Náttúrulegu tölurnar

Tölurnar $1,2,3,4,\ldots$ köllum við *náttúrulegu tölurnar*.
Á náttúrulegu tölunum höfum við skilgreindar tvær aðgerðir, *samlagningu* og *margföldun*, þannig að sérhverju pari (a,b) af náttúrlegum tölum a og b er úthlutað nákvæmlega einni náttúrlegri tölu $a+b$ sem nefnist *summa* a og b og annari tölu ab sem nefnist *margfeldi* a og b. Við táknum margfeldið einnig með $a \cdot b$.
Dæmi
(a) Summa talnanna 3 og 4 er 7. Við ritum því $3+4=7$
(b) Margfeldi talnanna 3 og 4 er 12 við ritum því $3 \cdot 4 = 12$

Röðun talna

Á $\mathbb{N}$ höfum við *röðun* þannig að um sérhverjar tvær tölur a og b gildir eitt af þrennu:

1. a er minni en b, táknað $a < b$
2. a er jöfn b, táknað $a = b$
3. a er stærri en b, táknað $a > b$

Flestir hafa góða hugmynd um hvað það þýðir að ein tala sé stærri en önnur. Við látum þó formlega skilgreiningu fylgja með:

Náttúrulega talan a er sögð vera minni en b, ef til er náttúrleg tala c þannig að $a+c=b$.
Nátturulega talan a er sögð vera stærri en b, ef b er minni en a.

Um röðun náttúrlegra talna gilda tvær mikilvægar reglur:

Ef $a < b$ þá er $a+c < b+c$ *(röðun er óbreytt við samlagningu).*
Ef $a < b$ þá er $ac < bc$ *(röðun er óbreytt við margföldun).*

Dæmi:
Reglurnar um röðun eru í raun sáraeinfaldar.
Við vitum að $4 < 7$, fyrri reglan segir að þess vegna megi álykta að $4+100 < 7+100$ eða einfaldlega $104 < 107$.
Þetta er auðvitað augljóslega rétt og venjuleg manneskja ætti ekki að þurfa að vísa í reglu til að rökstyðja það að $104 < 107$. Þessi regla er því aðalega notuð í bókstafareikningi (algebru) en sjaldan notuð í raunverulegum reikningi með tölur.
Seinni reglan er alveg jafn augljós. Við vitum að $4 < 7$, þar af leiðandi er $4 \cdot 3 < 7 \cdot 3$ sem er jafngilt $12 < 21$ (sem við auðvitað vissum til að byrja með).

Frádráttur

Eins og með röðun hafa flestir góða hugmynd um hvað frádráttur er. Stærðfræðingar vilja samt hafa formlega skilgreiningu á öllum hlutum og fyrir frádrátt hljómar hún svona:

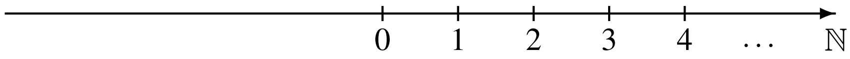
Ef $a < b$ og $a+x=b$, þá nefnist talan x mismunur b og a og við skrifum $b-a=x$. Ef hins vegar $a > b$ og $a=b+y$, þá nefnist talan y mismunur a og b og við skrifum $a-b=y$.

Athugum að eins og er þá höfum við ekki skilgreint neikvæðar tölur. Við getum því ekki gefið aðgerðinni $a-b$ gildi ef $b > a$. Til dæmis er aðgerðin $6-8$ ennþá merkingarlaus.

(Þegar neikvæðar tölur koma til sögunnar getum við sagt að $6-8=-2$)

Talnalínan

Til þess að gera okkur mynd af náttúrlegu tölunum hugsum við okkur að þær liggi jafnt dreifðar á línu, sem við nefnum talnalínu.

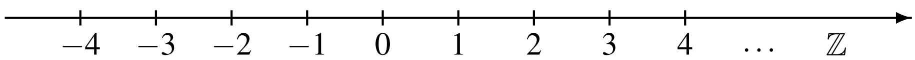


Við veljum okkur viðmiðunarpunkt 0 og mörkum hann á línuna. Síðan veljum við einingarlengd á línunni og mörkum punkt til hægri við 0 í einingarfjarlægð og táknum hann með 1. Síðan er haldið áfram eins og myndin sýnir. Þá höfum við að $a<b$ ef og aðeins ef b er hægra megin við a á talnalínunni.
Nú er hægt að lýsa reikningsaðgerðunum náttúrulegra talna sem færslum á talnalínunni. Sú aðgerð að leggja 1 við tölu m sem á sér tilsvarandi punkt á talnalínunni jafngildir því að taka eitt skref til hægri eftir talnalínunni í punktinn sem svarar til $m+1$. Sé talan n lögð við m er þessi aðgerð einfaldlega endurtekin n sinnum. Margföldun er skilgreind á sama hátt, talan mn er skilgreind sem $m+m+\ldots+m$ þar sem liðirnir eru n talsins. Til mn svara þá n stykki af færslunni frá 0 í punktinn m.

Neikvæðar tölur

Reikningur með náttúrlegar tölur er ófullkominn meðal annars vegna þess að ekki er alltaf hægt að framkvæma *frádrátt*. Aðgerðin $a-b$ er aðeins skilgreind ef $a>b$.
Til þess að ráða bót á þessu er talnakerfið stækkað þannig að bætt er við tölunni 0, sem nefnist *núll* og við höfum túlkað sem upphafspunkt náttúrlegu talnanna á talnalínunni, og síðan er bætt við tölunum $-1,-2,-3,-4,\ldots$. Þetta stækkaða kerfi nefnist *heilar tölur*. Tölurnar $-1,-2,-3,-4,\ldots$ nefnast *neikvæðu tölurnar*

Við gerum okkur einnig mynd af heilum tölum með því að marka þær á talnalínuna. Við mörkum fyrst náttúrulegu tölurnar (og núll) á línuna eins og áður. Næst mörkum við neikvæðu tölurnar á línuna á sama máta og náttúrulegu tölurnar, en bara í öfuga átt.



