1.2.1 Details

Gefið er fall $f(x)$, skilgreint á bili I, sem inniheldur punkta x_1 og x_2. Athugum nú strenginn (secant) milli punktanna $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$.

Hallatala strengsins er

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(þetta köllum við mismunakvóta).

Hvað gerist þegar $x_2 \to x_1$?   Fáum $\frac{0}{0}$!

1.2.2 Examples

Dæmi: Augljóst er hvað átt er við þegar talað er um hallatölu línu, $y = f(x) = ax + b$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1]} = a$$

Þetta er alltaf sama talan, **óháð** x_1 og x_2.
Þegar graf $f(x)$ er ekki lína verður málið flóknara.

1.3 Afleiða

Skilgreining

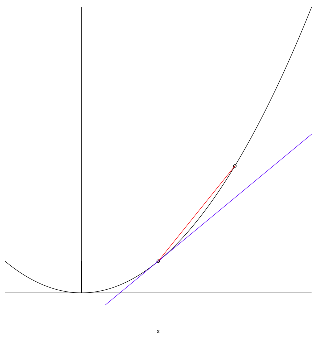
Afleiða (derivative) falls f í punkti x_0, táknað $f'(x_0)$, er

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eða

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ef markgildið er til.



1.3.1 Details

Við ætlum nú að skoða hvað gerist þegar $\Delta x \to 0$, þ.e.

1. Skilgreinum „andartakshraða“ (instantaneous speed) þ.e. hraða í **punkti** t (eða x) í stað hraða yfir bil Δt (eða Δx)

2. Skilgreina snertilínu, þ.e. línuna sem línurnar sem innihalda strenginn gegnum $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$ nálgast þegar $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$. Jafnframt ætlum við að skilgreina hallatölu í punkti $(x, f(x))$.

   Þurfum því að skoða „$\frac{0}{0}$ markgildi“, þ.e.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Skilgreining: **Afleiða** (derivative) falls f í punkti x_0, táknað $f'(x_0)$, er

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ef markgildið er til.

Má líka skrifa sem $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ eða $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

1.4 Setning - Diffrun veldisfalls (heiltölu veldisvísir)

Gerum ráð fyrir að $n \in \mathbb{N}$ (heilar tölur) og $f(x) = x^n$.

Þá er $f'(x) = nx^{n-1}$

1.4.1 Details

Byrjum á sértilviki: $f(x) = x^2$. Hér gildir $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$ og þá fáum við líka

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x.$$

<u>Setning:</u> Gerum ráð fyrir að $n \in \mathbb{N}$ (heilar tölur) og $f(x) = x^n$. Þá er $f'(x) = nx^{n-1}$

<u>Sönnun:</u> Þar sem $n \in \mathbb{N}$ þá er

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + h^n$$

skv. tvíliðusetningunni, (binomial theorem). Því er

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot h + \cdots + h^2 \to nx^{n-1}$$

þegar $h \to 0$.

1.4.2 Examples

<u>Dæmi:</u> Ef $n = 0$, þ.e. $f(x) = 1$, þá er

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1-1}{h} = 0$$

svo $f'(x) = 0$.

Ef $n = 1$, þ.e. $f(x) = x$, þá er

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$$

svo $f'(x) = 1$.

1.5 Setning - Diffrun veldisfalls (ræður veldisvísir)

Gerum ráð fyrir að $n \in \mathbb{Q}$ (ræðar tölur) og $f(x) = x^n$.

Þá er $f'(x) = nx^{n-1}$

1.5.1 Details

<u>Setning:</u> Gerum ráð fyrir að $n \in \mathbb{Q}$ (ræðar tölur) og $f(x) = x^n$. Þá er $f'(x) = nx^{n-1}$

<u>Sönnun:</u> Athugum tilfellið $n > 0$, $n \in \mathbb{Q}$. Látum $n = \frac{p}{q}$ og $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$.

Setjum

$$
\begin{aligned}
y = x^{\frac{1}{q}} \qquad & (\Leftrightarrow \quad x = y^q) \\
y + \Delta y = (x+\Delta x)^{\frac{1}{q}} \qquad & (\Leftrightarrow x + \Delta x = (y+\Delta y)^q)
\end{aligned}
$$

(Athugið að ef $q = 2m$ (slétt tala), þá verða x og $x+\Delta x$ að vera ≥ 0).

$$
\begin{aligned}
\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} &= \frac{x+\Delta x)^{\frac{p}{q}} - x^{\frac{p}{q}}}{\Delta x} \\
&= \frac{\left((x+\Delta x)^{\frac{1}{q}}\right)^p - \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p}{\Delta x} \\
&= \frac{(y+\Delta y)^p - y^p}{\Delta x} \\
&= \frac{(y+\Delta y)^p - y^p}{(y+\Delta y)^q - y^q} \\
&= \frac{\frac{(y+\Delta y)^p - y^p}{\Delta y}}{\frac{(y+\Delta y)^q - y^q}{\Delta y}} \qquad (p, q > 0) \\
\longrightarrow \quad \frac{p y^{p-1}}{q y^{q-1}} &= \frac{p}{q} y^{p-q} \\
&= \frac{p}{q} y^{q(\frac{p}{q}-1)} \\
&= \frac{p}{q} (y^q)^{\frac{p}{q}-1} \\
&= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} \\
&= n x^{n-1}
\end{aligned}
$$

1.6 Leibniz form afleiðu

Í sumum tilfellum er þægilegra að nota hið svokallaða Leibniz form til að tákna afleiður, þ.e. $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$
Ef $y = f(x)$ skrifum við jöfnum höndum $\frac{dy}{dx}$ og $f'(x)$.

1.6.1 Details

Í sumum tilfellum er þægilegra að nota hið svokallaða Leibniz form til að tákna afleiður, þ.e.

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Þetta er hugsað þannig að $x = x_0 + \Delta x$, $\quad \Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ og

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}; \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} \to \frac{df}{dx} \quad \text{þegar} \quad \Delta x \to 0$$

(athugið $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ er **meðal**hraði f-breytingar í $[x_0, x_0+\Delta x]$)

1.7 Afleiðufall og diffurvirki

- Afleiðan sjálf er fall
$$f' : x \to f'(x)$$
Formengi f' eru öll x þar sem $f'(x)$ er til.

  Dæmi: $f(x) = x^4, \qquad f'(x) = 4x^3 \qquad$ (ath. **fall** af x).

- Diffrunin sjálf er aðgerð, **virki**, sem nefnist diffurvirki (differential operator)

  $\frac{d}{dx}$ virkar á föll f og breytir þeim í afleiðufallið
$$\frac{d}{dx} : \quad f \to f' \qquad \left(= \frac{df}{dx}\right)$$

1.7.1 Details

- Afleiðufall
$$f' : x \to f'(x)$$
Formengi f' eru öll x þar sem $f'(x)$ er til.

  Dæmi: $f(x) = x^4, \qquad f'(x) = 4x^3 \qquad$ (ath. **fall** af x).

- Diffurvirki (differential operator)

  $\frac{d}{dx}$ virkar á föll f og breytir þeim í afleiðufallið
$$\frac{d}{dx} : \quad f \to f' \qquad \left(= \frac{df}{dx}\right)$$

1.8 Nokkrar diffurreglur

$(f+g)' = f' + g'$	$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$	
$(cf)' = cf'$	$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{df}{dx}(x)$	c fasti
$(f \cdot g)' = f'g + fg'$	$\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = \frac{df}{dx}(x)g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$	
$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{1}{g^2} \cdot g'$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{1}{g(x)^2} \cdot \frac{dg}{dx}(x)$	
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$		

1.8.1 Details

1. $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

$$\Big[\quad \frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$
$$= f'(x)+g'(x) \qquad \left(= \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x)\right) \quad \Big]$$

2. $\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{df}{dx}(x) \qquad c$ fasti

$$\Big[\quad \lim_{h\to 0}\left(\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\right) \qquad = \lim_{h\to 0} c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\frac{df}{dx}(x) \quad \Big]$$

3. $\frac{d}{dx}(f\cdot g)(x) = \frac{df}{dx}(x)g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$

$$\Big[\quad \frac{(f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \frac{1}{h}\left(f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left((g(x+h)-g(x))\cdot f(x+h) + (f(x+h)-f(x))\cdot g(x)\right)$$
$$= \left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\cdot f(x+h) + \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\cdot g(x)$$
$$\longrightarrow \quad g'(x)f(x) + f'(x)g(x) \quad \text{þegar} \quad h\to 0 \quad \Big]$$

þ.e.
$$(fg)' = f'g + g'f$$

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{1}{g(x)^2}\cdot\frac{dg}{dx}(x)$

$$\Big[\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) \qquad = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)g(x+h)}\right)$$
$$= \frac{\lim_{h\to 0} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0} g(x)g(x+h)}$$
$$= \frac{-\frac{dg}{dx}(x)}{g(x)^2} = \frac{-1}{g(x)^2}\frac{dg}{dx}(x) \quad \Big]$$

5. $\frac{d}{dx}\frac{f}{g} = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$

$$\Big[\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) \qquad = \frac{d}{dx}\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)$$
$$= \frac{df}{dx}\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g}\right) \qquad \text{(skv. 3)}$$
$$= \frac{df}{dx}\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{-1}{g^2}\frac{dg}{dx}\right)$$
$$= \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2} \quad \Big]$$

1.9 Diffranleg föll eru samfelld

Ef $f'(x_0)$ er til, þá er f samfellt í punktinum x_0.

1.9.1 Details

Ef $f'(x_0)$ er til, þá er f samfellt í punktinum x_0.

$$\begin{aligned} & f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\left(\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \\ \Rightarrow \qquad & \lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)\cdot \lim_{x\to x_0}\left(\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \\ & = 0 \cdot f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

þ.e.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ath: Samfellt fall þarf ekki að vera diffranlegt, sbr. $f(x) = |x|, \qquad x_0 = 0$

2 Ýmsar afleiður, snertlar, keðjuregla og hornaföll

2.1 Hærri afleiður

$$\boxed{f^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}\right)}$$

2.1.1 Details

Þar sem $\frac{df}{dx}(x)$ $(= f'(x))$ er fall af x (afleiðufallið) þá má skilgreina afleiðu af $f'(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \qquad (= f''(x))$$

$x \mapsto \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$ er fall og taka má afleiðu þess o.s.frv.

