Andhverfur hornafalla og afleiður þeirra

math104-3calc Diffrun og afleiður

Kjartan G. Magnusson o.m.fl.

February 8, 2016

Andhverfur hornafalla

$$\begin{array}{rccc} \sin: & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ \sin^{-1}: & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cos: & [0,\pi] & \to & [-1,1], \\ \cos^{-1}: & [-1,1] & \to & [0,\pi], \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tan: & \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) & \to & (-\infty,\infty) \\ \tan^{-1}: & (-\infty,\infty) & \to & \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

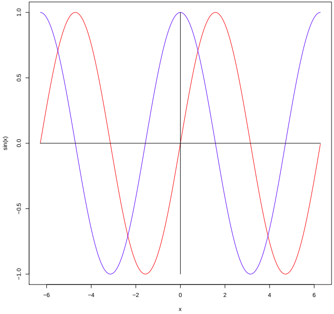

Figure : Hornaföllin hafa ekki andhverfur nema þau séu takmörkuð við heppileg bil, enda eru þau augljóslega ekki eintæk annars (sbr blár ferill=cos, rauður=sin).

Afleiður andhverfra hornafalla

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1,1)$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1,1)$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in (-\infty,\infty)$$

Dæmi: Stundum má nota aðferðir við diffrun andhverfra falla til að leysa verkefni sem annars væru nánast óleysanleg. Ef við vitum t.d. að x og y liggja á ferli sem gefinn er með $xy = \arctan(y)$ þá má finna $\frac{dy}{dx}$ með því að umrita fyrst sambandið og skrifa $x = f^{-1}(y) = \frac{\arctan(y)}{y}$, diffra þetta andhverfa fall af y m.t.t. y og vinna sig þannig tilbaka og finna $f'(x)$ sem fall af y og x – án þess samt að þekkja form upphaflega fallsins $y = f(x)$.

Stofnföll

Stofnfall f er annað fall, F, þannig að $F' = f$.
Við táknum stofnfall f með $\int f\, dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C = \sin^{-1} x + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x + C$$