Forgangsröðun aðgerða

Þegar reiknað er með tölur þarf að framkvæma aðgerðir í réttri röð. Allar reikniaðgerðir sem eru innan sviga skal framkvæma fyrst. Svigann má líta á sem sér reikningsdæmi út af fyrir sig. Næst skal framkvæma margföldunaraðgerðir (og deilingu þegar hún verður skilgreind). Að lokum má leggja saman og draga frá.
Dæmi
$1+2\cdot 3=1+6=7$
$(1+2)\cdot 3=3\cdot 3=9$
$((1+1)\cdot 5+3\cdot(2-4))\cdot 2=(2\cdot 5+3\cdot(-2))\cdot 2=(10-6)\cdot 2=4\cdot 2=8$

Reiknireglur

Nokkrar reiknireglur gilda um tölur:

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)+c = a+(b+c) & \textit{(tengiregla samlagningar)}, \\
(ab)c = a(bc) & \textit{(tengiregla margföldunar)}, \\
a+b = b+a & \textit{(víxlregla samlagningar)}, \\
ab = ba & \textit{(víxlregla margföldunar)}, \\
a(b+c) = ab+ac & \textit{(dreifiregla)}, \\
1a = a & \textit{(1 er margföldunarhlutleysa)}. \\
a+0 = 0 & \textit{(0 er samlagningarhlutleysa)}, \\
0a = 0 & \textit{(margföldun með núlli gefur núll)}
\end{array}
$$

Í raun eru þetta nokkrar af forsendum stærðfræðinnar. Með öðrum orðum þá er ógjörningur að sanna þær. Með örlítilli athugun ætti hver og einn þó að geta sannfært sig um sannleiksgildi þeirra. Raunin er sú að ekki er hægt að sanna neitt án þess að hafa eitthvað í höndunum til að byrja með. Einhverstaðar þarf stærðfræðin að byrja, og stærðfræðingar hafa ákveðið að hún byrji m.a. með þessum reglum. (Ath. nútímastærðfræði hefur fleiri forsendur sem ekki verða taldar upp hér.)

Dæmi:

Prófum reglu númer 5 á listanum *(dreifiregluna)* fyrir tölurnar $a = 3$, $b = -9$ og $c = 5$.
Vinstra megin jafnaðarmerkisins stendur $3(-9+5) = 3\cdot(-4) = -12$
Hægra megin jafnaðarmerkisins stendur $3\cdot(-9)+3\cdot 5 = -27+15 = -12$
Við sjáum því að reglan stemmir.

Deiling heilla talna

Nú skal skilgreina deilingu á formlegan máta:

Ef a og b eru gefnar heilar tölur, $b \neq 0$, og til er heil tala x þannig að $a = bx$, þá segjum við að b gangi upp í a eða að a sé deilanleg með b. Ef slík tala x er til, þá nefnist hún kvóti talnanna a og b og þá skrifum við $\frac{a}{b} = x$ eða $a/b = x$. Sú aðgerð að finna þessa tölu x nefnist deiling.

Í vissum skilningi er deilingaraðgerðin „öfug"miðað við margföldunaraðgerðina. Þ.e.a.s. ef $a = bx$ þá er $a/b = x$. $(b \neq 0)$.
Athugum að eins og er höfum við bara skilgreint heilar tölur. Brotið $\frac{a}{b}$ verður því merkingarlaust nema að útkoman sé heiltala. Seinna munum við skilgreina ræðar tölur (almenn brot) og þá getum við unnið með hvaða brot sem er.

Dæmi

Til er heil tala x þ.a. $3x = 12$. Sú tala er $x = 4$ og því skrifum við $\frac{12}{3} = 4$. Ekki er til heil tala x þ.a. $5x = 12$, við höfum ekki ennþá skilgreint ræðar tölur (öðru nafni almenn brot) svo aðgerðin $\frac{12}{5}$ er merkingarlaus.

Deiling með afgangi

Ekki er alltaf hægt að deila heilli tölu a með heilli tölu b. Í bili getum við ráðið bót á þessu með því að deila í staðinn með afgangi. Formleg skilgreining er:

Látum a og b vera heiltölur. Aðgerðin að finna heilar tölur x og y þannig að $a = bx+y$ og $0 \leq y < b$ nefnist deiling með afgangi. Við segjum þá að b gangi x sinnum upp í a með afgangi y

Við skulum gera tilraun til að útskýra aðferð til að deila með afgangi.

Deila skal tölunni b í töluna a með afgangi

1. *Finnum stærstu heiltöluna sem er minni en eða jöfn a sem er þannig að b gegnur upp í henni. (Hvernig það er gert er önnur saga, stundum er einfaldast bara að prófa sig áfram.) Köllum þessa tölu n.*
2. *Setjum* $x = \frac{n}{b}$
3. *Setjum* $y = a - n$

Núna gildir jafnan $a = bx + y$ og við segjum að b gangi x sinnum upp í a með afgang y

Í barnaskólum landsins er líka kennd aðferð sem kallast *langadeiling*. Þeirri aðferð er frekar erfitt að lýsa í texta og því verður sleppt hér.
Dæmi:
Deilið 7 upp í 1033 með afgangi, með því að nota:
(a) Aðferðina sem er lýst hér að ofan.
(b)langadeilingu.
Lausn:
(a)

1. Finnum stærstu töluna sem er minni en eða jöfn 1033 sem er þannig að 7 gengur upp í henni:
   Prófum okkur áfram...
   Prófum $7 \cdot 100 = 700$, sjáum að 7 gengur uppí 700 en þessi tala er töluvert minni en 1033
   Profum $7 \cdot 150 = 1050$ svo 7 gengur uppí 1050 en þessi tala er stærri en 1033 við höfum því gengið aðeins of langt, lækkum okkur aðeins.
   Prófum $7 \cdot 147 = 1029$ svo 7 gengur upp í 1029, þessi tala er minni en 1033 og næsta tala sem er þannig að 7 gengur upp í henni er $1029 + 7 = 1036$ sem er stærri en 1033. Við sjáum því að 1029 er stærsta tala sem er minni en eða jöfn 1033 sem er þannig að 7 gengur upp í henni. Því setjum við $n = 1029$
2. Látum $x = \frac{1029}{7} = 147$
3. Látum $y = 1033 - 1029 = 4$

Nú sjáum við að $1033 = 7 \cdot 147 + 4$ og við segjum að 7 gangi 147 sinnum upp í 1033 með afgang 4.
(b)

$$
\begin{array}{r}
147 \\
7\overline{)1033} \\
\underline{7} \\
33 \\
\underline{28} \\
53 \\
\underline{49} \\
4
\end{array}
$$

Þetta gefur að 7 gengur 147 sinnum upp í 1033 með afganginn 4.
Með öðrum orðum er $1033 = 7 \cdot 147 + 4$.