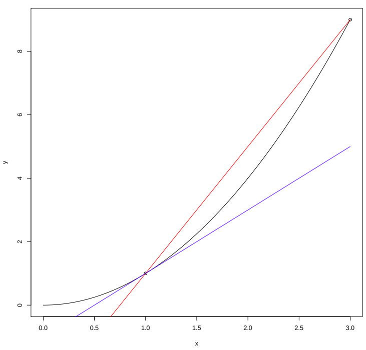
$$\frac{d^n f}{dx^n} = \underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{diffurvirki}} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)$$

eða

$$f^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}\right)$$

2.2 Snertilína (tangent line)

Lína gegnum $(x_0, f(x_0))$ með hallatölu $f'(x_0)$ er **snertilína** grafsins $y = f(x)$ í punktinum $(x_0, f(x_0))$



2.2.1 Details

Hallatala línu gegnum $(x_0, f(x_0))$ og $(x_0+h, f(x_0+h))$ er

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Látum nú $x = x_0 + h$ nálgast x_0, (þ.e. $h \to 0$). Þá stefnir hallatalan

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

á $f'(x_0)$.

Lína gegnum $(x_0, f(x_0))$ með hallatölu $f'(x_0)$ er **snertilína** grafsins $y = f(x)$ í punktinum $(x_0, f(x_0))$

Ath: Snertilína er besta línulega nálgunin á $f(x)$ í $(x_0, f(x_o))$

$$\frac{1}{|x-x_0|}\left|f(x)-\big(f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\big)\right|$$

(Ath:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

er jafna snertilínunnar í $(x_0, f(x_0))$.)

$$= \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right|$$

$\to 0$ þegar $x \to x_0$ $\qquad (x \to x_o^+)$

Hins vegar

$$\frac{1}{|x-x_0|}\left|f(x)-(f(x_0)+a(x-x_0))\right| = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right|$$

en það stefnir ekki á 0 þegar $x \to x_0$ ef $a \neq f'(x_0)$.

Línan $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ er því nær grafinu $y = f(x)$ í punktinum $(x_0, f(x_0))$ en lína $y = f(x_0) + a(x-x_0)$ ef $a \neq f'(x_0)$.

2.3 Andartakshraði (instantaneous rate of change)

Andartakshraði í x er $f'(x)$

þ.a. breytingahraði f m.t.t. x í x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2.3.1 Details

Höfum $y = f(x)$ þ.e. y er fall af x.
Höfum skilgreint meðalhraða breytinga í y á $[x_1, x_2]$ m.t.t. x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

T.d.

- Hitastig sem fall af dýpi.
- Efnastyrkur sem fall af tíma.
- Vegalengd sem fall af tíma.
- Rúmmál kúlu sem fall af radíus ($V = \frac{4\pi}{3} r^3$)

o.s.frv.

Andartakshraði í x er $f'(x)$ ($= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$),

þ.a. breytingahraði f m.t.t. x í x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2.4 Dæmi

Breytingahraði rúmmáls kúlu m.t.t geisla:

$$\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{d}{dr}\left(\frac{4\pi}{3} r^3\right)\right|_{r=r_0} = \left.\frac{4\pi \cdot 3r^2}{3}\right|_{r=r_0} = 4\pi r_0^2$$

(ath. að þetta er flatarmál yfirborðs kúlu með geisla r_0)

2.4.1 Examples

Dæmi: Breytingahraði rúmmáls kúlu m.t.t geisla:

$$\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{d}{dr}\left(\frac{4\pi}{3} r^3\right)\right|_{r=r_0} = \left.\frac{4\pi \cdot 3r^2}{3}\right|_{r=r_0} = 4\pi r_0^2$$

(ath. að þetta er flatarmál yfirborðs kúlu með geisla r_0) Ath:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Dæmi: Jaðarkostnaður og jaðartekjur (marginal- = jaðar-)

- $c(x)$ = framleiðslukostnaður (við að framleiða x einingar).
- $r(x)$ = tekjur af sölu x eininga.

$$\frac{dc}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c(x+h)-c(x)}{h}$$

kallast jaðarkostnaður (þegar framleiddar eru x einingar).

$$\frac{dr}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{r(x+h)-r(x)}{h}$$

kallast jaðartekjur (framleiddar x einingar).

$$\frac{d}{dx}(r(x)-c(x)) = \frac{dr}{dx}(x) - \frac{dc}{dx}(x)$$

kallast jaðarhagnaður.

Jaðarskattur: x = tekjur; $S(x)$ = skattur sem fall af tekjum:

$$\frac{dS}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h}$$

er jaðarskattur við tekjur x. Ath:

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \approx S'(x)$$

ef h er lítið $\quad (|h| << 1)$. Því er

$$S(x+h)-S(x) \approx S'(x)\cdot h$$

þ.e. ef tekjur hækka um h, þá hækkar skatturinn um $S'(x)h$.

2.5 Afleiður hornafalla

1. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
2. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
3. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \left(= \frac{1}{\cos^2 x}\right)$

2.5.1 Details

Sönnun á $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cdot\cos h + \cos x\cdot \sin h - \sin x}{h}\\ &= \sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \to \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x\end{aligned}$$

Hér höfum við notað okkur okkur eftirfarandi

1. $\lim_{h\to 0}\sin h = 0$
2. $\lim_{h\to 0}\cos h = 1$

3. $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$

4. $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = 0$

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1-\cos h}{h} = \tfrac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} = \tfrac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)} = \tfrac{\sin h}{h}\cdot\tfrac{\sin h}{1+\cos h} \\
\to \quad & 1\cdot\tfrac{0}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

Setning 2.1

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \left(= \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Sönnun.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \tfrac{\sin x\cdot\cos h+\cos x\cdot\sin h-\sin x}{h} \\
&= \sin x\left(\tfrac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\cdot\tfrac{\sin h}{h} \\
&\to \sin x\cdot 0+\cos x+1 = \cos x
\end{aligned}$$

Þ.e. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \tfrac{\cos x\cdot\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} \\
&= \cos x\left(\tfrac{\cos h-1}{h}\right)-\sin x\tfrac{\sin h}{h} \\
&\to \cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1
\end{aligned}$$

þ.e. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan x) &= \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{\sin x}{\cos x}\right) \\
&= \tfrac{\cos x\cos x-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \tfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

□

2.5.2 Examples

Dæmi 2.1. Hlutur sveiflast þ.a.

$$s(t) = 10\sin t$$

Hvenær er hraðinn mestur?

$$\frac{ds}{dt}(t) = 10\cdot\cos t = 10$$

þegar

$$t = 2n\pi \qquad n\in\mathbb{Z}$$

(-10 ef $t = (2n-1)\pi$).

2.6 Samsett fall

$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ kallast samsett fall

2.6.1 Details

$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ kallast samsett fall

2.7 Keðjureglan - afleiða samsetts falls

Ef f er diffranlegt í $u = g(x)$ og g er diffranlegt í x, þá er $f \circ g$ diffranlegt í x og

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

2.7.1 Details

Setning: Ef f er diffranlegt í $u = g(x)$ og g er diffranlegt í x, þá er $f \circ g$ diffranlegt í x og

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

eða

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

eða

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{du}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x)$$

„Sönnun“:

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$$
$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \tfrac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \tfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{\Delta u}{\Delta x} \end{aligned}$$

(því $\Delta u \to 0$, þegar $\Delta x \to 0$)

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dx}$$

þ.e.

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dy}{du}(g(x))\frac{du}{dx}(x)$$

Ath: Þetta gengur aðeins ef Δu verður aldrei núll (þegar $\Delta x \to 0$) Sjá annars Appendix 3.

2.7.2 Examples

Dæmi

1. $F(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{-1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x \qquad \left(= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \frac{du}{dx} \right)$$

$$x \longmapsto x^2+1 = u \longmapsto \frac{1}{u} = y$$

$$\frac{dF}{dx}(x) = F'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

2. $f(x) = \cos\sqrt{x}$
   $(D_f = [0,\infty))$

$$f'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$x \underbrace{\longmapsto}_{\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} \sqrt{x} = u \qquad \underbrace{\longmapsto}_{\frac{dy}{du}=-\sin u=-\sin\sqrt{x}} \qquad \cos u = y$$

3. $f(x) = \sin^2 x \qquad (= (\sin x)^2)$

$$f'(x) = \cos x \cdot 2\sin x$$

$$x \underbrace{\longmapsto}_{\cos x} u = \sin x \underbrace{\longmapsto}_{2u=2\sin x} u^2 = y$$

2.8 Dæmi

Snjóbolti að bráðna.

$$V = \frac{4\pi}{3}r^3 \qquad \text{(rúmmál kúlu)}$$

Nú eru V og r föll af t (tíma) $\quad V(t)$ og $r(t)$. G.r.f. að

$$\frac{dV}{dt} = -k \cdot \text{(yfirborðsflatarmál kúlunnar)}, \quad k > 0 \quad \text{er fasti.}$$

2.8.1 Examples

Snjóbolti að bráðna.

$$V = \frac{4\pi}{3}r^3 \qquad \text{(rúmmál kúlu)}$$

Nú eru V og r föll af t (tíma) $\quad V(t)$ og $r(t)$. G.r.f. að

$$\frac{dV}{dt} = -k \cdot \text{(yfirborðsflatarmál kúlunnar)}, \quad k > 0 \quad \text{er fasti.}$$

Þetta er stærðfræðilegt líkan af bráðnununni, þ.e. rúmmál minnkar með hraða sem er í beinu hlutfalli við flatarmál yfirborðs kúlunnar

$$\frac{dV}{dt} = -k(4\pi r^2)$$

Nú er

$$V(t)=\frac{4\pi}{3}r(t)^3$$

og því

$$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}\quad\text{skv. keðjureglu.}$$

Því er

$$\begin{aligned} & 4\pi r^2\tfrac{dr}{dt}=-k4\pi r^2\\ \Rightarrow\qquad & \tfrac{dr}{dt}=-k\end{aligned}$$

þ.e. geislinn minnkar með jöfnum hraða,

$$r(t)=-kt+r_0$$

þar sem r_0 er geislinn þegar $t=0$. Því er

$$\begin{aligned} V(t) &= \tfrac{4\pi}{3}(r_0-kt)^3\\ &= \tfrac{4\pi}{3}r_0^3\left(1-\tfrac{k}{r_0}t\right)^3\\ &= V_0\left(1-\tfrac{k}{r_0}t\right)^3\end{aligned}$$

Ef við þekkjum V_0 má finna r_0 $\left(=\left(\frac{3}{4\pi}V_0\right)^{\frac{1}{3}}\right)$.

