math121-1-linprog Introduction to linear programming

Gunnar Stefansson

September 1, 2016

Contents

1 Lines and half-planes

1.1 Lines

Need to be able to draw all sorts of lines

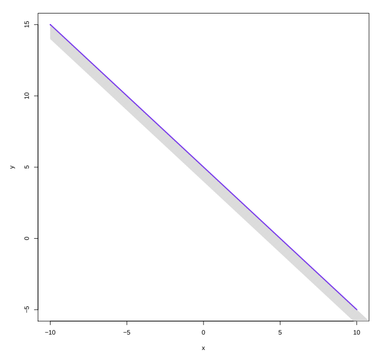
$$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 3y & = & 12 \\ x & + & 2y & = & 4 \\ 3x & + & y & = & 3 \end{array}$$

Recall that the line $ax+by=c$ has $\mathbf{n}=(a,b)'$ as a normal vector.

1.2 Lines and half-planes

A straight line consists of the points (x,y) which satisfy $ax+by=c$.
The equation splits the plane into two half-planes, one on each side of the line.
The half-planes correspond to the conditions $ax+by<c$ and $ax+by>c$.
One is usually interested in viewing a half-plane which includes the line, e.g.

$$ax+by\leq c$$



1.2.1 Details

A straight line consists of the points (x,y) which satisfy $ax+by=c$.

The equation splits the plane into two half-planes, one on each side of the line.

The half-planes correspond to the conditions

$$ax+by<c$$

and

$$ax+by>c.$$

One is usually interested in viewing a half-plane which includes the line, e.g.

$$ax+by\leq c$$

This region can be found by noting that the value of $ax+by$ increases in the direction of the normal vector and is therefore larger than c on the side of the line into which the vector points, but is smaller on the other side.

1.3 Bounded and unbounded regions

In most cases one is interested in conditions of the form

$$ax + by \leq c$$

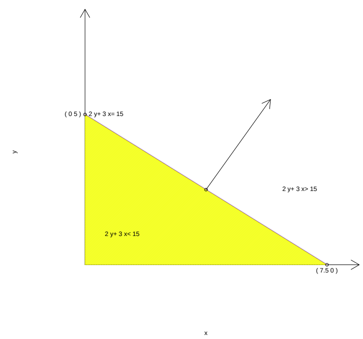
or

$$ax + by \geq c$$

with

$$x, y \geq 0$$

These regions may or may not be bounded.



1.4 Complicated regions

$$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 3y & \leq & 12 \\ x & + & 2y & \leq & 4 \\ 3x & + & y & \geq & 3 \\ & & x & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

1.4.1 Examples

Example: The region can be quite complicated, e.g.

$$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 3y & \leq & 12 \\ x & + & 2y & \leq & 4 \\ 3x & + & y & \geq & 3 \\ & & x & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

2 Lines as functions of two variables

2.1 The linear objective function

Commonly income, profit or cost are a linear combination of control variables.
$z = ax + by$
Here, z is a function of two variables, x and y. The constants a and b determine the form of the relationship.
The goal will be to find the minimum or maximum of such an objective function, but with some constraints.

2.1.1 Details

Commonly income, profit or cost are a linear combination of control variables.

$z = ax + by$

Here, z is a function of two variables, x and y. The constants a and b determine the form of the relationship.

If a is the unit price of a product A and b is the unit price of product B, then the cost of purchasing x units of A and y units of B will be $z = ax + by$.

2.1.2 Examples

Example: Suppose chemical A costs 41 dollars per kg and chemical B costs 13 dollars per kg. Then the cost of purchasing x kg og chemical A is $41x$ and the cost of purchasing y kg of chemical B is $13y$. The total cost of this purchase will be $z = 41x + 13y$.

2.2 The line as a contour

A straight line: $ax + by = c$
A function: $z = ax + by$ (or $z = f(x,y)$ where f is defined by $f(x,y) = ax + by$ for real numbers x,y)
A **contour line** is a set of points where a function takes a constant value:
$ax + by = c$ is a contour line for the function $z = ax + by$.