Frumtölur of frumþáttun

Rifjum upp skilgreininguna á deilanleika:

Náttúrleg tala a er sögð vera deilanleg með náttúrulegu tölunni b ef til er náttúruleg tala x þannig að $a = bx$.

Allar tölur a eru deilanlegar með einum og sjálfri sér, því að $a = 1 \cdot a$. Flestar tölur hafa fleiri deila, t.d. er 12 deilanleg með þremur og fjórum og 15 er deilanleg með þremur og fimm.
Sumar tölur eru hinsvegar aðeins deilanlegar með einum og sjálfri sér. Slíkar tölur eru nefndar *frumtölur* (*primtölur*), að einni undanskilinni. Talan 1 er ekki tekin með sem frumtala vegna tæknilegra ástæðna. Setjum skilgreininguna fram á formlegan hatt:

Ef náttúruleg tala $p \geq 2$ er aðeins deilanleg með einum og sjálfri sér þá segjum við að p sé frumtala.

Nokkrar fyrstu frumtölurnar eru:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots.$$

Sérhverja náttúrlega tölu $a \geq 2$ má skrifa sem margfeldi frumtalna

$$a = p_1 p_2 p_3 \cdots p_m$$

þar sem sumar frumtölur p_j geta verið endurteknar. Sem dæmi getum við tekið

$$7 = 7, \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3, \quad 250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^3.$$

Þáttun á náttúrlegum tölum í frumtölur nefnist *frumþáttun*.
Engin skilvirk aðferð hefur verið fundin til að frumþátta stórar tölur. Í raun byggja flestar aðferðir einfaldlega á því að prófa hvort hver frumtala gegnur upp í gefna tölu. Algengustu aðferðinni verður lýst hér:

Frumþátta skal tölu n. Setjum $n_1 = n$ og stingum n_1 inní eftirfarandi algrím:
Gáum hvort að einhver frumtala minni en eða jöfn $\sqrt{n_i}$ gengur upp í n_i.

- *Ef slík frumtala finnst þá skírum við hana p_i og setjum $n_{i+1} = \frac{n_i}{p_i}$. Síðan skoðum við n_{i+1} eins og við skoðuðum n_i.*
- *Ef engin slík frumtala finnst þá er n_i sjálf frumtala. Þá endar algrímurinn. Við setjum $p_i = n_i$ og frumþáttun n er $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_i$*

Dæmi:
a) Frumþáttið töluna 273.
Lausn:
Látum $n_1 = 273$.
2 gengur ekki uppí 273 en 3 gerir það (sest með prófun), setjum því $p_1 = 3$ og $n_2 = \frac{273}{3} = 91$.
3 gengur ekki uppí 91, og 5 ekki heldur. 7 gengur hins vegar uppí 91. Við setjum því $p_2 = 7$ og $n_3 = \frac{91}{7} = 13$
Nú er þekkt að 13 er frumtala svo við setjum $p_3 = 13$ og algrímurinn endar
Frumþáttunin er því $273 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 3 \cdot 7 \cdot 13$

b) Frumþáttið töluna 101.
Lausn:
Látum $n_1 = 101$
2 gengur ekki uppí 101, heldur ekki $3, 5$ og 7. Nú er $\sqrt{101} \approx 10,05$. Af þessu sést að engin

frumtala minni en $\sqrt{101}$ gengur uppí 101. 101 er því sjálf frumtala, og frumþáttunin er því einfaldlega $101 = 101$

Ræðar tölur

Reikningur með heilar tölur er ófullkominn, meðal annars vegna þess að ekki er alltaf hægt að framkvæma deilingu án þess að þurfa að grípa til deilingar með afgangi. Til þess að bæta úr því er talnakerfið stækkað aftur með því að innleiða *ræðar tölur*, en þær samanstanda af öllum brotum $\frac{p}{q}$ þar sem p og q eru heilar tölur og $q \neq 0$. Talan p nefnist teljari brotsins en talan q nefnari þess.
Við lítum á heilu tölurnar sem hlutmengi í ræðu tölunum með því að skrifa $n = \frac{n}{1}$ fyrir sérhverja heila tölu n.
Oft geta mismunandi brot táknað sömu töluna:

Tvö brot $\frac{p}{q}$ og $\frac{r}{s}$ tákna sömu ræðu töluna þá og því aðeins að $p \cdot s = q \cdot r$.

Dæmi:
Brotin $\frac{2}{7}$ og $\frac{6}{21}$ eru jöfn því að $21 \cdot 2 = 42$ og $6 \cdot 7 = 42$. Með öðrum orðum er $21 \cdot 2 = 6 \cdot 7$. Því má skrifa $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$.
Brotin $\frac{2}{7}$ og $\frac{3}{16}$ eru ekki jöfn því að $2 \cdot 16 = 32$ en $3 \cdot 7 = 21$. Á stærðfræðimáli er það skrifað $\frac{2}{7} \neq \frac{3}{16}$.

Fullstytt brot

Auðvelt er að sjá að ef a, b og t eru heilar tölur þá gildir $\frac{at}{bt} = \frac{a}{b}$. Þegar þessi aðgerð er framkvæmd segjum við að við höfum *stytt brotið*, ef við framkvæmum þessa aðgerð í „öfuga átt"segjum við að við höfum *lengt brotið*.
Það getur verið ruglingslegt að hægt sé að tákna sömu töluna með óendanlega mörgum brotum. Því er góður siður að fullstytta alltaf brotin sín. Fullstytt brot $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ eru nefnilega jöfn þá og því aðeins að $a = c$ og $b = d$.
Skilgreiningin á fullstyttu broti er svohljóðandi:

Brot $\frac{p}{q}$ er sagt vera fullstytt ef $q > 0$ og ef um allar heilar tölur r, s þ.a. $s > 0$ og $\frac{r}{s} = \frac{p}{q}$ gildir að $s \geq q$

Þeim sem eru óvanir stærðfræði gæti fundist þessi skilgreining þung. Flestum nægir þó að muna aðferð til að fullstytta brot. Einni slíkri aðferð verður lýst hér:

Fullstytta skal brot $\frac{m}{n}$. Tekin verða fjögur skref:

1. *Ef $n < 0$ skal margfalda bæði m og n með -1 og halda áfram í skref tvö. Ef $n > 0$ skal ekkert gera í þessu skrefi.*
2. *Frumþátta skal báðar tölurnar m og n. $m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_i$ og $n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_j$. Þá er $\frac{m}{n} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_i}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_j}$.*
3. *Ef einhver frumtala finnst sem er bæði fyrir ofan og neðan strik má stytta hana í burtu. Allar mögulegar frumtölur eru styttar í burtu.*
4. *Frumtölurnar sem standa eftir fyrir ofan og neðan strik eru margfaldaðar aftur saman og eftir stendur fullstytt brot $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.*

Dæmi:
(a): Fullstyttum brotið $\frac{525}{980}$
Lausn:
Hér munum við ganga í gegnum skrefin sem er lýst hér að ofan.