Til að finna k þarf eina mælingu til viðbótar á V (eða r), t.d. ef $V=V_1$ þegar $t=t_1$, þá er

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0\left(1-\tfrac{kt_1}{r_0}\right)^3\\ 1-\tfrac{kt_1}{r_0} &= \left(\tfrac{V_1}{V_0}\right)^{\frac{1}{3}}\\ \Rightarrow\qquad k &= \left(1-\left(\tfrac{V_1}{V_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\tfrac{r_0}{t_1}\end{aligned}$$

$$V(t)=V_0\left(1-\left(1-\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{t}{t_1}\right)^3$$

Athugið að $V=0$ þegar

$$t=\frac{r_0}{k}=\frac{t_1}{\left(1-\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}$$

2.9 Óbein diffrun

Skilgreinum $y(x)$ með $y^5 - y - x^2 + 1 = 0$ og finnum hallatölu snertils ferilsins í $(1,1)$
Lítum á y sem fall af x þ.a. $y(1) = 1$.
Diffrum jöfnuna m.t.t. x.

$$5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

Finnum nú $\frac{dy}{dx}(1)$, með því að nýta okkur að $y(1) = 1$:

$$\begin{aligned} & 5 \cdot 1^4 \tfrac{dy}{dx}(1) - \tfrac{dy}{dx}(1) - 2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{dy}{dx}(1)(5-1) - 2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{dy}{dx}(1) = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Snertill í $(1,1)$ er því:$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$ þ.e.$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

2.9.1 Details

Tvær stærðir x og y eru tengdar með jöfnu $F(y,x) = 0$. Þessi jafna gefur feril í plani (sem þarf ekki að vera graf). Viljum finna jöfnu snertils ferilsins í (x_0, y_0). Því þarf að finna $\frac{dy}{dx}$, en við höfum ekki formúlu sem gefur y sem fall af x.

2.9.2 Examples

<u>Dæmi:</u> $y(x)$ er skilgreint með

$$y^5 - y - x^2 + 1 = 0$$

1. $y(1) = 1$. Lítum á y sem fall af x þ.a. $y(1) = 1$.
   Diffrum jöfnuna m.t.t. x.

   $$5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

   Finnum nú $\frac{dy}{dx}(1)$, með því að nýta okkur að $y(1) = 1$:

   $$\begin{aligned} & 5 \cdot 1^4 \tfrac{dy}{dx}(1) - \tfrac{dy}{dx}(1) - 2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{dy}{dx}(1)(5-1) - 2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{dy}{dx}(1) = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

   Snertill í $(1,1)$ er því:

   $$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

   þ.e.

   $$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

2. Finnum snertil í $(1,0)$.

   $$5y^4 \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

   Nú er $x = 1$ og $y = 0$. Fáum því:

   $$\begin{aligned} & -\tfrac{dy}{dx} - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{dy}{dx} = -2 \end{aligned}$$

Jafna snertils í $(1,0)$ er því:

$$y = -2(x-1)$$

3. Finnum snertil í $(1,-1)$:

$$5(-1)^4\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

Finnum $\frac{d^2y}{dx^2}$ í $(1,1)$:
Diffrum aftur:

$$5\cdot 4y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5y^4\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2} - 2 = 0$$

$x=1$, $y=1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$. Fáum því:

$$20\cdot 1^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\cdot 1^4\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2} - 2 = 0$$
$$5 + 4\frac{d^2y}{dx^2} - 2 = 0$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{4}$$

Til að finna $\frac{dy}{dx}$ þarf að diffra jöfnuna sem gefur sambandið milli x og y, setja inn hnit x og y og leysa fyrir $\frac{dy}{dx}$.

2.10 Háðir breytingahraðar

Sandur bæstist við keilulaga hrúgu með hraða $24m^3/min$. Hornið við toppinn er $1.2\,rad$. Hversu hratt vex hæð sandbingsins þegar hann er $2\,m$? Lausn:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot hm^3$$

Þekkjum $\frac{dV}{dt}$ og h, viljum finna $\frac{dh}{dt}$. Viljum því losna við r. Höfum að $\frac{r}{h} = \tan 0,6$ og því $r = h\tan 0,6$ Þá er

$$V = \frac{1}{3}\pi(h\tan 0.6)^2\cdot h$$

þ.e.

$$V(t) = \tfrac{1}{3}\pi\tan^2 0,6\cdot h(t)^3$$
$$\Rightarrow \qquad \tfrac{dV}{dt} = \tfrac{1}{3}\pi\cdot\tan^2 0,6\cdot 3h(t)^2\cdot\tfrac{dh}{dt}$$

$\frac{dV}{dt} = 24m^3/min$, $h = 2m$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\pi\tan^2 0,6\cdot h(t)^2} = \frac{24}{\pi\tan^2 0,6\cdot 2^2} = 4,81m/min$$

2.10.1 Details

Þegar 2 (eða fleiri) breytur, sem breytast með tíma, eru jafnframt háðar hvor annarri, t.d. tengdar með jöfnu

$$F(x,y) = 0$$

þá verða breytingahraðarnir $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ einnig háðir. Ef við þekkjum annan þá má finna hinn.

2.10.2 Examples

<u>Dæmi:</u> Sandur bæstist við keilulaga hrúgu með hraða $24m^3/min$. Hornið við toppinn er $1.2\,rad$. Hversu hratt vex hæð sandbingsins þegar hann er $2\,m$? Lausn:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot hm^3$$

Þekkjum $\frac{dV}{dt}$ og h, viljum finna $\frac{dh}{dt}$. Viljum því losna við r.
Þá er

$$V = \frac{1}{3}\pi(h\tan 0.6)^2 \cdot h$$

þ.e.

$$\begin{aligned} & V(t) = \tfrac{1}{3}\pi\tan^2 0,6 \cdot h(t)^3 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{dV}{dt} = \tfrac{1}{3}\pi \cdot \tan^2 0,6 \cdot 3h(t)^2 \cdot \tfrac{dh}{dt} \end{aligned}$$

$\frac{dV}{dt} = 24m^3/min$, $h = 2m$:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\pi\tan^2 0,6 \cdot h(t)^2} = \frac{24}{\pi\tan^2 0,6 \cdot 2^2} = 4,81m/min$$

Almennt gildir:

$$\begin{aligned} & y(t) = F(x(t)) \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{dy}{dt} = F'(x(t)) \cdot \tfrac{dx}{dt} \quad \text{skv. keðjureglu} \end{aligned}$$

1.

$$x(t)^2 + y(t)^2 = L$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

2. Linsujafnan

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f}$$

s_1 = fjarlægð hlutar frá linsu.
s_2 = fjarlægð myndar frá linsu.

$\frac{ds_1}{dt} = 10\,cm/s.$
$f = 20\,cm.$ $s_1 = 60\,cm.$ Viljum finna $\frac{ds_2}{dt}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{60}+\frac{1}{s_2}=\frac{1}{20} \qquad &\Rightarrow \qquad s_2 = 30cm \\ -\frac{1}{s_1^2}\cdot\frac{ds_1}{dt}-\frac{1}{s_2^2}\frac{ds_2}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \frac{ds_2}{dt} = -\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2\frac{ds_1}{dt} &= -\left(\frac{30}{20}\right)^2\cdot 10 = -22,5 \end{aligned}$$

3 Notkun á afleiðum - hágildi og lággildi

3.1 Víðfem há-lággildi

Skilgreining: $f: D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad c \in D$

- $f(c)$ er **stærsta gildi** f í D ef

$$f(c) \geq f(x) \qquad \forall x \in D$$

- $f(c)$ er **minnsta gildi** f í D ef

$$f(c) \leq f(x) \qquad \forall x \in D$$

(einnig kallað víðfeðmt hágildi/lággildi; „global“).

3.1.1 Details

Skilgreining: $f: D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad c \in D$

- $f(c)$ er **stærsta gildi** f í D ef

$$f(c) \geq f(x) \qquad \forall x \in D$$

- $f(c)$ er **minnsta gildi** f í D ef

$$f(c) \leq f(x) \qquad \forall x \in D$$

(einnig kallað víðfeðmt hágildi/lággildi; „global“).

3.1.2 Examples

Dæmi: Stöku sinnum er þetta auðvelt, t.d. er lággildið á $(x-2)^2$ augljóslega í $x = 2$.
Það sama er að segja um $\left(x^2-2\right)^2$ - þetta er alltaf ≥ 0 og verður núll þegar $x^2 = 2$, þ.e. í $x = \pm\sqrt{2}$.

3.2 Staðbundin há- lággildi

$c \in D_f$ (formengi f, c ekki á jaðri D_f).

1. f tekur staðbundið (local) hágildi í c ($f(c)$) þá og því aðeins að

$$f(x) \leq f(c)$$

fyrir öll x í opnu bili um c.

2. f tekur staðbundið (local) lággildi í c ($f(c)$) þá og því aðeins að

$$f(x) \geq f(c)$$

fyrir öll x í opnu bili um c.

3.2.1 Details

$c \in D_f$ (formengi f, c ekki á jaðri D_f).

1. f tekur staðbundið (local) hágildi í c ($f(c)$) þá og því aðeins að

$$f(x) \leq f(c)$$

fyrir öll x í opnu bili um c.

2. f tekur staðbundið (local) lággildi í c ($f(c)$) þá og því aðeins að

$$f(x) \geq f(c)$$

fyrir öll x í opnu bili um c.

3.2.2 Examples

Dæmi: Á myndinni hér til hliðar eru staðbundin lággildi í c_1 og c_3, staðbundið hágildi í c_2, hágildi í b og lággildi í c_3.

3.3 Extreme Value Theorem

Setning: Ef $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ er **samfellt**, þá tekur f bæði hágildi og lággildi í $[a,b]$, (þ.e. tekur stærsta gildi M og minnsta gildi m í $[a,b]$).

M.ö.o: til eru x_1 og $x_2 \in [a,b]$ þ.a. $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ og

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in [a,b]$$
$$f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

3.3.1 Details

Eftirfarandi tryggir að til sé hágildi og lággildi falls f sem skilgreint er á $[a,b]$: Setning (Extreme Value Theorem): Ef $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ er **samfellt**, þá tekur f bæði hágildi og lággildi í $[a,b]$, (þ.e. tekur stærsta gildi M og minnsta gildi m í $[a,b]$).

M.ö.o: til eru x_1 og $x_2 \in [a,b]$ þ.a. $f(x_1)=m,\ f(x_2)=M$ og

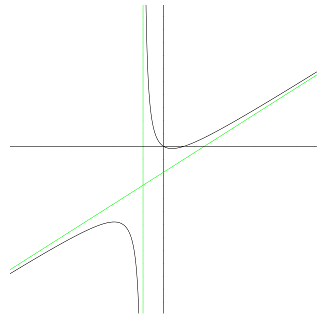
$$f(x)\geq m \quad \forall x\in[a,b]$$
$$f(x)\leq M \quad \forall x\in[a,b]$$

Ath: Bilið verður að vera lokað, sbr. $f(x)=\frac{1}{x}$ og $(0,1)$, sem hefur hvorki há- né lággildi í $(0,1)$.