2.2.1 Details

A straight line: $ax + by = c$

A function: $z = ax + by$ (or $z = f(x,y)$ where f is defined by $f(x,y) = ax + by$ for real numbers x,y)

A **contour line** is a set of points where a function takes a constant value:

$ax + by = c$ is a contour line for the function $z = ax + by$.

2.2.2 Examples

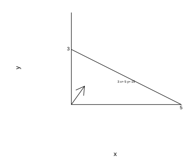
Example: If the unit cost of material A is 3$ and the unit cost of material B is 4$ then the cost of purchasing x units of A and y units of B will be $3x+4y$. The set of all (x,y) values on the line

$$3x+4y=25$$

is the set of (x,y)-units, which give a total cost of 25$.

2.3 Moving with the normal vector

If $z=ax+by$ and $z_0=ax_0+by_0$, a move from (x_0,y_0), in the direction of the normal vector (a,b) for the line $ax+by=z_0$ will lead to an increase in the value of z:
$(x,y)=(x_0,y_0)+d(a,b)$ with $d>0$ implies $z>z_0$.



3 Linear programming

3.1 Linear programming

Optimization projects are quite common, i.e. one needs to find a best numerical solution.
This is usually either a request for finding a maximum or a minimum and sometimes the function to be optimized is linear.
Sometimes one has bounds on the solutions and these are sometimes linear.

3.1.1 Details

Linear programming is used to find optimal solutions to problems where both the function to be optimized is linear, as well as any constraints.

Typically the objective function is either cost or profit and the constraints may be due to resources limitations.

3.1.2 Examples

Example: Suppose we want to make animal feed as cheaply as possible. We have two pre-mixed feeds which we can use. Mix A, costs 10 kr/kg, but mix B costs 20 kr/kg.

The two mixes are different so the energy content of mix A has 500 Kcal but B has 4000 Kcal/kg. Mix A has a lot of protein, 200g per kg of mix, B has 100g per kg.

A farmer wants to combine the two feeds and minimize costs, but still fulfill the needs of the animals. They need at least 2000 Kcal/day and 400g of protein per day.

What is the optimal mix of the two feeds?

3.2 Linear objective function

Want to maximize a function of e.g. 2 variables:

$$z = ax + by$$

but there may be many more variables.
The objective function is a constant, $z = z_0$, if $ax + by = z_0 \Rightarrow$ on a straight line.
The objective function increases in the direction of the normal vector, $\mathbf{n} = (a,b)'$.

3.2.1 Details

A linear function of two variables is of the form

$$z = ax + by$$

Such a function can take arbitrarily large or small values (if a and b are not both zero) unless some constraints are put on x and y.

Consider the function z (which we might want to write $z(x,y)$ or $z = f(x,y)$). The first thing to note is that this function takes on a constant value, $z = z_0$ on a straight line in x and y:

$$z = z_0 \Leftrightarrow ax + by = z_0.$$

Recall that the function value increases in the direction of the normal vector, $\mathbf{n} = (a,b)'$.

3.2.2 Examples

Example: Suppose we want to produce two products, A and B where the profit is 3kr of each unit of product A but 2 kr per unit of product B. If we produce a total of x units of A and y units of B then the total profits are 3x+2y.

3.3 The solution set

The set may be empty
The set may be unbounded
There may be a unique solution to the problem

3.3.1 Details

Note that a linear programming problem may not have an optimal solution.

The solution set may be empty and it may be possible for z to increase (or decrease) without bound.

3.4 The general form

In matrix and vector notation:

$$min_x c'x$$

w.r.t.

$$Ax \leq b$$

3.4.1 Details

We can write the linear optimization problem in matrix notation as follows:

$$min_x c'x$$

w.r.t.

$$Ax \leq b$$

To do this one may need to turn around some equations (i.e. multiply by -1).