1. $980 > 0$ svo ekkert er gert í þessu skrefi.

2. Frumþáttum tölurnar eins og lýst er í kaflanum á undan. $525 = 3\cdot5\cdot5\cdot7$ og $980 = 2\cdot2\cdot5\cdot7\cdot7$ Því má skrifa $\frac{525}{980} = \frac{3\cdot5\cdot5\cdot7}{2\cdot2\cdot5\cdot7\cdot7}$

3. Við sjáum að hægt er að stytta út eina fimmu og eina sjöu. Eftir stendur brotið $\frac{3\cdot5}{2\cdot2\cdot7}$ sem hefur enga sameiginlega frumtölu fyrir ofan og neðan strik.

4. $3\cdot5 = 15$ og $2\cdot2\cdot7 = 28$. Fullstytta brotið okkar er því $\frac{15}{28}$

Sumum gæti fundist við vera að eyða fullmiklu púðri í einfaldan hlut. Aðferðinni er skipt í fjögur skref til að einfalda útskýringuna. Sá sem er orðinn vanur reikningi gæti einfaldlega skrifað:

$$\frac{525}{980} = \frac{3\cdot5\cdot5\cdot7}{2\cdot2\cdot5\cdot7\cdot7} = \frac{3\cdot5}{2\cdot2\cdot7} = \frac{15}{28}$$

Reiknireglur

Á ræðum tölum má leggja saman, draga frá, margfalda og deila. Þessar aðgerðir eru framkvæmdar svona:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs} \qquad \text{og} \qquad \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps-qr}{qs}.$$

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} \qquad \text{og} \qquad \frac{p/q}{r/s} = \frac{ps}{qr}$$

Allar venjulegar reiknireglur gilda áfram um ræðar tölur.
Dæmi:
Reiknum úr brotinu

$$\frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}}{5/2}$$

og fullstyttið það síðan.
Lausn:

$$\frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}}{5/2} = \frac{\frac{1\cdot3+4\cdot2}{4\cdot3}\cdot\frac{3}{2}}{5/2} = \frac{\frac{11}{12}\cdot\frac{3}{2}}{5/2} = \frac{(11\cdot3)/(12\cdot2)}{5/2} = \frac{33/24}{5/2} = \frac{33\cdot2}{24\cdot5} = \frac{66}{120}$$

Fullstyttum nú brotið:

$$\frac{66}{120} = \frac{2\cdot3\cdot11}{2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5} = \frac{11}{2\cdot2\cdot5} = \frac{11}{20}$$

Röðun ræðra talna

Á heilu tölunum hafa flestir mjög skýra hugmynd um hvað það þýðir að ein tala sé stærri en önnur. Við vitum til dæmis að 3468 er stærri en 2497 og við skrifum $3468 > 2497$. Þetta finnst flestum augljóst og því eru útskýringar á því af hverju þetta gildir oft flóknar eða vandræðalegar.
Á ræðu tölunum eru hlutir ekki jafn einfaldir. Til dæmis þykir ekki augljóst hvor af tölunum $\frac{13}{512}$ og $\frac{256}{1023}$ er stærri. Sá sem sér það í hendi sér verður að teljast góður í reikningi. Ein leiðin væri einfaldlega að slá báðar tölurnar inn í vasareikni og sjá að $\frac{13}{512} \approx 0,02539$ og

$\frac{256}{1023} \approx 0,02542$. Þá sést að $\frac{256}{1023} > \frac{13}{512}$ því að $0,02542 > 0,02539$. Margir stærðfræðingar eru óhrifnir af þessari aðferð. Við viljum geta reiknað hlutina á blaði án vasareiknis.
Ef tvö brot hafa sama nefnara er auðvelt að skera úr um hvort þeirra er stærra. Við vitum að brotið $\frac{p}{s}$ er stærra en $\frac{q}{s}$ og skrifum $\frac{p}{s} > \frac{q}{s}$ ef $p > q$. Þetta getum við sagt því að brotin hafa sameiginlegan nefnara s. T.d. er $\frac{7}{3}$ stærra en $\frac{6}{3}$ því bæði brotin hafa nefnarann 3
Þessa staðreynd getum við nýtt okkur þegar reynt er að meta almennari gerðir af brotum. Aðferðinni verður lýst hér:

Bera skal saman brotin $\dfrac{a}{b}$ og $\dfrac{c}{d}$.

1. *Lengjum fyrra brotið með tölunni d og það seinna með tölunni b*

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \qquad \textit{og} \qquad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

2. *Nú hafa bæði brotin sama nefnarann (sem er bd). Við getum því sagt að $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ ef $ad > bc$ en ef $ad < bc$ segjum við að $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$*

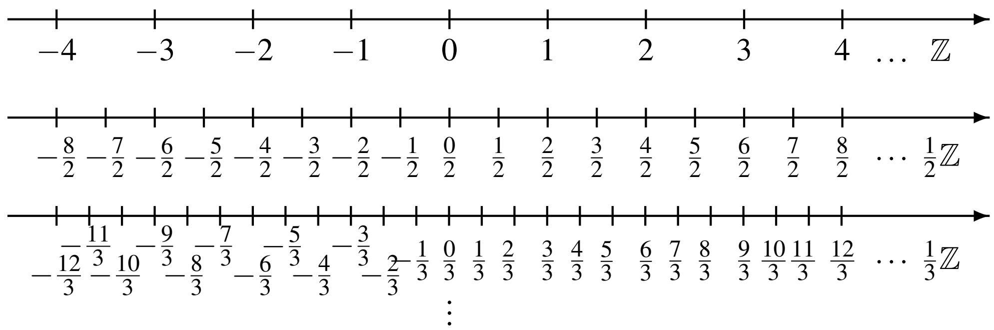
Dæmi:
Hvort brotið er stærra $\frac{3}{4}$ eða $\frac{5}{12}$?
Lausn:
Lengjum fyrra brotið með 12 og það seinna með 4

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 12} = \frac{36}{48} \qquad \text{og} \qquad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{20}{48}$$