3.4 Setning (staðbundið há eða lággildi)

Ef f tekur staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi í c ($c\in D_f$, ekki á jaðri D_f) og $f'(c)$ er til, þá er

$$f'(c)=0$$



$y = \frac{1}{2}x-2\frac{x}{x+2}$ with asymptotes in green.

3.4.1 Details

Finna má punkta þar sem f tekur hágildi/lággildi með því að skoða afleiðuna, f'.
Setning:(sjá bls. 230 í TC) Ef f tekur staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi í c ($c\in D_f$, ekki á jaðri D_f) og $f'(c)$ er til, þá er

$$f'(c)=0$$

Sönnun: G.r.f. að f hafi hágildi í $x=c$. Þá er $f(x)-f(c)\leq 0$ ef x er nálægt c.

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

er til. Því eru markgildin frá hægri og frá vinstri líka til.

$$f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{\geq 0}} \quad \leq 0$$

Jafnframt er

$$f'(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{\overbrace{f(c)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{\leq 0}} \quad \geq 0$$

Úr því að $f'(c) \leq 0$ og $f'(c) \geq 0$, þá hlýtur

$$f'(c) = 0$$

Til að finna stærsta/minnsta gildi f á bili $[a,b]$ þarf að athuga:

1. $x \in (a,b)$ þ.a. $f'(x) = 0$
2. $x \in (a,b)$ þ.a. $f'(x)$ er ekki til.
3. Endapunktana a og b

Ath: $f'(x) = 0$ er nauðsynlegt skilyrði fyrir há/lággildi í x, en ekki nægjanlegt, sbr. $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ en f hefur hvorki há- né lággildi í 0.

3.4.2 Examples

Dæmi (einfalt): Ef $f(x) = \left(x^2 - 2\right)^2$ þá er augljóst að $f(x)$ er aldrei minna en núll og verður minnst núll þegar $x^2 - 2 = 0$, sem gerist nákvæmlega ef $x = \pm\sqrt{2}$.
Dæmi:

$$x + \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2}$$

Dæmi: Lítið á fallið

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2\frac{x}{x+2}$$

skilgreint ef $x \neq 2$.
Þá fæst að f hefur lóðfellu í $x = 2$.
Einnig sjáum við að seinni liðinn má umrita aðeins til að fá $2\frac{x}{x+2} = 2\frac{1}{1+2/x}$ og þá fæst augljóslega

$$\lim_{x \to \pm\infty} 2\frac{x}{x+2} = 2$$

og þá líka, að

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 0$$

svo f hefur lóðfelluna $y = \frac{1}{2}x - 2$.
Að lokum má diffra fallið f og fá, eftir minniháttar umritun

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{(x+2)^2}$$

en þá fæst líka, að $f'(x) = 0$ gildir nákvæmlega ef $x = -2 \pm \sqrt{2}$.
Þar sem f' er samfellt fall ef $x \neq -2$ og hefur aðeins tvær núllstöðvar en auðvelt að sjá hvar $f' < 0$ og hvar $f' > 0$, með því aðeins að prófa nokkra punkta.
Með þessu móti má teikna meðfylgjandi mynd.

3.5 Hvarfpunktur

Skilgreining: $x \in D_f$ þ.a. $f'(x) = 0$ eða ekki til, kallast hvarfpunktur.

3.5.1 Details

Skilgreining: **Hvarfpunktur:** $x \in D_f$ þ.a. $f'(x) = 0$ eða ekki til, kallast hvarvpunktur.

3.5.2 Examples

Dæmi: $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3$
$f'(x) = 1 - x^2$. Krítískir punktar eru $x = \pm 1$. $f(1) = \frac{2}{3}$, $f(-1) = \frac{-2}{3}$. Ath: Ef $D_f = \mathbb{R}$, þá hefur f hvorki stærsta né minnsta gildi. Staðbundið lággildi ($= -\frac{2}{3}$) er í $x = -1$ og staðbundið hágildi ($= \frac{2}{3}$) er í $x = 1$.

3.6 Meðalgildissetningin

Ef $f(x)$ er samfellt á bili $[a,b]$ og diffranlegt í (a,b), þá er til a.m.k. einn punktur c í (a,b) þ.a.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

eða

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

3.6.1 Details

Meðalgildissetningin(sjá bls. 238 í TC): Ef $f(x)$ er samfellt á bili $[a,b]$ og diffranlegt í (a,b), þá er til a.m.k. einn punktur c í (a,b) þ.a.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

eða

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Sönnun:

1. Gerum fyrst ráð fyrir að $f(b) = f(a)$.

   Ath:

   $$\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

   er hallatala strengsins milli punktanna $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. Hallatalan er núll því $f(b) = f(a)$.

   Er til $c \in (a,b)$ þ.a. $f'(c) = 0$?

   Fallið er samfellt í $[a,b]$ og hefur því stærsta og minnsta gildi í $[a,b]$ (stærsta/minnsta gildi) skv. setningu á bls. 2 (EVT). Í þeim punktum er $f'(x) = 0$ eða stærsta/minnsta gildi er í endapunktunum a eða b.

   Athugið að gert er ráð fyrir að afleiðan sé til í (a,b).

   Ef $f(x) = k$, fasti í $[a,b]$ þá er $f'(x) = 0$, fyrir öll $x \in (a,b)$.

   Gerum því ráð fyrir að $f(x)$ sé ekki fasti.

   Úr því að $f(b) = f(a)$ getur f ekki haft bæði stærsta og minnsta gildi í endapunktum (ath f er ekki fastafall). Það er því til $c \in (a,b)$ þ.a. $f(c)$ er annaðhvort stærsta eða minnsta gildið í $[a,b]$.

Úr því að a.m.k. annað hvort stærsta eða minnsta gildið er í (a,b) þá er $f' = 0$ í þeim punkti.

2. Skoðum nú almenna tilfellið. Setjum

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

og skoðum

$$g(x) = f(x) - m \cdot x$$

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - m \cdot a \\ &= \tfrac{f(a)(b-a) - (f(b) - f(a)) \cdot a}{b-a} \\ &= \tfrac{f(a)(b-a+a) - f(b) \cdot a}{b-a} \\ &= \tfrac{f(a) \cdot b - f(b) \cdot a}{b-a} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - m \cdot b \\ &= \tfrac{f(b)(b-a) - (f(b) - f(a)) \cdot b}{b-a} \\ &= \tfrac{-f(b) \cdot a + f(a) \cdot b}{b-a} \\ &= g(a) \end{aligned}$$

Úr því að $g(a) = g(b)$ þá beita fyrri hlutanum og fá að til er c þ.a.

$$g'(c) = 0$$

þ.e.

$$f'(c) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

og niðurstaðan er fengin.

Dæmi: $f(x) = x^3$; $\qquad [a,b] = [1,3]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{27 - 1}{2} = 13$$
$$f'(c) = 3c^2 = 13$$

þ.e.

$$c = \sqrt{\frac{13}{3}} = 2,08$$

Ath: Meðalgildissetningin segir ekkert til um hvert gildi c er, aðeins að til sé c þ.a.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Notagildi meðalgildissetningarinnar (MVT) felst einkum í því að leiða má ýmislegt út með hjálp hennar.

3.6.2 Examples

Dæmi: $f(x) = x^3$; $\qquad [a,b] = [1,3]$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{27-1}{2} = 13$$
$$f'(c) = 3c^2 = 13$$

þ.e.

$$c = \sqrt{\frac{13}{3}} = 2,08$$

3.7 Dæmi um notkun meðalgildissetningarinnar

Ef $f'(x) = 0 \quad \forall x$ í bili I, þá er f fastafall í I. (þ.e. $f(x) = C, \forall x \in I$).

3.7.1 Details

Ef $f'(x) = 0 \quad \forall x$ í bili I, þá er f fastafall í I. (þ.e. $f(x) = C, \forall x \in I$).

[Veljum tvo punkta í I af handahófi x_1 og x_2. G.r.f. að $x_1 < x_2$. Skv. MVT er þá til $c \in (x_1, x_2)$ þ.a.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

en $f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$.

Þar sem x_1 og x_2 geta verið hvaða punktar sem er, hlýtur $f(x)$ að vera fasti.]

3.8 Framhald af dæmi

$$\begin{aligned} & f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in I \quad \text{(bil)} \\ \Rightarrow \quad & f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

3.8.1 Details

Höfum:

$$\begin{aligned} & f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in I \quad \text{(bil)} \\ \Rightarrow \quad & f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

$$\Big[\quad h(x) = f(x) - g(x), \quad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$
$$\Rightarrow \quad h(x) = C \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) + C \quad \Big]$$

Athugasemd 3.1. Þetta segir okkur að ef finna á öll föll sem hafa gefna afleiðu $g(x)$ þá er svarið

$$f(x) = f_0(x) + C \qquad \forall C$$

(þar sem $f_0(x)$ er eitthvað fall þ.a. $f_0'(x) = g(x)$).

3.8.2 Examples

Dæmi 3.1. Finna öll föll sem hafa afleiðu $\cos x$.

Svar:

$$f(x) = \sin x + C$$

Dæmi 3.2. Hlutur fellur í þyngdarsviði jarðar (þar sem hröðun er fasti = $9,8m/s^2$). Þegar $t = 0$ er v (hraði) $= -3$ og s (staðsetning) $= 0$.

$$\begin{aligned} & \tfrac{dv}{dt} = a = 9.8, \qquad v(0) = -3 \\ \Rightarrow \qquad & v(t) = 9.8t + C \\ & v(0) = C = -3 \\ & v(t) = 9,8t - 3 \end{aligned}$$

Nú er

$$\frac{ds}{dt} = v = 9,8t - 3, \qquad s(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & s(t) = 9,8 \cdot \tfrac{t^2}{2} - 3t + C \\ & s(0) = C = 0 \\ & s(t) = 9,8\tfrac{t^2}{2} - 3t \end{aligned}$$

Athugasemd 3.2. Við höfum leyst 2.stigs diffurjöfnu

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a \qquad s(0) = 0, \frac{ds}{dt}(0) = -3$$

Skoðum næst hvernig draga má ályktanur um lögun grafs $f(x)$ út frá formerkjum á f' og f''.

4 Vaxandi og minnkandi föll; afleiðupróf

4.1 Vaxandi og minnkandi föll

Skilgreining:

- f er **vaxandi** í bili I ef
$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2)$$
gildir fyrir öll x_1, x_2 í I.

- f er **minnkandi** í I ef
$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2)$$
gildir fyrir öll x_1, x_2 í I.

4.1.1 Details

Skilgreining:

- f er **vaxandi** í bili I ef
$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2)$$
gildir fyrir öll x_1, x_2 í I.