3.5 Shadow values

3.5.1 Details

At the optimum, the value of the objective functions (z^*) of a linear programming problem is attained with some constraints aactive, i.e. $\mathbf{a}_i'\mathbf{x}^* = b_i$, but others may not be, i.e. $\mathbf{a}_i'\mathbf{x}^* < b_i$.

One can view the optimum value of the objective function as a function of these constraints $z^* = f(b_1, b_2, \ldots)$.

When we relax the constraints, the solution can only improve.

The **shadow value** of a constraint is the answer to "how much does z^* increase if we relax $\mathbf{a}_i'\mathbf{x}^* \leq b_i$ by one unit".

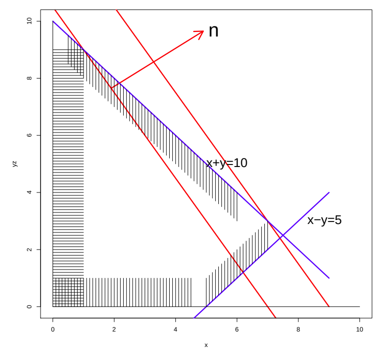
We can write this as $\frac{\partial z^*}{\partial b_i}$.

3.6 A visual solution

$$min_x c'x$$

w.r.t.

$$Ax \leq b$$



3.6.1 Details

If there are only two variable one can draw all the constraints, find the set of admissible solutions and inspect visually how the function changes within the solution set.

3.6.2 Examples

Dæmi: Látum x tákna magn (kg) af fóðurgerð A og y magn af gerð B sem á að nota í dagsskammt.

Úr því fóðurgerð A kostar 10 kr/kg og B kostar 20 kr/kg er verð blöndunnar $z = 10x + 20y$.

Orkuinnihald dagsskammtsins byggist á því að orkuinnihald A er 500 kaloríur (Kcal) á kg og í B eru 4000 Kcal/kg þannig að dagsskammturinn er með $500x + 4000y$.

Í A eru 200g prótíns á hvert kg, en í B eru 100g/kg, þannig að alls eru $200x + 100y$ í skammtinum.

Til að lágmarka kostnað en ná a.m.k. 2000 Kcal/dag og 400g af prótíni á dag viljum við finna minnsta mögulega gildi á $z = 10x + 20y$ þó þannig að $500x + 4000y \geq 2000$ og $200x + 100y \geq 400$.

Oftast er þetta orðað þannig:

$$\begin{aligned} min\ z &= 10x + 20y \\ \text{m.t.t.} & \\ 500x + 4000y &\geq 2000 \\ 200x + 100y &\geq 400 \end{aligned}$$

GeoGebra is an excellent tool to draw the figures `https://www.youtube.com/watch?v=qjDG940t-PA&feature=relmfu`

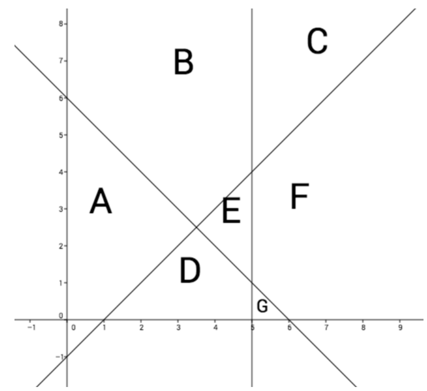
Example (from a 2004 exam in Iceland) Draw a figure and use it to find the values, x and y, which minimize $z = 2x - y$ with respect to

$$\begin{aligned} 4x + 3y &\leq 12 \\ -x + y &\leq 2 \\ x + 2y &\geq 2 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Justify the answer.