Nú hafa brotin sama nefnara, $36 > 20$ við segjum því að $\frac{3}{4} > \frac{5}{12}$

Talnalínan

Til að sjá betur fyrir sér ræðu tölurnar er gagnlegt að geta staðsett þær á talnalínunni. Við þurfum að raða þeim þannig að $\frac{a}{b}$ sé hægra meginn við $\frac{c}{d}$ þ.þ.a.a. $\frac{a}{b}$ sé stærri en $\frac{c}{d}$.
Til að sjá fyrir sér hvar brotið $\frac{p}{q}$ er á talanlínunni er best að taka venjulegu talnalínuna fyrir heilar tölur og skipta svo bilinu milli 0 og 1 í q jafn stór bil. Byrjum nú í núlli og færum okkur til hægri á talnalínunni um eitt slíkt bil. Þennan punkt köllum við $\frac{1}{q}$. Ef við færum okkur aftur jafn langa vegalengd til hægri erum við staðsett í punktinum $\frac{2}{q}$. Þetta gerum við aftur og aftur þar til við erum búin að færa okkur p sinnum til hægri á talnalínunni. Þetta er punkturinn sem við köllum $\frac{p}{q}$.
Á mynd má sjá talnalínuna þrisvar sinnum. Fyrst með heilu tölunum merktar inn. Síðan brot með nefnara tvo og að lokum brot með nefnara þrjá.



Takið eftir að brot sem tákna sömu tölu lenda alltaf á sama stað á talnalínunni, eins og búast má við. Ef slíkt myndi ekki gilda værum við á villigötum.

Veldi

Það getur verið þreytandi að skrifa eitthvað eins og $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ aftur og aftur. Því innleiðum við *veldi* og skrifum a^5 í staðinn (af því að a kom fimm sinnum fyrir). Formleg skilgreiningin á heiltöluveldum er svona:

$$\textit{Ef } a \textit{ er tala þá setjum við } a^0 = 1$$
$$\textit{Ef } n > 0 \textit{ er heiltala setjum við } a^n = a^{n-1}$$
$$\textit{Ef } n < 0 \textit{ er heiltala setjum við } a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Talan a í stærðtákninu a^n nefnist *veldisstofn* og talan n nefnist *veldisvísir*.

Dæmi:

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

$4^{-3} = \dfrac{1}{4^3} = \dfrac{1}{64}$

Reiknireglur

Við höfum eftirtaldar reiknireglur fyrir veldi:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m}, \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m}, \\ a^n \cdot b^n &= (ab)^n, \\ (a^n)^m &= a^{nm}. \end{aligned}$$

Dæmi:

$$2^2 \cdot 2^3 \cdot 5^5 = 2^{(2+3)} \cdot 5^5 = 2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100000$$

Rætur

Ef q er jákvæð heiltala og a er jákvæð tala þá er til nákvæmlega ein tala $x \geq 0$ þannig að $x^q = a$. Þessi tala x nefnist q-ta rótin af a og er táknuð með $\sqrt[q]{a}$. Um rætur gilda eftirtaldar reglur:

$$\begin{aligned} \sqrt[q]{ab} &= \sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b}, \\ \sqrt[q]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}}, \\ \sqrt[q]{a^p} &= (\sqrt[q]{a})^p, \\ \sqrt[sq]{a^{sp}} &= \sqrt[q]{a^p}, \\ \sqrt[sq]{a} &= \sqrt[s]{\sqrt[q]{a}}. \end{aligned}$$

Við táknum $\sqrt[2]{a}$ með $\sqrt{a}$ og nefnum þessa stærð *ferningsrót* eða *kvaðratrót*.
Ferningsrótin af a segir okkur hver kantlengdin er í ferningi með flatarmálið a. Talan $\sqrt[3]{a}$ er oft kölluð *teningsrót* eða *verpilrót*. Teningsrótin af a segir okkur hver kantlengdin er í reglulegum teningi með rúmmál a. Orðið *verpill* er gamalt og fallegt orð fyrir tening.
Athugið að ræturnar virða ekki samlagningu, þ.e.a.s. almennt er $\sqrt[q]{a+b} \neq \sqrt[q]{a} + \sqrt[q]{b}$. Það er raunar mjög algengt að fólk geri þá villu í útreikningum að setja jafnaðarmerki á milli þessara stærða.

Dæmi:
$\sqrt[4]{16} = 2$ því að $2^4 = 16$
$\sqrt[3]{27} = 3$ því að $3^3 = 27$
$\sqrt{64} = 8$ því að $8^2 = 64$

Ræðar tölur í veldisvísi

Látum nú r vera ræða tölu og skrifum hana sem brot af heilum tölum $r = p/q$ þar sem q er náttúrleg tala. Síðan skilgreinum við a í veldinu r með jöfnunni

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Fjórða rótarreglan hér að framan segir okkur að skilgreiningin sé óháð því hvaða brot við veljum sem framsetningunni á ræðu tölunni r og þriðja reglan segir að $a^r = (\sqrt[q]{a})^p$. Með því að prjóna saman veldareglur og rótareglur er hægt að sýna fram á að veldareglurnar gilda einnig fyrir ræða veldisvísa, en þá þarf að gera ráð fyrir að veldisstofninn a sé jákvæður eða 0.
Dæmi:
Látum $a > 0$. Einfaldið $(a^{x+y})^z(a^{x-z})^y$.
Lausn:
Við beitum veldareglunum og fáum:

$$(a^{x+y})^z(a^{x-z})^y = a^{zx+zy}a^{yx-zy} = a^{zx+zy+yx-zy} = a^{zx+yx} = (a^{z+y})^x.$$

Dæmi:
Látum $a, b > 0$. Einfaldið

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}^3\sqrt[4]{b}^6}.$$

Lausn:
Hér beitum við reiknireglum fyrir rætur:

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}^3\sqrt[4]{b}^6} = \sqrt[3]{\sqrt{a}^3}\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}^6} = \sqrt{a}\sqrt[4]{b}^2 = \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Nokkur grunnhugtök um mengi

Mengi er safn aðgreindra hluta eða hugtaka sem saman mynda eina heild. Hlutirnir eða hugtökin sem mynda mengið nefnast *stök* þess. Ef x er stak í menginu A, þá skrifum við $x \in A$ eða $A \ni x$. Ef x er ekki stak í menginu A þá skrifum við $x \notin A$ eða $A \not\ni x$.