- f er **minnkandi** í I ef
$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2)$$
gildir fyrir öll x_1, x_2 í I.

4.2 Um afleiður og vaxandi/minnkandi föll

Gerum ráð fyrir að $f(x)$ sé samfellt á $[a,b]$ og diffranlegt í (a,b).

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Rightarrow \qquad f \quad \text{vaxandi á} \quad [a,b]$$
$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Rightarrow \qquad f \quad \text{minnkandi á} \quad [a,b]$$

4.2.1 Details

Formerki f' segir til um hvort f er vaxandi eða minnkandi. Setning: Gerum ráð fyrir að $f(x)$ sé samfellt á $[a,b]$ og diffranlegt í (a,b).

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Rightarrow \qquad f \quad \text{vaxandi á} \quad [a,b]$$
$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Rightarrow \qquad f \quad \text{minnkandi á} \quad [a,b]$$

$\Big[$ G.r.f. að $f'(x) > 0$, $x_1, x_2 \in [a,b]$, g.r.f. að $x_1 < x_2$. Skv. MVT er til $c \in [x_1, x_2]$ þ.a.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$$

Því er $f(x_2) - f(x_1) > 0$ og f því vaxandi ef $f'(x) > 0$.

Ef $f'(x) < 0$ þá fæst

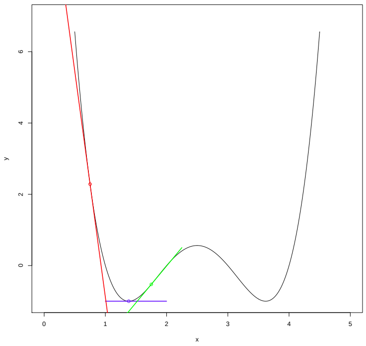
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0 \quad \text{og því er } f(x_1) > f(x_2) \Big]$$

Ath: $f'(x) = 0$ gefur okkur hugsanlega há-/lággildispunkta (þ.e. punkta x sem gefa há- eða lágildi). Til að finna hvort lausn á $f'(x) = 0$ er há- eða lággildispunktur má nota upplýsingar um formerki f'.

4.3 Afleiðupróf-lággildi

(*c* er krítískur punktur, þ.e. $f'(c) = 0$ eða ekki til).

Staðbundið lággildi í c ef formerki f' breytist frá „$-$“ í „$+$“ í c.



4.3.1 Details

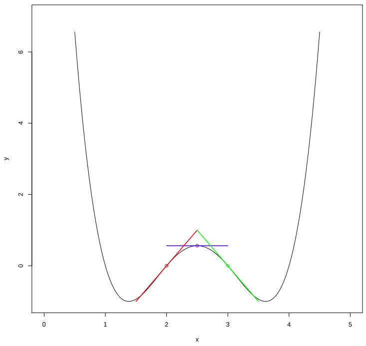
c er krítískur punktur, þ.e. $f'(c) = 0$ eða ekki til.

Staðbundið lággildi í c ef formerki f' breytist frá „$-$“ í „$+$“ í c.

4.4 Afleiðupróf-hágildi

c er krítískur punktur, þ.e. $f'(c) = 0$ eða ekki til.

Staðbundið hágildi í c ef f' breytist frá „$+$“ í „$-$“ í c.



4.4.1 Details

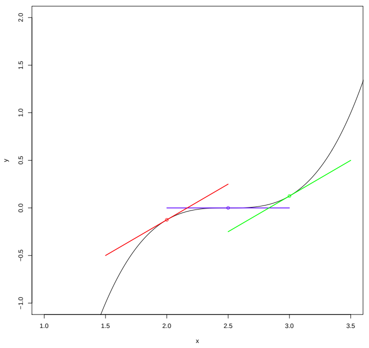
c er krítískur punktur, þ.e. $f'(c) = 0$ eða ekki til.

Staðbundið hágildi í c ef f' breytist frá „+“ í „−“ í c.

4.5 Afleiðupróf

c er krítískur punktur, þ.e. $f'(c) = 0$ eða ekki til.

Hvorki lág- né hágildi ef f' hefur sama formerki báðum megin við c.



4.5.1 Details

c er krítískur punktur, þ.e. $f'(c) = 0$ eða ekki til.

Hvorki lág- né hágildi ef f' hefur sama formerki báðum megin við c.

4.6 Sl27

Látum f vera diffranlegt fall. Graf $y = f(x)$ er

- **Hvelft upp** (concave up) á bili I ef $f'(x)$ er vaxandi fall á I.
- **Hvelft niður** (concave down) á bili I ef $f'(x)$ er minnkandi fall á I.

4.6.1 Details

Látum f vera diffranlegt fall. Graf $y = f(x)$ er

- **Hvelft upp** (concave up) á bili I ef $f'(x)$ er vaxandi fall á I.
- **Hvelft niður** (concave down) á bili I ef $f'(x)$ er minnkandi fall á I.

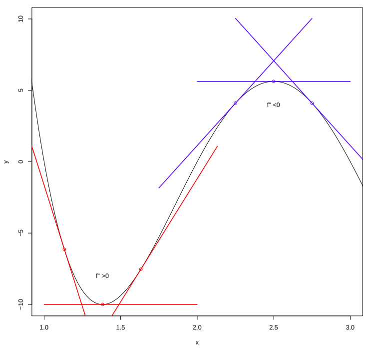
Til einföldunar getum við sagt að:

- hvelft upp = kúpt
- hvelft niður = hvelft

4.7 2. afleiðupróf

G.r.f. að f'' sé til

- Grafið $y = f(x)$ er hvelft upp (kúpt) þar sem $f'' > 0$
- Grafið $y = f(x)$ er hvelft niður (hvelft) þar sem $f'' < 0$.



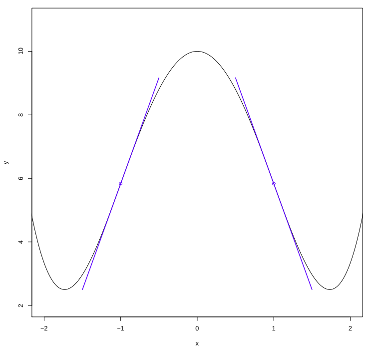
4.7.1 Details

G.r.f. að f'' sé til

- Grafið $y = f(x)$ er hvelft upp (kúpt) þar sem $f'' > 0$
- Grafið $y = f(x)$ er hvelft niður (hvelft) þar sem $f'' < 0$.

4.8 Beygjuskil

Punktur á grafi þar sem grafið breytir um sveigju (frá hvelft upp í hvelft niður eða öfugt) kallast beygjuskil (point of inflection).



4.8.1 Details

Skilgreining: Punktur á grafi þar sem grafið breytir um sveigju (frá hvelft upp í hvelft niður eða öfugt) kallast beygjuskil (point of inflection).

Ath:

1. Ef f'' er til þá er $f'' = 0$ í beygjuskilum.
2. $f''(c) = 0$ þarf ekki að þýða að beygjuskil séu í c. (sbr. $f(x) = x^4$, $c = 0$).
3. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, beygjuskil eru í $c = 0$, en $f''(0)$ er ekki til (∞)

4.8.2 Examples

Dæmi: $f(x) = \sin x, \quad f''(x) = -\sin x$. Beygjuskil eru í $n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$.

4.9 Slide number 32

Þar sem fallið tekur hágildi er graf fallsins hvelft niður,en hvelft upp þar sem fallið tekur lággildi.

- Ef $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, þá hefur fallið $f(x)$ (staðbundið) hágildi í $x = c$.
- Ef $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, þá hefur fallið $f(x)$ (staðbundið) lággildi í $x = c$.

4.9.1 Details

Þar sem fallið tekur hágildi er graf fallsins hvelft niður,en hvelft upp þar sem fallið tekur lággildi.

- Ef $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, þá hefur fallið $f(x)$ (staðbundið) hágildi í $x = c$.
- Ef $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, þá hefur fallið $f(x)$ (staðbundið) lággildi í $x = c$.

4.10 Dæmi

Höfum hringlaga skífu. Klippum burt hringgeira og búum til keilu. Hversu stóran geira á að klippa burt til að rúmmál keilunnar verði sem mest?

4.10.1 Examples

Dæmi 4.1. Hámarka hagnað x = fjöldi framleiddra eininga
$p(x)$ = hagnaður ef framleiddar eru x einingar
$r(x)$ = tekjur ef framleiddar eru x einingar
$c(x)$ = kostnaður við að framleiða x einingar

$$p(x) = r(x) - c(x)$$

Til að hámarka hagnað (þ.e. finna hversu mikið á að framleiða til að hámarka p) leysum við

$$p'(x) = 0$$

þ.e.

$$\begin{aligned} & r'(x) - c'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & r'(x) = c'(x) \end{aligned}$$

þ.e.

$$\text{jaðartekjur} = \text{jaðarkostnaður.}$$

5 Línulegar nálganir og skekkjumat

5.1 Línulegar nálganir

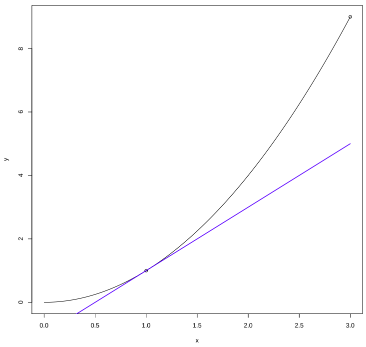
Höfum fall f. Graf f er $y = f(x)$, $\quad (a, f(a))$ er punktur á grafinu.

Skilgreinum línulega fallið

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

(Við þurfum að sjálfsögðu að gera ráð fyrir að f sé diffranlegt í a).

$L(x)$ kallast línulega nálgunin á f í $x = a$



5.1.1 Details

Byrjum með eitthvert fall, f.
Graf fallsins f eru punktarnir (x,y) þar sem $y = f(x)$. Tökum nú eitthvert löglegt x-gildi, a. Þá er $(a, f(a))$ er punktur á grafinu.
Skilgreinum línulega fallið

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

(Við þurfum að sjálfsögðu að gera ráð fyrir að f sé diffranlegt í a).

Athugasemd 5.1. Graf L, $y = L(x)$, er snertilína grafsins $y = f(x)$ í punktinum $(a, f(a))$.

Oft er þægilegt (nauðsynlegt) að nálga ólínulegt fall (þar sem grafið er ekki lína) með línulegu falli (þar sem grafið er lína).

Við höfum þegar séð að $L(x)$ er besta línulega nálgunin á $f(x)$ í grennd við punktinn a.

Þ.e. besta línulega nálgunin í þeim skilningi að

$$|f(x) - L(x)|$$

minnkar hraðar en

$$|f(x) - (f(a) + b(x-a))|$$

fyrir hvaða b sem er, þegar x nálgast a. (sbr. dæmi 45 á bls. 295 í TC).