3.7 An example

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max z = & 3x & - & 4y & & \\
w.r.t. & x & - & y & \leq & 1 \\
 & x & & & \leq & 5 \\
 & x & + & y & \leq & 6 \\
 & & & x & \geq & 0 \\
 & & & y & \geq & 0
\end{array}
$$



3.8 Orðalisti

3.8.1 Details

Enska	Enskt samheiti eða skammstöfun	Íslenska	Ísl. samheiti	Skýring
Linear programming		Línuleg bestun		

3.8.2 Handout

Línuleg algebra og tölfræði (09.10.16)

Vikublað 12

Efni og efnistök í vikum 12-15 Farið hefur verið í línuleg líkön, þ.e. aðhvarfsgreiningu, fervikagreiningu og samvikagreiningu auk þess sem fjallað hefur verið um, hvernig meta má gæði línulegs líkans.

Lokið er línulegri bestun.

Í næstu fyrirlestrum og dæmatímum verða sýnd nokkur dæmi um R keyrslur.

Næst verður hafist handa við eigingildi og síðan meginþáttagreiningu. Eigingildi og eiginvigra má finna í köflum 2 og 7 í Anton en einnig á vefsíðum. Meginþáttagreining er á vefsíðum.

Auk R dæma verða í næstu dæmatímum tekin fyrir reiknuð dæmi en eigingildi og eiginvigrar verða efni dæmatíma síðustu vikunnar.

Í lok misseris verður upprifjun í fyrirlestrum. Ekki verður fyrirlestur á föstudaginn síðasta nema sérstaklega verði um það beðið.

Dæmi fyrir dæmatíma

Línuleg bestun

Nokkur dæmi um línulega bestun

1: Teiknið mynd og finnið gildin x og y sem lágmarka $z = 3x + 2y$ m.t.t.

$$\begin{aligned} 3x - y &\geq -5 \\ -x + y &\geq 1 \\ 2x + 4y &\geq 12 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

2: Leysið eftirfarandi í R eða Excel: Lágmarka skal $w = 3x + 2y - z$ með tilliti til

$$\begin{aligned} 3x - y &\geq -5 \\ -x + y &\geq 1 \\ 2x + 4y + z &\geq 12 \\ y + z &\leq 20 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

3: Teiknið mynd og finnið gildin x og y sem lágmarka $z = 3x + 2y$ m.t.t.

$$\begin{aligned} 3x - y &\geq -5 \\ -x + y &\leq 1 \\ 2x + 4y &\geq 12 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

(athugið að ójöfnumerkin snúa ekki öll eins).

Línuleg bestun úr Anton

11.3: 1, 4

2: Leysið eftirfarandi í R eða Excel: Lágmarka skal $w = 3x + 2y - z$ með tilliti til

$$\begin{aligned} 3x - y &\geq -5 \\ -x + y &\leq 1 \\ 2x + 4y + z &\geq 12 \\ y + z &\leq 20 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

Eigingildi og eiginvigrar

Dæmi úr efni um eigingildi og eiginvigra

1: Finnið eigingildi fylkisins A:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2: Lýsið eiginvigrunum sem tilsvara eigingildunum í dæmi 1 og teiknið þá (athugið að ef $\mathbf{x} = (x,y)'$ er eiginvigur, þá er $k\mathbf{x}$ líka eiginvigur og því má velja viðbótarskilyrði eins og t.d. taka $||\mathbf{x}|| = 1$ eða $y = 1$ (nema ef svo vill til að eiginvigurinn er einmitt með $y = 0$)).

3: Finnið eiginvigra og eigingildi fylkisins

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

4: Finnið eiginvigra og eigingildi fylkisins

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

5: Finnið eiginvigra og eigingildi fylkisins

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Eigingildi og eiginvigrar úr Anton

2.3: 14, 15

7.1: 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10

Meginþáttagreining

Gögn um þorsk

Taflan sýnir lengd, kyn, kynþroska, aldur, óslægða og slægða þyngd auk lifrarþyngdar 25 þorska. Finnið í hverju tilviki fyrsta meginþáttinn.

