Fylki

math121-1linalg Hagnýt línuleg algebra og rúmfræði

Gunnar Stefánsson, Rögnvaldur G. Möller o.fl.

October 30, 2016

Fylki

Fylki er tafla af tölum. Tölurnar nefnast stök fylkisins.
Einfalt fylki er 2×2 fylkið með 2 dálkum og 2 röðum:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Efni úr Anton: 1.2

Dæmi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [1, 2, 3, 4], \quad [2]$$

Almennt fylki

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ef $n = m$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tákn: $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$.

Hornalína: $a_{11}, \dots, a_{nn}$

Samanburður og samlagning fylkja

Skilgreining: Tvö fylki, $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru eins, þ.e. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ þoþaa af sömu stærð og sömu stök
Ef sama stærð: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ þar sem stak (i, j) er $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
Ef k er tala setjum við $k\mathbf{A} = \mathbf{D}$ þar sem $d_{ij} = ka_{ij}$.

Dæmi: Lítum á fylkin $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$, $C = [1\ 2]$

Þá er $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ ekki til, því þessi fylki eru ekki jafn stór.
Hins vegar getum við lagt saman fylkin $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Við getum einnig margfaldað $\mathbf{A}$ með tölu, t.d.

$$2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Bylt fylki

Ef $\mathbf{A} = (a_{ij})$ er fylki skilgreinum við **bylta** fylkið, $\mathbf{A}'$ sem það fylki sem inniheldur stökin a_{ji}, þ.e.a.s. stak í línu j og dálki i er úr línu i og dálki j í upphaflega fylkinu.

Margföldun fylkja

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 1 & 3\cdot 2 + 4\cdot 3 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 1 & 5\cdot 2 + 6\cdot 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 18 \\ 11 & 28 \end{bmatrix}}_{3\times 2}$$

Skilgreining: **A** er $m \times r$, **B** er $r \times n \Rightarrow$ skilgreinum **AB** fylki þar sem stak í röð i og dálki j er reiknað með því að para saman stökin í röð i í **A** og dálki j í **B**, margfalda saman hvert par og leggja svo saman.

Meira um fylkjamargföldun

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ i \\ \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr}
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & & & j & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn}
\end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1m} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ir} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{rj} & \cdots & c_{mn}
\end{bmatrix}
$$

Ath: Aðeins skilgreint ef fjöldi dálka í **A**=fjöldi lína í **B**. Fáum $m \times n$ fylki.
Ath: Ef skrifa má $(\mathbf{A})_{ik} = a_{ik}$, $(\mathbf{B})_{kj} = b_{kj}$ fyrir $i = 1, \ldots, m$ $k = 1, \ldots, r$ $j = 1, \ldots, n$ þá er $(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ fyrir $i = 1, \ldots m \quad j = 1, \ldots, n$

Margfeldi fylkis og vigurs: Hneppi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

þá má skrifa jöfnuhneppi þannig

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Hér er

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Eiginleikar fylkjaaðgerða

Setning: Látum $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ vera fylki þannig að unnt sé að framkvæma aðgerðirnar í hverju tilviki, og a, b, c vera tölur:

- (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- (b) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- (c) $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$
- (d) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$
- (e) $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{A}$
- (f) $\mathbf{c}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{c}\mathbf{A} + \mathbf{c}\mathbf{B}$
- (g) $c(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (c\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(c\mathbf{B})$
- (h) $a(b\mathbf{C}) = (ab)\mathbf{C}$

Sönnun:
(a)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} &= (\mathbf{A})_{ij} + (\mathbf{B})_{ij} \\
&= (\mathbf{B})_{ij} + (\mathbf{A})_{ij} \\
&= (\mathbf{B} + \mathbf{A})_{ij}
\end{aligned}$$

Víxlni gildir ekki

Ath: $\mathbf{AB}$ er yfirleitt ekki sama og $\mathbf{BA}$! [og oft ekki bæði skilgreind]

Einingarfylki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots$$

Þessi fylki eru þannig að ef $\mathbf{I}_n$ er $n \times n$ einingarfylki og $\mathbf{A}$ er $m \times n$ fylki, þá gildir $\mathbf{AI}_n = \mathbf{A}$. Einnig gildir $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Efni úr Anton: 1.4 (sleppa 1.5, 1.6. Taka 1.7 lauslega), 2.1 (sleppa 2.2-2.4).

Andhverfa fylkis

Skilgreining: Ef $\mathbf{A}$ er $n \times n$ fylki og $\mathbf{B}$ er jafnstórt fylki sem er þannig að $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, þá er $\mathbf{B}$ nefnt *andhverfa* $\mathbf{A}$ og er táknað $\mathbf{A}^{-1}$.
Dæmi: Ef $\mathbf{H}$ er fylkið

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

og $\mathbf{J}$ er fylkið

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

þá er einfalt að sýna að $\mathbf{HJ} = \mathbf{JH} = \mathbf{I}$ svo $\mathbf{J}$ er andhverfa $\mathbf{H}$, þ.e. $\mathbf{J} = \mathbf{H}^{-1}$.

Andhverfa er einhlít

Setning: Fylki getur aðeins haft eina andhverfu.
Sönnun: Ef $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$, þá gildir að $(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC} = \mathbf{C}$ og líka $(\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{BI} = \mathbf{B}$ svo að $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

Lausn 2x2 hneppis

Getum skrifað $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ fyrir

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

með tilheyrandi skilgreiningu á **A**,**x** og **c**
Við fáum þá að lausn 2×2 jöfnuhneppisins má einnig skrifa á fylkjaformi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Lausnin er

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{bmatrix} -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

þá líka

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{bmatrix} -b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Úr þessum jöfnum getum við lesið andhverfu fylkisins **A**

Andhverfa 2x2 fylkis

Setning: Ef $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

þá er $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ef $ad - bc \neq 0$

Talan $ad - bc$ nefnist **ákveða** (*determinant*) fylkisins.

Almennar fylkjaandhverfur með lausnum jöfnuhneppa

Gerum ráð fyrir að fylkið $\mathbf{A}$ hafi andhverfu. Þá er hægt að leysa jöfnuhneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ fyrir öll $\mathbf{b}$.

Ef $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, þá er $x_1 = \mathbf{A}^{-1}e_1$ augljóslega fyrsti dálkur $\mathbf{A}^{-1}$ svo fyrsti dálkur $\mathbf{A}^{-1}$ leysir $\mathbf{Ax} = \mathbf{e_1}$.

Þannig er unnt að finna $\mathbf{A}^{-1}$ með því einu að leysa allar jöfnurnar $\mathbf{A}x_i = e_i$

Við fáum $\mathbf{A}^{-1} = [x_1, \ldots, x_n]$, þ.e. fylki myndað með dálkana $x_1, \ldots, x_n$.

Við kunnum að leysa jöfnuhneppi með því að leysa út eina breytu í einu. Gerum ráð fyrir að fylkið $\mathbf{A}$ hafi andhverfu. Þá er hægt að leysa jöfnuhneppið $\mathbf{A}x = b$ af því að

$$\begin{aligned} & \mathbf{Ax} && = \mathbf{b} \\ \iff \quad & \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}x) && = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \iff \quad & (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} && = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \iff \quad & \mathbf{x} && = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Orðalisti

* Fylki