Athugasemd 5.2. Ef $f'(a)$ er til, þá köllum við línulega fallið

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

línulegu nálgunina á f í $x = a$.

5.1.2 Examples

Dæmi 5.1.

$$f(x) = (1+x)^k$$

Finnum línulega nálgun á $f(x)$ umhverfis $a = 0$.

$$f'(x) = k(1+x)^{k-1}, \quad f'(0) = k$$
$$f(0) = 1$$
$$L(x) = 1 + k \cdot x$$

Við notum því

$$(1+x)^k \approx 1 + kx$$

ef x er lítið.

T.d.

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad x << 1$$

5.2 Dæmi

$$f(x) = x^3, \qquad a = 1$$
$$f'(x) = 3x^2, \qquad f'(1) = 3, \qquad f(1) = 1$$
$$L(x) = 1 + 3(x-1) = 3x - 2$$

5.2.1 Examples

<u>Dæmi 1:</u>

$$f(x) = x^3, \qquad a = 1$$
$$f'(x) = 3x^2, \qquad f'(1) = 3, \qquad f(1) = 1$$
$$L(x) = 1 + 3(x-1) = 3x - 2$$

x	$f(x)$	$L(x)$	$\lvert f(x) - L(x) \rvert$
2	8	4	4
1,5	3,375	2,5	0,875
1,25	1,953125	1,75	0,203
1,10	1,331	1,30	0,031
1,01	1,0303	1,0300	0,0003

Við notum oft línulegar nálganir þegar meta á skekkju.

<u>Dæmi 2:</u> x er mælt sem a með skekkju Δx, þ.e. $x = a \pm \Delta x$. Hver er skekkjan í f?

$$\Delta f = |f(a + \Delta x) - f(a)|$$

Ef við notum

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

þá fæst mat á skekkju

$$\begin{aligned}\Delta f &\approx |L(a+\Delta x)-L(a)| \\ &= |f(a)+f'(a)(a+\Delta x-a)-f(a)| \\ &= |f'(a)||\Delta x|\end{aligned}$$

þ.e.

$$\Delta f \approx |f'(a)||\Delta x|$$

5.3 Diffur (*)

Látum $y = f(x)$ vera diffranlegt fall; dy og dx kallast **diffur** og

$$dy = f'(x)\,dx$$

5.3.1 Details

Skilgreining 5.1. Látum $y = f(x)$ vera diffranlegt fall; dy og dx kallast **diffur** og

$$dy = f'(x)\,dx$$

Þessa formúlu notum við til að **meta** hvað breyting í x frá x í $x+dx$ veldur mikilli breytingu í y, dy:

$$dy = f'(x)\,dx$$

Eins til að meta hvað skekkja (óvissa) í x upp á dx veldur mikilli skekkju (óvissu) í y.

5.3.2 Examples

Dæmi 5.2. Rúmmál kúlu

$$V(r) = \frac{4\pi}{3}r^3$$
$$V'(r) = 4\pi r^2$$

Ef radíus kúlunnar vex frá $r = 1$ í $r = 1,1$ þá vex rúmmálið um u.þ.b.

$$dV = V'(1)\cdot dr = V'(1)\cdot 0,1$$

þ.e.

$$dV = 4\pi\cdot 0,1 = 1,26$$

Athugasemd 5.3. Nákvæmt gildi er

$$\Delta V = V(1,1) - V(1,0)$$
$$= \tfrac{4\pi}{3}(1,1^3 - 1^3)$$
$$= 1,386$$

Athugasemd 5.4. Við getum líka metið hlutfallslega breytingu og prósentubreytingu:

$$\frac{df}{f(a)} = \frac{f'(a)}{f(a)} \cdot dx = \frac{f'(a)}{\frac{f(a)}{a}} \cdot \left(\frac{dx}{a}\right)$$

Athugasemd 5.5.

$$df = f'(x)\,dx$$

segir til um hversu viðvæm f-gildin eru fyrir breytingum í x-gildum. (t.d. skekkju eða ónákvæmni).

Dæmi 5.3.

$$f(x) = \alpha x^k, \qquad \left(\frac{df}{f}\right) = k\left(\frac{dx}{x}\right), \qquad \text{fyrir}\, a = 1$$

$$\Delta f = f(a+\Delta x) - f(a)$$

er rétta breytingin í f, en

$$df = f'(a) \cdot dx$$

er mat á f-breytingunni.

$$\begin{aligned}\Delta f - df \qquad &= f(a+\Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x \\ &= \left(\underbrace{\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)}_{\varepsilon}\right)\Delta x \\ &= \varepsilon \cdot \Delta x\end{aligned}$$

þ.e.

$$\Delta f = df + \varepsilon \Delta x$$

þ.e.

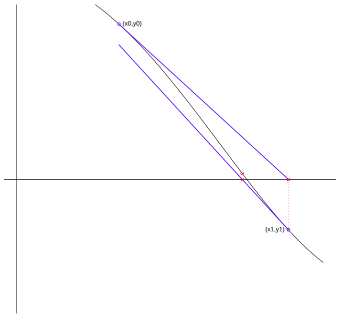
$$\Delta f = f'(a) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

þar sem

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$$

5.4 Newton-Raphson aðferðin

Mest notaða aðferðin til að leysa jöfnur $f(x) = 0$ byggir á því að taka línulega nálgun.



1. Veljum startgildi x_0.
2. Finnum snertilínu í $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

3. Finnum skurðpunkt snertilínunnar við x-ás. Köllum x-hnitið x_1 og
4. Aftur í 2.

5.4.1 Details

Mest notaða aðferðin til að leysa jöfnur $f(x) = 0$ byggir á því að taka línulega nálgun.

1. Veljum startgildi x_0.
2. Finnum snertilínu í $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

3. Finnum skurðpunkt snertilínunnar við x-ás. Köllum x-hnitið x_1 og
4. Aftur í 2.

Höfum x_n,
snertilína í $(x_n, f(x_n))$ hefur jöfnuna

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Skurðpunktur við x-ás verður x_{n+1}:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Þetta er Newton aðferðin (Newton-Raphson).

Þetta gefur runu $\{x_n\}$ af gildum sem stefna oft á lausn á $f(x) = 0$.

Runan er skilgreind á endurkvæman hátt.

Newton aðferðin er mjög hraðvirk, en ekki alltaf samleitin, t.d. ef startgildið er of langt frá rótinni (þ.e. lausn $f(x) = 0$), $f'(x_n) \approx 0$ fyrir eitthvað n o.s.frv.

6 Náttúrulegi logrinn og afleiða hans

6.1 Skilgreiningar

Í bili „skilgreinum” við

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

og

$$\exp(x) = e^x \text{ fyrir } x \in \mathbb{R}$$

sem er vaxandi fall, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ og hefur því andhverfu

$$\ln = \exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

6.1.1 Details

Í bili skilgreinum við

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

og

$$\exp(x) = e^x \text{ fyrir } x \in \mathbb{R}$$

sem er vaxandi fall, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ og hefur því andhverfu

$$\ln = \exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

Þessi „skilgreining” er samt ótæk því við vitum ekki hvernig á að reikna tölu í óræðu veldi (en gætum raunar notað markgildi af ræðum veldum). Við skilgreinum þessi hugtök, exp og ln, formlega rétt síðar.

6.2 Lograsetningar

$a > 0, x > 0,$

1. $\ln ax = \ln a + \ln x$
2. $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
3. $\ln x^n = n \ln x \qquad (n \in \mathbb{Q})$
4. $$\begin{array}{ccc} \ln x \to \infty & \text{þegar} & x \to \infty \\ \ln x \to -\infty & \text{þegar} & x \to 0^+ \end{array}$$
5.

$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

6.2.1 Details

$a > 0, x > 0,$

1. $\ln ax = \ln a + \ln x$

$$\Big[\qquad \frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{ax}\cdot a = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln x$$

því er $\ln ax = \ln x + C$ $\quad$ (C fasti).

$\ln ax = \ln x + C$ fyrir öll $x > 0$:

$$\ln a \cdot 1 = \ln 1 + C \qquad \Rightarrow \qquad c = \ln a$$

þ.e. $\ln ax = \ln a + \ln x.$ $\quad \Big]$

2.
$$\ln\frac{a}{x} = \ln a - \ln x$$

(a)
$$\Big[\qquad \ln\frac{1}{x}\cdot x = \ln\frac{1}{x} + \ln x$$

en
$$\ln\frac{1}{x}\cdot x = \ln 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{1}{x} = -\ln x \qquad \Big]$$

(b)
$$\ln\frac{a}{x} = \ln a \cdot \frac{a}{x} = \ln a + \ln\frac{1}{x} = \ln a - \ln x$$

3.
$$\ln x^n = n\ln x \qquad (n \in \mathbb{Q})$$

$$\Big[\qquad \frac{d}{dx}\ln x^n = \frac{1}{x^n}\cdot nx^{n-1} = n\cdot\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(n\cdot\ln x)$$

$\Rightarrow$
$$\ln x^n = n\ln x + C \qquad (C \text{ fasti})$$

$x = 1$:

$$\ln 1^n = n\ln 1 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$$
$$\Rightarrow \qquad \ln x^n = n\ln x \qquad \Big]$$

4.

$$\ln x \to \infty \qquad \text{þegar} \qquad x \to \infty$$
$$\ln x \to -\infty \qquad \text{þegar} \qquad x \to 0^+$$

$\Big[\qquad x = 2^n, \quad \ln 2^n = n\ln 2 \quad \to \infty, \quad n \to \infty$

þ.e. $\ln x \to \infty, \quad x \to \infty.$

$\ln x = -\ln\frac{1}{x}$, því er

$$\lim_{x\to 0}\ln x = -\lim_{x\to 0}\ln\frac{1}{x} = -\lim_{y\to\infty}\ln y = -\infty \qquad \Big]$$

5. $x \neq 0$

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

[$\quad x > 0 : |x| = x$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x};$$

$x < 0$: $\quad |x| = -x$,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = (-1)\cdot\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} \quad]$$

6.3 Logradiffrun

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}\\ \frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{1}{f(x)}\cdot\frac{df}{dx}\end{gathered}}$$

6.3.1 Details

Notum $\ln a^x = x\ln a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Samband $\log_a x$ og $\ln x$:

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = \ln a^y \quad = \quad y\ln a \quad = \quad \log_a x \cdot \ln a$$

þ.e.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

því er

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

(eða

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{dy}{dx}$$

ef $u = u(x)$).

