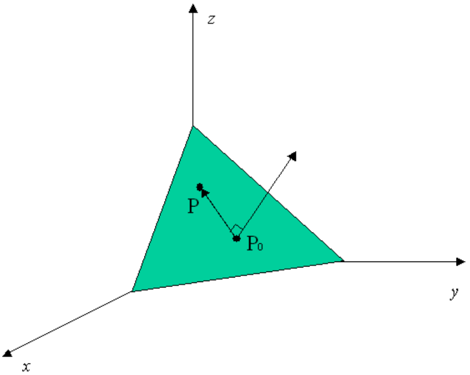
Línur og plön

math121-1linalg Hagnýt línuleg algebra og rúmfræði

Gunnar Stefánsson, Rögnvaldur G. Möller o.fl.

October 30, 2016

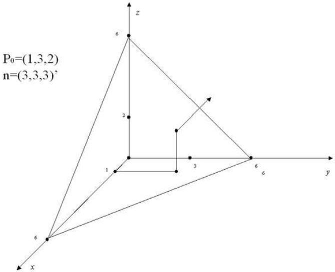
Plan



Plan skilgreinist af punkti P_0 og þvervektor $\mathbf{n}$.
$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ fastur
$P = (x, y, z)$ almennur punktur í planinu.

Jafna plans

P í planinu: P_0 til P $\perp$ $\mathbf{n}$, því $\vec{P_0 P}$ er í planinu, svo $n \cdot \vec{P_0 P} = 0$
Ef $\mathbf{n} = (a, b, c)'$ og $\vec{P_0 P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)'$
$\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$



Dæmi: $\mathbf{n} = (5, 5, 5)'$ og $P_0 = (1, 3, 2)$ þá er eftirfarandi jafngilt
$\mathbf{n}\vec{P_0 P} = 0 \Leftrightarrow 5(x - 1) + 5(y - 3) + 5(z - 2) = 0$
$5x + 5y + 5z - 30 = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 6$

$$\begin{aligned} x = y = 0 &\quad \Rightarrow \quad z = 6 \\ x = z = 0 &\quad \Rightarrow \quad y = 6 \\ y = z = 0 &\quad \Rightarrow \quad x = 6 \end{aligned}$$

Önnur jafna plans

Setning: Ef a, b og c eru tölur, ekki allar núll, þá lýsir $ax+by+cz+d=0$ plani í $\mathbb{R}^3$.

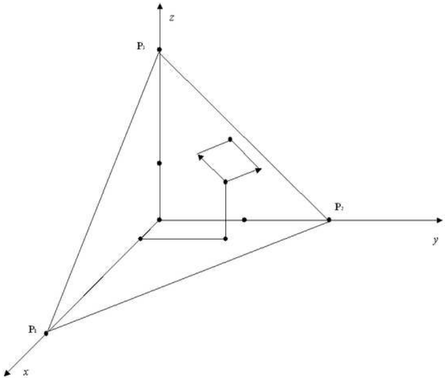
Sönnun: Gerum ráð fyrir að $a \neq 0$. Þá má umskrifa jöfnuna þannig:

$$a(x - \frac{-d}{a}) + b(y-0) + c(z-0) = 0$$

Svo þetta er jafnan $\mathbf{n} \cdot \vec{P_0 P} = 0$ með $\mathbf{n} = (a,b,c)'$ og $P_0 = (\frac{-d}{a}, 0, 0)$

Athugið að plön hafa “2 frígráður”, þ.e. planið '$ax + by + cz + d = 0$ inniheldur 3 breytur, x, y, z en þær þurfa að uppfylla eitt skilyrði og því er ein breyta n í raun fall af hinum tveimur, t.d. má leysa z út frá x og y. Eins má segja að planið sé tvívítt.

Plan spannast með tveimur vigrum



Plan í $\mathbb{R}^3$ má *spanna* með 2 vigrum: Finnum $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ þ.a. P í planinu má rita $P = P_0 + \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ fyrir einhverjar tölur α og β.
Ef $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ setjum við $P_1 = (-\frac{d}{a}, 0, 0)$, $P_2 = (0, -\frac{d}{b}, 0)$ og $P_3 = (0, 0, -\frac{d}{c})$
Þá er $\vec{P_1 P_2} = (\frac{d}{a}, \frac{-d}{b}, 0)'$ samsíða $(b, -a, 0)'$ og $\perp$ $\mathbf{n}$.
Setjum því $\mathbf{u} = (b, -a, 0)'$ og $\mathbf{v} = (a, b, -\frac{a^2+b^2}{c})'$.
Stýrist af tveimur tölum, margföldurunum við $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ $\Rightarrow$ 2-vítt plan!

Línur í þrívíðu rúmi

Línur í $\mathbb{R}^3$

Línur spannast af einum vigri, þ.e. punkt P á línu má skrifa sem $P = P_0 + t\mathbf{v}$ eða (réttara) $\vec{P_0P} = t\mathbf{v}$ fyrir einhvern fastan punkt P_0 á línunni og fastan vigur, $\mathbf{v}$, sem er samsíða línunni.

Jöfnu línunnar má einnig skrifa þannig:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{aligned}$$

-hér hleypur t yfir allar rauntölur.

Línan hefur þannig "eina frígráðu", þ.e. hún spannast af einum vigri og er einvítt rúm.

Orðalisti í tölfræði

* Plan * Þrívítt rúm * Lína í þrívíðu rúmi * Þvervigur * Að spanna línu * Að spanna plan