le	ky	kt	aldur	osl	sl	li
87	2	2	9	5620	4646	284
38	1	1	4	469	408	23
37	1	1	3	414	368	19
33	2	1	3	294	262	11
75	1	1	9	3520	3026	142
66	2	1	5	2545	2106	200
62	2	1	5	2519	2040	293
66	1	2	5	2735	2248	236
62	1	1	5	2152	1815	236
68	2	2	6	3008	2468	264
56	1	1	5	1760	1467	114
59	2	1	5	2012	1724	206
70	2	2	6	3304	2466	272
55	1	1	4	1560	1340	108
48	1	1	4	1019	906	75
60	1	1	4	2006	1665	148
60	2	1	5	2079	1872	149
65	1	1	5	2970	2443	298
60	2	1	5	2103	1753	217
69	1	2	5	2951	2434	259
57	2	1	5	1615	1370	138
59	1	1	5	2009	1722	144
67	2	1	6	2823	2312	185
60	1	1	5	1948	1678	127
70	2	2	6	2961	2415	234

Dæmi 1 Notið samdreifnifylki slægðrar og óslægðrar þyngdar.

Dæmi 2 Notið fylgnistuðlafylki þriggja þyngdarmælinga.

Dæmi 3 Smíðið fylgnistuðlafylki allra mælinganna og gerið meginþáttagreiningu.

Dæmi 4

Gerðar eru mælingar á tveimur breytum, x og y. Í ljós kemur að fylgni þeirra er $r = 0.75$. Setjið upp fylgnistuðlafylki mælinganna (R) og gerið meginþáttagreiningu byggt á því (m.ö.o. finnið fyrsta og annan meginþáttinn og tilsvarandi breytileika, þ.e. eiginvigra og eigingildi R).

3.9 An example

4 Computer programs for linear programming

4.1 Excel og R geta framkvæmt línulega bestun

4.1.1 Details

Einfalt er að framkvæma lágmarkanir og hámarkanir í Excel. Til þess er notað forritið **solver**, sem er að finna í Excel undir “Tools”.

Jafneinfalt er að nota R. Verkefnið er sett upp á fylkjaformi og forritið **simplex** notað.

4.2 Uppsetning á breytum í Excel

4.2.1 Details

Einfaldast er að setja upp hlið við hlið þær breytur sem á að finna lágmark yfir, t.d. taka frá reiti A2:B2 ef á að lágmarka eitthvert fall af tveimur breytum, x, y, og nota þá A1:B1 undir nöfn breytanna. Ef lágmarka skal fall af þremur breytum, x, y, z, er einfaldast að setja fyrst inn einhver gildi á x, y, z inn í reitina A2:C2, o.s.frv.

4.3 Uppsetning á markfalli í Excel

4.3.1 Details

Við línulega bestun er reynt að finna lágmark (eða hámark) á línulegu falli í breytunum, sem er þá á forminu: $ax + by + cx$ fyrir 3 breytur. Ef við hugsum okkur að breyturnar séu í vigrinum $\mathbf{x}$ og margföldunarstuðlarnir séu í $\mathbf{c}$, þá má skrifa þetta sem $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$, þ.e. innfeldi vigranna.

4.4 Uppsetning á skorðum í Excel

4.4.1 Details

Hliðarskilyrði við línulega bestun eru af gerðunum $2x+3y \leq 0$ eða $x-y+z \geq 2$, en raunar má ætíð skipta um formerki og snúa jafnaðarmerkinu þannig að skilyrðin eru almennt af gerðinni $a_j \cdot x \geq b_j$, fyrir jöfnuskilyrðin $j = 1, \cdots, k$.

Þessum jöfnuskilyrðum má lýsa með margöldun með fylki:

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \tag{5}$$

4.5 Línuleg bestun í R

R: Notum simplex
ATH: Hægri hliðar þurfa að vera ≥ 0.