6.3.2 Examples

Dæmi: $f(x) = a^x, \qquad a > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= f(x)\cdot\tfrac{d}{dx}(\ln f(x))\\ &= a^x\tfrac{d}{dx}\ln a^x\\ &= a^x\tfrac{d}{dx}x\cdot\ln a\\ &= \ln a\cdot a^x\end{aligned}$$

þ.e.

$$\frac{d}{dx}a^x = \ln a\cdot a^x$$

(sjá einnig example 5 á bls 463 í TC).

7 Afleiða andhverfu falls; veldisvísisfallið og breiðboga-föllin

7.1 Veldisvísisfallið exp(x)

Ef logrinn er skilgreindur fyrst, þá setjum við

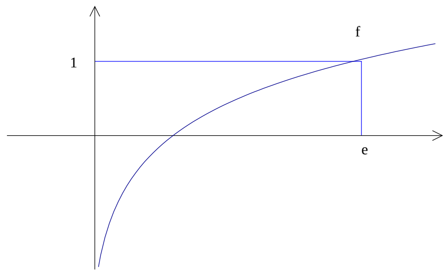
$$exp(x) = \ln^{-1} x$$

og

$$e = \ln^{-1} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln e = 1$$

og

$$e^x = exp(x)$$



7.1.1 Details

Skilgreining:

$$e^x = \ln^{-1} x$$

þ.e. e^x er andhverfa lograns ($\ln x$).

$$e^{\ln x} = x \qquad \text{og} \qquad \ln(e^x) = x$$

Nú er $\ln 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^0 = 1$.

$$\begin{aligned} & \ln : (0,\infty) \to (-\infty,\infty) \\ \Rightarrow \quad & e : (-\infty,\infty) \to (0,\infty) \end{aligned}$$

þ.e. $e^x > 0, \quad \forall x. \qquad e^0 = 1.$

Athugum nú hvernig diffra má e^x. Lítum fyrst á hvernig við diffrum andhverfur, (andhverfur sjá P.4 í TC).

7.1.2 Examples

Dæmi: $f(x) = x^2 = y$ og $g(y) = \sqrt{y}$ eru andhverf föll.

$$f'(x) = 2x \qquad g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2x}$$

þ.e. $g' = \frac{1}{f'}$.

7.2 Afleiða andhverfu falls

Ef $y = f(x)$ þar sem f er diffranlegt alls staðar í bili I og $f'(x)$ er **hvergi núll í** I. Þá er f^{-1} diffranlegt alls staðar í $f(I)$, og

$$\left.\frac{d\left(f^{-1}\right)}{dy}\right|_{y=f(a)} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}}$$

þ.e.

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$

7.2.1 Details

Setning: Ef $y = f(x)$ þar sem f er diffranlegt alls staðar í bili I og $f'(x)$ er **hvergi núll í** I. Þá er f^{-1} diffranlegt alls staðar í $f(I)$, og

$$\left.\frac{d\left(f^{-1}\right)}{dy}\right|_{y=f(a)} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}}$$

þ.e.

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$

Sönnun: $y = f(x), y_0 = f(x_0), x = f^{-1}(y), x_0 = f^{-1}(y_0)$.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Látum nú $y \to y_0$ (og þá um leið $x \to x_0$):

$$\left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y_0=f(x_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}}$$

Ath: Við gerðum ráð fyrir að $f'(x) \neq 0 \quad x \in I \quad$ (I bil)).

Því er f annað hvort vaxandi eða minnkandi fall. Jafnframt ef f er vaxandi ($f' > 0$) þá er f^{-1} vaxandi ($(f^{-1})' > 0$). Hliðstætt ef f er minnkandi.

Ath: Ef f er samfellt þá er graf $f(x)$ „ í einu lagi “ (ekki slitið í sundur). Graf f^{-1} fæst með því að spegla graf f um línuna $y = x$ og er því „ í einu lagi “ þ.e. f^{-1} er samfellt.

7.3 Skilgreining á e - eyða

□

7.3.1 Details

$$e = \ln^{-1} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln e = 1$$

(þetta skilgreinir töluna e).

7.4 Afleiða exp

Afleiða e^x:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

7.4.1 Details

Setning (Afleiða e^x):

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Sönnun:

$$\begin{aligned} y = e^x \quad &\Leftrightarrow \quad \ln y = x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x \end{aligned}$$

7.5 exp sem markgildi

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(sbr. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, P.3).

7.5.1 Details

Setning:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(sbr. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, P.3).

Sönnun: $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(1) = 1$; en

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f(1+x)-f(1)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) \\ &= \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1 \end{aligned}$$

(því ln er samfellt fall).

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

7.6 Almenna veldisvísisfallið

$a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

$$a^x = e^{x\ln a} \qquad \left(= e^{\ln a^x}\right)$$

7.6.1 Details

Skilgreining: $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

$$a^x = e^{x\ln a} \qquad \left(= e^{\ln a^x}\right)$$

Ath: Við höfum áður skilgreint a^n fyrir $n \in \mathbb{Q}$ (aðeins).

Getum nú skilgreint x^n fyrir öll $x \in \mathbb{R}^+$ og $n \in \mathbb{R}$:

$$x^n = e^{n\ln x}$$

($\Rightarrow \ln x^n = n \ln x \quad n \in \mathbb{R}$)

Þá er

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}e^{n\cdot\ln x} = n\cdot\frac{1}{x}\cdot e^{n\ln x} = \frac{n}{x}x^n = nx^{n-1}$$

Höfum því

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

fyrir $u(x) \geq 0$ diffranlegt fall af x og $n \in \mathbb{R}$ og

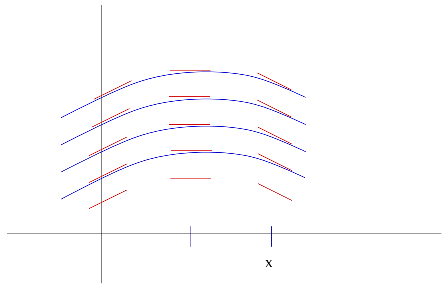
$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

fyrir $a > 0$ og u diffranlegt fall af x.

$$\left[\quad \frac{d}{dx}a^u = \frac{d}{dx}e^{u\ln a} = e^{u\ln a}\ln a\frac{du}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx} \quad\right]$$

7.7 Einfaldar diffurjöfnur

$$\frac{dy}{dx} = 2\cdot x\cdot y, \quad y(0) = 1$$



7.7.1 Details

Við erum nú í aðstöðu til að leysa einfaldar diffurjöfnur:

Við höfum þegar sé hvernig á að leysa

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

($y(x) = \int f(x)\,dx + C$) Ath: Þetta þýðir að hallatala lausnarferils er $f(\hat{x})$ þegar $x = \hat{x}$.

Ath: Fyrir fast x er hallatalan sú sama, **óháð** y.

Hvað ef $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$?
þ.e. hallatalan í punkti (x,y) er háð bæði x og y:

7.7.2 Examples

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x \cdot y, \quad y(0) = 1$$

Deilum í gegn með y:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x$$

Heildum m.t.t. x:

$$\begin{aligned} \int \tfrac{1}{y(x)} \tfrac{dy}{dx} dx &= \int 2x\,dx \\ \int \tfrac{1}{y} dy &= \int 2x\,dx \\ \Rightarrow \qquad \ln y + C_1 &= x^2 + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \ln y &= x^2 + C_3 \\ \Rightarrow \qquad y(x) &= e^{x^2+C_3} \\ \Rightarrow \qquad y(x) &= e^{C_3} e^{x^2} \\ \Rightarrow \qquad y(x) &= Ce^{x^2} \end{aligned}$$

$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = Ce^0 = C$

$$\Rightarrow \qquad y(x) = e^{x^2}$$

Ath: Þetta er sá ferill í $x-y$ plani sem hefur hallatölu $2x \cdot y$ í punktinum (x,y) og gengur í gegnum punktinn $(0,1)$.

7.8 Breiðbogaföll - skilgreining

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh x &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \sinh x &= \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \tanh x &= \tfrac{\sinh x}{\cosh x} = \tfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}}$$

7.8.1 Details

Skilgreining:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \sinh x &= \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \tanh x &= \tfrac{\sinh x}{\cosh x} = \tfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

Ath: Ef f er gefið fall þá er

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

þar sem

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{er jafnstætt}$$

og

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \qquad \text{er oddstætt}$$

því er

$$e^x = \underbrace{\cosh x}_{\text{jafnstæði hluti } e^x} + \underbrace{\sinh x}_{\text{oddstæði hluti } e^x}$$

<u>Ath:</u> $\cosh x$ er jafnstætt fall og $\sinh x$ er oddstætt.
<u>Ath:</u> Við höfðum áður sett

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad e^{-ix} &= \cos(-x) + i\sin(-x) \\ &= \cos x - i\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \cos x &= \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x &= \tfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

<u>Ath:</u> $\cos x$ er jafnstætt og $\sin x$ er oddstætt.

7.9 Diffrunarreglur

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cosh x) &= \sinh x \\ \frac{d}{dx}(\sinh x) &= \cosh x \\ \frac{d}{dx}\tanh x &= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}}$$

7.9.1 Details

Afleiður breiðbogafallanna

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cosh x) &= \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right) \\ &= \tfrac{e^x-e^{-x}}{2} \\ &= \sinh x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sinh x) &= \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right) \\ &= \tfrac{e^x+e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\tanh x &= \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{\sinh x}{\cosh x}\right) \\ &= \tfrac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= \tfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \tfrac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

því

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \tfrac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \tfrac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}) \\ &= \tfrac{1}{4}(2+2) = 1\end{aligned}$$

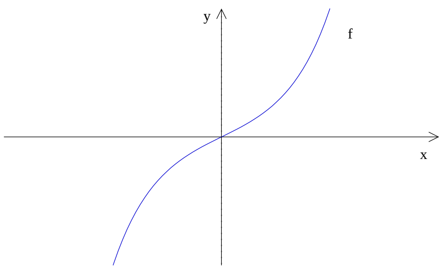
(sbr. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

7.10 Andhverfur breiðbogafallanna

$$\begin{aligned}\sinh: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \sinh^{-1}: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh: &\quad \mathbb{R}^+ \to [1,\infty) \\ \cosh^{-1}: &\quad [1,\infty) \to \mathbb{R}^+ \quad (=[0,\infty))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tanh: &\quad \mathbb{R} \to (-1,1) \\ \tanh^{-1}: &\quad (-1,1) \to \mathbb{R}\end{aligned}$$



7.10.1 Details

1. $\sinh x$ er vaxandi fall $\forall x$. ($(\sinh x)' = \cosh x > 0$). Því er andhverfan til:

$$\begin{aligned}\sinh: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \sinh^{-1}: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\end{aligned}$$

2. $\cosh x$ er jafnstætt. Takmörkum því cosh við $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}\cosh: &\quad \mathbb{R}^+ \to [1,\infty) \\ \cosh^{-1}: &\quad [1,\infty) \to \mathbb{R}^+ \quad (=[0,\infty))\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\tanh: &\quad \mathbb{R} \to (-1,1) \\ \tanh^{-1}: &\quad (-1,1) \to \mathbb{R}\end{aligned}$$

(sjá gröf á bls. 521-524 í TC).