Oft eru mengi sett fram sem upptalning á stökum. Til dæmis er
$\{1, 2, 3, \dots\}$ mengi náttúrlegra talna,
$\{2, 4, 6, 8, 10\}$ mengið sem samanstendur af fimm fyrstu jákvæðu sléttu tölunum og
$\{2, 3, 5, 7, 11\}$ mengið sem samanstendur af fimm fyrstu frumtölunum.

Tvö mengi A og B eru sögð vera jöfn, ef þau innihalda sömu stök og við skrifum þá $A = B$.
Tómamengið er mengi sem inniheldur ekkert stak. Það er táknað með $\varnothing$.
Mengið A er sagt vera *hlutmengi* í menginu B ef sérhvert stak í A er einnig stak í B. Við

skrifum þá $A \subset B$ eða $A \subseteq B$. Athugið að hlutmengjatáknin $\subset$ og $\subseteq$ þýða það sama og eru notuð jöfnum höndum í stærðfræðitextum.

Dæmi:
(a) Setjum $A = \{1, 2, \frac{2}{4}, \pi\}$, $B = \{\pi, 2, \frac{2}{4}, 1\}$ og $C = \{1, \frac{2}{4}\}$.
Þá er $A = B$ því að öll stök í A eru líka í B og öfugt. Punkturinn hér er sá að það skiptir ekki máli í hvaða röð stökin í menginu eru talin.
Hér gildir líka $C \subset A$ og $C \subset B$
(b) Setjum $A = \{\text{Klukka, hestur, rauð Toyota}\}$ og $B = \{\text{hestur, græn Toyota, klukka}\}$
Nú er $A \neq B$ því að Toyotan í A er rauð, en sú í B er græn.

Yrðingar til að skilgreina mengi

Stundum getur verið gagnlegt að skilgreina mengi með stökum sem öll hafa einhverja ákveðna eiginleika. Við þurfum að geta táknað þetta mengi á einfaldan hátt en stundum eru stökin óendanlega mörg og því ómögulegt að beinlínis telja þau upp eins og í dæmunum að ofan. Við leyfum okkur því að skilgreina mengi með því að skrifa svokallaðar yrðingar um x inní menngjasvigana og segja að x sé stak í menginu ef og aðeins ef allar yrðingarnar um það eru sannar.
Formlegri leið til að segja sama hlutinn er:

Hægt er að setja fram mengi með opinni yrðingu $p(x)$, þannig að mengið samanstandi af öllum stökum x þannig að $p(x)$ sé sönn yrðing.

Þetta verður best skýrt með dæmum.
Dæmi:
(a) Látum $A = \{x \text{ er frumtala }; x \text{ hefur 3 í einingasætinu (miðað við venjulega tugakerfisframsetningu)}\}$
Nú getum við sagt að t.d. $3 \in A$, $13 \in A$ $103 \in A$. Því allar þessar tölur eru frumtölur með 3 í einingarsætinu.
Reyndar er hægt að sýna að A hefur óendanlega mörg stök.
33 er ekki stak í A (ritað $33 \notin A$) því að 33 er ekki frumtala. 51 er heldur ekki stak í A því að hún hefur 1 í einingasætinu en ekki 3.
(b) Látum $B = \{x \text{ er bíll }; x \text{ er Subaru }, x \text{ er hvítur}\}$
Bíll foreldra höfundar síðan í æsku er í þessu mengi því hann var hvítur Subaru (og sér í lagi var hann bíll). Bíllinn sem höfundur horfir á útum gluggan þegar þessi setning er skrifuð er ekki í menginu því hann er grænn.
(c) Látum $C = \{x \text{ er heiltala }; x \text{ er slétt tala }, x \text{ er oddatala}\}$.
Hér er $C = \varnothing$ því að engin tala getur verið bæði slétt tala og oddatala í einu.

Athugasemdir

1. Þegar mengi er skilgreint með yrðingum verður að passa að þær eigi við. Til dæmis er merkingalaust að skrifa $A = \{x \text{ er heiltala }; x \text{ er hvít}\}$ því að tölur hafa ekki liti. Fullyrðingin 2 er hvít tala er hvorki sönn né ósönn heldur er hún merkingalaus.

2. Hefð er fyrir því að láta fyrstu yrðinguna fjalla um hvernig hluti er verið að vinna með. Í **(c)**-lið er byrjað á því að taka fram að x sé heiltala. Ef það væri ekki tekið fram væri næsta yrðing, x er slétt tala, illa skilgreind miðað við athugasemdina á undan.

Þekkt mengi

Ýmis mengi eru táknuð með ákveðnum bókstöfum og ákveðnu letri, t.d. talnakerfin. Þau sem við höfum þegar fjallað um eru:

$$\begin{aligned}&\mathbb{N} \text{ mengi náttúrlegra talna.}\\&\mathbb{Z} \text{ megni heilla talna.}\\&\mathbb{Q} \text{ mengi ræðra talna.}\end{aligned}$$

Önnur mengi sem fjallað verður um seinna eru:

$$\begin{aligned}&\mathbb{R} \text{ mengi rauntalna.}\\&\mathbb{C} \text{ megni tvinntalna.}\end{aligned}$$

Um talnakerfin gildir:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Við skilgreinum líka fleiri mengi:

$$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z}; x > 0\} \qquad \mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0\} \qquad \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$$

og

$$\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z}; x < 0\} \qquad \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q}; x < 0\} \qquad \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}$$

Aðgerðir á mengjum

Ef A og B eru mengi þá táknum við mengi allra staka sem eru annaðhvort í A eða í B með $A \cup B$. Þetta mengi köllum við *sammengi* A og B.
Formlega skilgreiningin er:

$$A \cup B = \{x\,;\, x \in A \text{ eða } x \in B\},$$

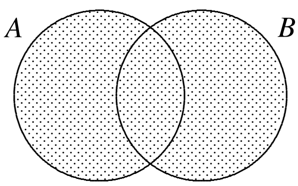
Mengi allra staka sem eru bæði í A og B er táknað með $A \cap B$. Þetta mengi er kallað *Sniðmengi* A og B.
Formlega skilgreiningin er:

$$A \cap B = \{x\,;\, x \in A \text{ og } x \in B\}$$

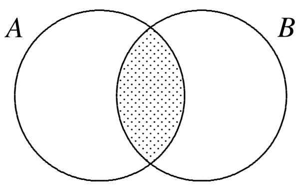
Mengi allra staka sem eru í A en ekki í B er kallað *mismunur* (eða *mengjamismunur*) A og B. Hann er táknaður með $A \setminus B$
Formlega skilgreiningin er:

$$A \setminus B = \{x\,;\, x \in A \text{ og } x \notin B\}.$$

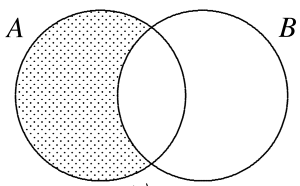
Munið að samtengingin „eða“ er hér notuð eins og alltaf í stærðfræði í merkingunni „og/eða“.



