Vaxandi og minnkandi föll; afleiðupróf

math104-3calc Diffrun og afleiður

Kjartan G. Magnusson o.m.fl.

February 8, 2016

Vaxandi og minnkandi föll

Skilgreining:

- f er **vaxandi** í bili I ef
$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2)$$
gildir fyrir öll x_1, x_2 í I.
- f er **minnkandi** í I ef
$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2)$$
gildir fyrir öll x_1, x_2 í I.

Um afleiður og vaxandi/minnkandi föll

Gerum ráð fyrir að $f(x)$ sé samfellt á $[a, b]$ og diffranlegt í (a, b).

$$
\begin{array}{lcll}
f'(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b) & \Rightarrow & f \quad \text{vaxandi á} & [a, b] \\
f'(x) < 0, \quad \forall x \in (a, b) & \Rightarrow & f \quad \text{minnkandi á} & [a, b]
\end{array}
$$

[G.r.f. að $f'(x) > 0$, $x_1, x_2 \in [a, b]$, g.r.f. að $x_1 < x_2$. Skv. MVT er til $c \in [x_1, x_2]$ þ.a.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$$

Því er $f(x_2) - f(x_1) > 0$ og f því vaxandi ef $f'(x) > 0$.

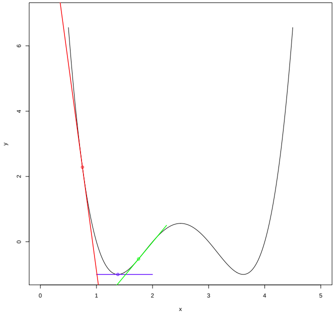
Ef $f'(x) < 0$ þá fæst

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0 \quad \text{og því er } f(x_1) > f(x_2)$$]

Afleiðupróf-lággildi

(c er krítískur punktur, þ.e. $f'(c) = 0$ eða ekki til).

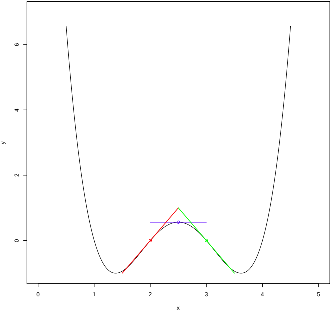
Staðbundið lággildi í c ef formerki f' breytist frá „$-$“ í „$+$“ í c.



Afleiðupróf-hágildi

c er krítískur punktur, þ.e. $f'(c) = 0$ eða ekki til.

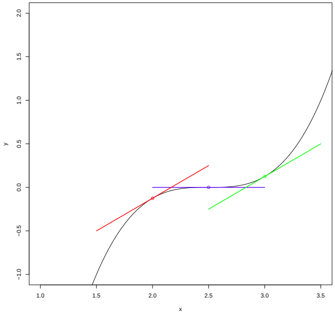
Staðbundið hágildi í c ef f' breytist frá „$+$“ í „$-$“ í c.



Afleiðupróf

c er krítískur punktur, þ.e. $f'(c) = 0$ eða ekki til.

Hvorki lág- né hágildi ef f' hefur sama formerki báðum megin við c.



SI27

Látum f vera diffranlegt fall. Graf $y = f(x)$ er

- **Hvelft upp** (concave up) á bili I ef $f'(x)$ er vaxandi fall á I.
- **Hvelft niður** (concave down) á bili I ef $f'(x)$ er minnkandi fall á I.

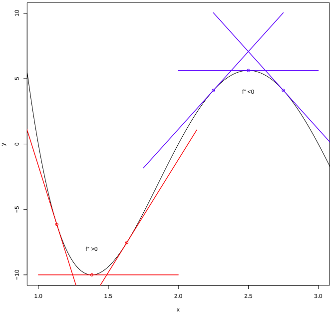
Til einföldunar getum við sagt að:

- hvelft upp = kúpt
- hvelft niður = hvelft

2. afleiðupróf

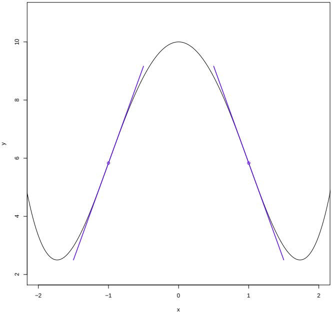
G.r.f. að f'' sé til

- Grafið $y = f(x)$ er hvelft upp (kúpt) þar sem $f'' > 0$
- Grafið $y = f(x)$ er hvelft niður (hvelft) þar sem $f'' < 0$.



Beygjuskil

Punktur á grafi þar sem grafið breytir um sveigju (frá hvelft upp í hvelft niður eða öfugt) kallast beygjuskil (point of inflection).



Ath: Ef f'' er til þá er $f'' = 0$ í beygjuskilum.

Slide number 32

Þar sem fallið tekur hágildi er graf fallsins hvelft niður,en hvelft upp þar sem fallið tekur lággildi.

- Ef $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, þá hefur fallið $f(x)$ (staðbundið) hágildi í $x = c$.
- Ef $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, þá hefur fallið $f(x)$ (staðbundið) lággildi í $x = c$.

Dæmi

Höfum hringlaga skífu. Klippum burt hringgeira og búum til keilu. Hversu stóran geira á að klippa burt til að rúmmál keilunnar verði sem mest?

Við uppsetningu verkefna þarf að skilgreina breytur, finna fallið sem á að há- eða lágmarka og hugsanlega nota viðbótarupplýsingar til að losa sig við breytur þ.a. há-lágmörkunarfallið sé einungis fall af einni breytu. Svo má reyna að diffra, en athuga þarf formengi og hvort fallið sé skilgreint alls staðar eins og með þarf.