7.11 Afleiður breiðbogafalla

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) &= \frac{1}{1-x^2}\end{aligned}}$$

7.11.1 Details

1.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sinh^{-1} x \\
\sinh(y(x)) &= x \\
\cosh y \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\
\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}
\end{aligned}
$$

(því $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$)

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \tanh^{-1} x \\
\tanh y(x) &= x \\
\operatorname{sech}^2 y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y}
\end{aligned}
$$

$$\left[\quad \operatorname{sech} y = \frac{1}{\cosh y}; \quad \tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x \quad (\text{sbr.} \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x) \quad \right]$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$$

Nú er

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

(sbr. $x = \cos u, y = \sin u$ eru hnit punkts, þá er (x,y) á einingahringnum $x^2 + y^2 = 1$ fyrir öll u).

Setjum $x = \cosh u$, $y = \sinh u$. Ef þetta eru hnit punkts þá er punkturinn (x,y) á breiðboganum („hýperbólunni“) $x^2 - y^2 = 1$ fyrir öll u.

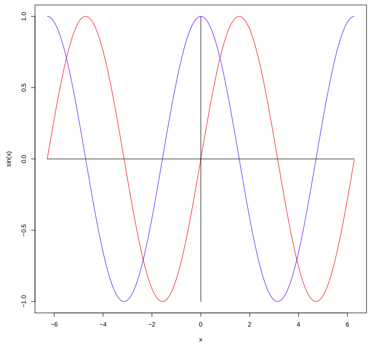
8 Andhverfur hornafalla og afleiður þeirra

8.1 Andhverfur hornafalla

$$\begin{array}{rccc} \sin: & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow & [-1,1] \\ \sin^{-1}: & [-1,1] & \rightarrow & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,\pi] & \rightarrow & [-1,1], \\ \cos^{-1}: & [-1,1] & \rightarrow & [0,\pi], \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tan: & \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) & \rightarrow & (-\infty,\infty) \\ \tan^{-1}: & (-\infty,\infty) & \rightarrow & \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$



Hornaföllin hafa ekki andhverfur nema þau séu takmörkuð við heppileg bil, enda eru þau augljóslega ekki eintæk annars (sbr blár ferill=cos, rauður=sin).

8.1.1 Details

Við skilgreinum $\arcsin, \arccos, \arctan$ (eða $\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$) sem andhverfur sin, cos og tan þar sem sin er takmarkað við $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ þ.e.

$$\begin{array}{rccc} \sin: & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow & [-1,1] \\ \sin^{-1}: & [-1,1] & \rightarrow & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \end{array}$$

cos er takmarkað við $0 \leq x \leq \pi$:

$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,\pi] & \rightarrow & [-1,1], \\ \cos^{-1}: & [-1,1] & \rightarrow & [0,\pi], \end{array}$$

og tan er takmarkað við $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{array}{rccc} \tan: & \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) & \rightarrow & (-\infty,\infty) \\ \tan^{-1}: & (-\infty,\infty) & \rightarrow & \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

8.1.2 Examples

Dæmi: Við getum vitanlega notað reiknivélar til að reikna ýmis gildi þessara andhverfu falla, en það er líka áhugavert að kanna almenna eiginleika þeirra og það er gert með því að skoða tilsvarandi eiginleika uphaflegu hornafallanna. Við þekkjum t.d. gildi sin í punktum eins og 0, $\pi/4$, π, $\pi/2$, 2π o.s.frv. Við þekkjum þá líka tilsvarandi á andhverfunum og getum þannig teiknað þær.

8.2 Afleiður andhverfra hornafalla

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1,1)$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1,1)$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in (-\infty,\infty)$$

8.2.1 Details

Helstu andhverfur hornafalla getum við diffrað, eina í einu.
Fyrst andhverfu sin:
Byrjum á að skrifa upp skilgreinginguna á anhverfu.

$$\begin{aligned} & y = \sin^{-1} x \qquad x \in (-1,1) \\ \Leftrightarrow \qquad & \sin y = x \qquad y \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Möndlum síðan aðeins

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx} \sin y &= \tfrac{d}{dx} x \\ \cos y \tfrac{dy}{dx} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} &= \tfrac{1}{\cos y} \quad (\text{sbr. } \tfrac{1}{\frac{d}{dy}\sin y}) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\ (y \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) &\quad \Rightarrow \quad \cos y > 0) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

og höfum þá fengið niðurstöðuna okkar:

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1,1)$$

Tökum næst andhverfu cos:

$$\begin{aligned} y = \cos^{-1} x &\qquad x \in (-1,1) \\ \cos y = x &\qquad y \in (0,\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sin y \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} &= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \\ (y \in (0,\pi) \quad \Rightarrow &\quad \sin y > 0) \end{aligned}$$

þ.e.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

þ.e.

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1,1)$$

Að lokum tökum við andhverfu tan fyrir. Byrjum á að nota skilgreininguna á andhverfu falli.

$$\begin{aligned} y = \tan^{-1} x &\qquad x \in (-\infty,\infty) \\ \tan y = x &\qquad y \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Diffrum þetta fall m.t.t. x:

$$\sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

og fáum strax niðurstöðuna:

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

Þessi síðasta andhverfa er dálítið mikilvæg því við notum hana síðar þegar við þurfum að finna fall sem hefur þennan diffurkvóta. Þá þurfum við að muna að þetta er afleiða $\tan^{-1}$.

8.2.2 Examples

Dæmi 8.1. Við getum nú notað þessar aðferðir til að diffra ansi flókin föll, t.d.

$$\frac{d}{dx}\arctan(e^x) = e^x \cdot \frac{1}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

Dæmi 8.2. Stundum má nota aðferðir við diffrun andhverfra falla til að leysa verkefni sem annars væru nánast óleysanleg. Ef við vitum t.d. að x og y liggja á ferli sem gefinn er með $xy = \arctan(y)$ þá má finna $\frac{dy}{dx}$ með því að umrita fyrst sambandið og skrifa $x = f^{-1}(y) = \frac{\arctan(y)}{y}$, diffra þetta andhverfa fall af y m.t.t. y og vinna sig þannig tilbaka og finna $f'(y)$ sem fall af y og x – án þess samt að þekkja form upphaflega fallsins $y = f(x)$.

8.3 Stofnföll

Stofnfall f er annað fall, F, þannig að $F' = f$.
Við táknum stofnfall f með $\int f\,dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$$

8.3.1 Details

Athugið stofnföllin:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$$

Ath:

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$$

$$\left[\begin{array}{ll} & \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta = x \\ \Rightarrow & \cos^{-1}x = \theta \end{array}\right.$$

en

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \sin^{-1}x \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$$

þ.e.

$$\left.\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x \qquad \right]$$

9 Regla l'Hôpital

9.1 l'Hôpital

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ef } f(a) = g(a) = 0; \quad f'(a) \text{ og } g'(a) \text{ eru til og } g'(a) \neq 0, \text{ þá er} \\ \displaystyle \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{array}}$$

9.1.1 Details

Skoðum nú hvernig finna má markgildi

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

þar sem $f(a) = g(a) = 0$.
þ.e. „$\frac{0}{0}$ markgildi“.

Setning: (l'Hôpital 1) $f(a) = g(a) = 0$; $f'(a)$ og $g'(a)$ eru til og $g'(a) \neq 0$. Þá er

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Sönnun:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\tfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)}{\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)} = \frac{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)}{\lim_{x\to a}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)} \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{aligned}$$

9.1.2 Examples

Dæmi:

1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^3-x-3} = \frac{3x^2\big|_{x=1}}{12x^2-1\big|_{x=1}} = \frac{3}{12-1} = \frac{3}{11}$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=0}}{1} = 1$$

9.2 l'Hôpital aftur

Það má nota aðferðina tvisvar...
$f(a) = g(a) = 0$; $f(x)$ og $g(x)$ eru diffranleg á opnu bili I þ.a. $a \in I$. Jafnframt er $g'(x) \neq 0$ á I ef $x \neq a$ en $f'(a) = g'(a) = 0$.
Þá gildir:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

svo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}.$$

ef hægri hliðin er til.

9.2.1 Details

Lítum á tilvikið þegar $f(a) = g(a) = 0$; $f(x)$ og $g(x)$ eru diffranleg á opnu bili I þ.a. $a \in I$ og $f'(a) = g'(a) = 0$. Hér er ekki hægt að nota óbreytt fyrri aðferð, en hins vegar má reyna að diffra aftur.
Ef jafnframt gildir $g'(x) \neq 0$ á I ef $x \neq a$, þá fæst:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

og ef má diffra aftur og $g''(a) \neq 0$ fæst því

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

9.2.2 Examples

Dæmi:

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

   Athugið að aðferð l'Hopital gefur hér

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

   en það er niðurstaða sem við höfum áður séð).

2. $$\begin{array}{rlr} & \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} & \frac{0}{0} \\ = & \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}{2x} & \text{aftur} \quad \frac{0}{0} \\ = & \lim_{x \to 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}}{2} = -\frac{1}{8} & \end{array}$$

9.3 Meira um l'Hopital

Áfram gildir:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ef

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

og $g'(x) \neq 0$ í grennd um $x = a$.

9.3.1 Details

Ýmis afbrigði eru til af l'Hopital reglunni, t.d. þar sem $\frac{\infty}{\infty}$ kemur fram ef tekið er markgildi ofan striks og neðan.

Áfram gildir:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ef

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

og $g'(x) \neq 0$ í grennd um $x = a$.

9.3.2 Examples

Dæmi 1: (Ath: a má vera ∞)
Látum $n > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{nx^n} = 0$$

þ.e.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \forall n > 0$$

M.ö.o. $\ln x$ vex hægar en x^n fyrir hvaða $n > 0$ sem er, t.d. $n = \frac{1}{100}$.

Við getum átt við markgildi sem gefa $1^\infty, 0^0, \infty^0$ með því að taka logra.

Notum (ath. a má vera ∞)

$$\lim_{x\to a} \ln f(x) = L \qquad \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to a} \ln f(x)} = e^L,$$

því e^x er samfellt fall.

Dæmi 2:

$$\lim_{x\to 0} x^x \qquad (0^0)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \ln x^x &= \lim_{x\to 0} x \ln x \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad (\text{sem er } \tfrac{-\infty}{\infty}) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{-x^2}{x}\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^x} = e^0 = 1$$