$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$

Dæmi:
Látum $A = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ er slétt tala}\}, B = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ er oddatala}\}$ og $C = \{2,3,5,6,8\}$
Hér er $A \cup B = \mathbb{N}$ því að allar náttúrulegar tölur eru annað hvort sléttar tölur eða oddatölur.
$A \cap B = \emptyset$ því að engin tala er bæði slétt tala og oddatala.
$A \setminus B = A$ því að ekkert stak í A er líka í B og því er ekkert dregið frá.
$A \cap C = \{2,6,8\}$
$C \setminus B = \{2,6,8\}$

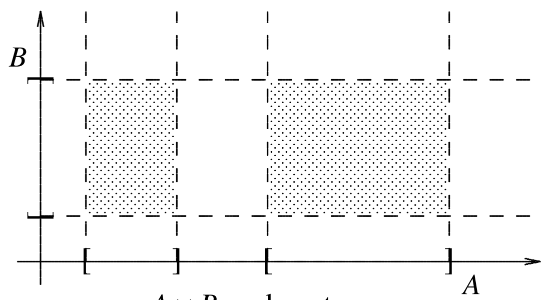
Athugasemd

3. Takið eftir að í formlegu skilgreiningunum á $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$ er nostast við yrðingar. Fyrsta yrðingin í öllum skilgreiningunum er eins, hún segir ekkert nema „x". Það er til að virða hefðina sem sagt er frá í athugasemd 2 að ofan. Fyrst þarf að taka fram hvernig stök mengið getur innihaldið. Mengið sem verið er að skilgreina getur innihaldið hvers skonar stök sem er (við vitum ekki fyrirfram hvers skonar stök eru í A og B) og í staðin fyrir að skrifa „x má vera hvað sem er"ritum við einfaldlega „x"

Faldmengi

Faldmengi eða *margfeldismengi* $A \times B$ tveggja mengja A og B er skilgreint sem mengi allra para (a,b) af stökum þ.a. $a \in A$ og $b \in B$, með yrðingum er þetta skrifað:

$$A \times B = \{(a,b)\,;\, a \in A \text{ og } b \in B\}.$$



$A \times B$ er skyggt.

Dæmi:
Látum $A = \{2,3,6\}$
$(2, \frac{5}{4})$ er stak í $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$. Það er ritað $(2, \frac{5}{4}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$
$(2, \frac{5}{4})$ er líka stak í $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ því að $2 = \frac{2}{1}$ er í báðum mengjunum $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Q}$
$(2, \frac{5}{4})$ er líka stak í menginu $A \times \mathbb{Q}$
$(2, \frac{5}{4})$ er <u>ekki</u> stak í menginu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ því $\frac{5}{4}$ er ekki í $\mathbb{N}$

Fyllimengi

Þegar verið er að fjalla um hlutmengi A í ákveðnu mengi X, þá er mengið $X \setminus A$ oft nefnt *fyllimengi* hlutmengisins A, það er einnig táknað A^c eða $\complement A$. Takið eftir að í framsetningunni A^c kemur X ekki fram, þó að það skipti í raun höfuðmáli. Mengið X er kallað *almengi*

og inniheldur alla hlutina sem verið er að vinna með. Oftast er ljóst af samhenginu hvað þetta almengi er.
Ef mengi er skilgreint með yrðingum er þumalputtaregla sem segir að almengið sé ákvarðað af fyrstu yrðingunni. Skv. fyrri athugasemdum er það einmitt yrðingin sem ákvarðar hvers konar hluti unnið er með.
Dæmi:
(a) Setjum $A = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ er deilanleg með } 5\}$.
Hér má draga þá ályktun að almengið sé $\mathbb{N}$
Því er $A^c = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ er ekki deilanleg með } 5\}$
(b) Setjum $B = \{x \text{ er orð }; x \text{ er nafnorð }, x \text{ byrjar á bókstafnum n}\}$
Hér má draga þá ályktun að almengið sé mengi allra orða.
Því er $B^c = \{x \text{ er orð }; x \text{ er ekki nafnorð eða x byrjar á öðrum bókstaf en n}\}$
Önnur leið til að skrifa B^c er:
$B^c = \{x \text{ er orð }; x \text{ er ekki nafnorð}\} \cup \{x \text{ er orð }; x \text{ byrjar ekki á bókstafnum n}\}$

Meira um aðgerðir á mengjum

Auðvelt er að sannfæra sig um eftirfarandi reiknireglur á mengjum:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Þessi regla segir að það skipti ekki máli í hvaða röð maður tekur sammengi og sniðmengi. Því má skrifa $A \cup B \cup C$ eða $A \cap B \cap C$ og sleppa öllum svigum. Sérstaklega skal taka fram að almennt gildir:

$$(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$$

Það er að segja það skiptir höfuðmáli hvaða aðgerð er gerð fyrst. Þegar sam- og sniðmengjum er blandað saman þarf því alltaf að nota sviga. Það að skrifa $A \cup B \cap C$ eða $A \cap B \cup C$ er algjörlega merkingarlaust.

Dæmi:
Gefin séu mengin $A := \{1,2,3,4,5\}$, $B := \{2,4,6,8,10\}$ og $C := \{6,7,8,9,10\}$.
a) Finnið $(A \cup B) \cap C$.
Lausn: Byrjum á að finna $A \cup B$. Það er mengi allra staka sem eru stök í öðru hvoru mengjanna A, B, þ.e. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8,10\}$.
$(A \cup B) \cap C$ inniheldur síðan nákvæmlega þau stök sem eru bæði í $A \cup B$ og C. $(A \cup B) \cap C = \{6,8,10\}$.
b) Finnið $A \cup (B \cap C)$.
Lausn: Nú er $B \cap C = \{6,8,10\}$ og þá er $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5,6,8,10\}$. Tökum eftir að $(A \cup B) \cap C \neq (A \cup B) \cap C$. Það er s.s. ekki sama í hvaða röð aðgerðirnar eru framkvæmdar ef bæði eru tekin sammengi og sniðmengi.
c) Finnið $(A \cap B) \cap C$.
Lausn: Nú er $A \cap B = \{2,4\}$ og þá er $(A \cap B) \cap C = \{2,4\} \cap C = \emptyset$.