4.6 Breytuskipti

Þurfum oft að vera eingöngu með $x_i \geq 0$
Getum þá þurft að skipta út breytum, t.d. $y = u - v$ þar sem $u,\ v \geq 0$.

4.6.1 Details

Oft þarf að gera sérstakar ráðstafanir til að umsnúa ójöfnum, hafa breytuskipti og álíka til að koma verkefninu í það form sem tilteknir pakkar þurfa að hafa.

4.7 Orðalisti

4.7.1 Details

Enska	Enskt samheiti eða skammstöfun	Íslenska	Ísl. samheiti	Skýring
Linear programming		Línuleg bestun		

4.7.2 Handout

Leiðbeiningar um notkun Excel við linulega bestun

Leysið eftirfarandi í Excel: Lágmarka skal $w = 5x + 7y - 2z$ með tilliti til

$$\begin{aligned} 3x - 2y &\geq 1 \\ -2x + y &\geq 2 \\ x + y + z &\geq 10 \\ 2y + z &\leq 20 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

Þetta má setja upp á fylkjaformi sem $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ ef við setjum

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(athugið, hvernig skipt var um formerki í gegnum eina jöfnuna til að halda $\geq$ alls staðar !).

Línulega bestunarvandamálið má því setja upp þannig í Excel:

Setjið merkingar í línu 1, A1, B1, $\cdots$ $(x, y, \cdots)$.

Setjið einhver ágiskuð gildi á breytunum í línu 2, þ.e. A2, B2, $\cdots$. Í ofangreindu dæmi má setja $x = 1, y = 1, z = 1$ í reiti A2:C2.

Þá þarf að setja **c**-vigurinn í næstu línu fyrir neðan, þ.e. línu 3, í reiti A3, B3, $\cdots$. Í dæminu fara tölurnar 3, 7, -2 í reitina A3:C3. Reiknið gildi innfeldisins $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ með formúlu í næsta reit til hægri við c-vigurinn. Í dæminu kemur jafnan “=A2*A3+B2*B3+C2*C3” í reit D3. Fyrir stærri eða minni dæmi hliðrast þetta til.

Setjið þvínæst fylkið **A** þar fyrir neðan, þ.e. frá og með línu 4. Í dæminu er þetta gert þannig að tölurnar lenda á reitum A4:C10. Reiknið gildin sem tilsvara hliðarskilyrðum, þ.e. fylkjamargfeldið **Ax** (þar sem **x** er skoðað sem nx1 fylki) í dálkinn við hliðina á **A**-fylkinu. Þetta má gera með því að byrja á að setja inn rétta jöfnu fyrir fyrsta hliðarskilyrðið til hægri við fyrstu línu í **A**. Þar er notað dollar-merkið á tilvísanir í **x** sem er í efstu línu. Þannig verður hægt að grípa í handfangið neðst til hægri í reitnum og draga niður til að reikna gildin fyrir hinar línurnar.

Að lokum þarf að setja inn sjálf gildin á b-vigrinum til hægri við reiknuðu gildin á **Ax**.

Nú eru öll gögn og jöfnur dæmisins komin inn í Excel. Eftir er að segja “solver” frá því, hvaða reit þarf að lágmarka eða hámarka og hvar hliðarskilyrðin eru geymd. Næst er því að setja “solver” af stað (Tools-Solver).

Í valmyndinni fyrir solver þarf efst að setja tilvísun í, hvaða reit á að hámarka eða lágmarka og síðan að tiltaka, hvort á að finna lággildi eða hágildi.

Þar fyrir neðan er talið upp hvert einasta skilyrði. Setjið þar inn (með “Add”) rétta tilvísun í að hver reiknaður reitur þarf að vera stærri eða minni en tilsvarandi gildi í **b**.

Að lokum er ýtt á “Solve”.

VIÐVÖRUN: Solver virkar yfirleitt ekki nema notaður sé punktur fyrir aukastafi og ekkert (þ.e. eyða, bil) fyrir aðskilnað þúsunda.