Ennþá meira um aðgerðir á mengjum

Við skilgreinum líka sam- og sniðmengi af fleiri en tveimur mengjum. Ef $n \in \mathbb{N}$ og

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ eru mengi þá skilgreinum við sammengi og sniðmengi þeirra með

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x\,;\, x \in A_i \text{ fyrir eitthvert } i = 1, \ldots, n\}$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x\,;\, x \in A_i \text{ fyrir sérhvert } i = 1, \ldots, n\}.$$

Í raun er $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ bara önnur leið til að skrifa $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$
og $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ er bara önnur leið til að skrifa $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$.

Stundum kemur fyrir að stærðfræðingar vilja taka sammengi af óendanlega mörgum mengjum. Það getur orðið ruglingslegt að útskýra hvernig það er táknað í prenti en hér verður gerð heiðarleg tilraun til að gera einmitt það:
Segjum að við höfum eitthvað safn af mengjum (eða mengi af mengjum) þannig að búið sé að merkja öll mengin með einhverjum *vísi (enska: index)* úr einhverju vísismengi I. Þ.e.a.s. öll mengin í safninu má tákna með A_i með $i \in I$. Þá er sammengi allra þessara mengja táknað með $\bigcup_{i \in I} A_i$.
Með yrðingum er þetta skilgreint:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x; x \in A_i \text{ fyrir eitthvað } i \in I\}$$

Eins eru sniðmengin skilgreind:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x; x \in A_i \text{ fyrir öll } i \in I\}$$

Tökum nokkur dæmi um þetta.
Dæmi:
(a) Látum $\mathbb{P}$ tákna mengi allra frumtalna.
Fyrir sérhvert $p \in \mathbb{P}$ skulum við láta A_p vera mengi allra náttúrulegra talna sem p gengur uppí. Með yrðingum skrifum við:

$$A_p = \{n \in \mathbb{N}; p \text{ gengur uppí } n\}$$

Hér er vísismengið $\mathbb{P}$ og

$$\bigcup_{p \in \mathbb{P}} A_p = \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Það er af því að sérhver tala í $\mathbb{N}$ sem er stærri en 1 er deilanlegri með einhverri frumtölu, og er því í einhverju af mengjunum A_p.

(b) Fyrir sérhvert $n \in \mathbb{Z}$ skulum við láta B_n vera mengi allra almennra brota sem hafa n sem teljara þegar þau eru fullstytt. Með yrðingum skilgreinum við þetta mengi:

$$B_n = \{r \in \mathbb{Q}; \text{ Ef } r = \frac{a}{b} \text{ og } \frac{a}{b} \text{ er fullstytt brot þá er } a = n\}$$

Hér er $\mathbb{Z}$ vísismengið og:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n = \mathbb{Q}$$

Af því að sérhvert almennt brot er í einhverju af mengjunum A_n.

(c) Látum T vera mengið sem hefur sem stök öll tré í heiminum. Ef $t \in T$ er eitthvað tré látum við mengið L_t vera mengi allra laufblaða á trénu t. Með yrðingum skrifum við:

$$L_t = \{l \text{ er laufblað; } l \text{ er á trénu } t\}$$

Hér er T vísismengið og

$$\bigcup_{t \in T} L_t = \{l \text{ er laufblað; } l \text{ er á einhverju tréi }\}$$

Nokkur dæmi í viðbót

Dæmi:
Látum $A \subset X$ og $B \subset Y$. Táknið fyllimengi $A \times B$ í $X \times Y$.
Lausn:
Fyllimengið samastendur af öllum tvenndum (a,b) þar sem annaðhvort $a \notin A$ eða $b \notin B$ eða bæði, þ.e.

$$(A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c).$$

Einnig má tákna fyllimegnið á fleiri vegu, t.d. með $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$.

Dæmi:
Táknið $A \setminus B$ með því að nota sniðmengi og fyllimengi.
Lausn:
Öll stök í A eru annaðhvort í B eða B^c. Þau stök sem eru í A en ekki B eru því bæði í A og B^c, þannig að $A \setminus B = A \cap B^c$.

Dæmi:
Látum $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vera náttúrlegar tölur. Táknum með $p_i\mathbb{Z}$ mengi þeirra heiltalna sem p_i gengur upp í þar sem $1 \leq i \leq n$. Táknið mengi þeirra talna sem eru deilanlegar með öllum tölunum $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
Lausn:
Mengi þeirra talna sem eru deilanlegar með öllum tölunum $p_1, \ldots, p_n$ er sniðmengi talna sem eru deilanlegar með $p_1, p_2, \ldots p_n$. Þ.e.

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_i\mathbb{Z}.$$

Talnakerfin

Nú þegar höfum við kynnt nokkur talankerfi til sögunnar. Við skulum rifja þau upp:

1. Fyrst var *mengi náttúrulegra* talan kynnt til sögunnuar. Það er mengið $\{1,2,3,4...\}$ og við táknum það með stafnum $\mathbb{N}$. Á þessu mengi er hægt að leggja saman, og margfalda. Við ræddum um frumþáttun á þessu mengi, og einnig hvernig deila skal með afgangi.

2. Á náttúrulegu tölunum er ekki alltaf hægt að framkvæma aðgerðina frádrátt. Þess vegna bættum við neikvæðu heilu tölunum í talnakerfið okkar ásamt tölunni 0. Þetta talnakerfi köllum við *heilu tölurnar* og táknum með stafnum $\mathbb{Z}$. Á því má gera sömu hluti og á $\mathbb{N}$ og þar að auki er hægt að draga frá.

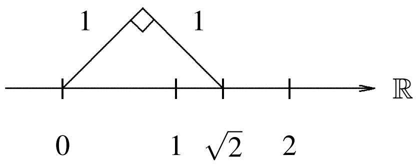
3. Heilu tölurnar eru ófullkomnar í þeim skilningi að ekki er hægt að framkvæma raunverulega deilingu á þeim. Þess vegna voru *ræðu tölurnar* búnar til. Þær eru táknaðar með $\mathbb{Q}$.
   Á ræðu tölunum er hægt að leggja saman, draga frá, margfalda og deila. Frumþáttun verður hins vegar merkingarlaust hugtak á þessu mengi.

Rótin af tveimur

Í fornöld héldu menn lengi að allar tölur væru ræðar tölur. Forn-grikkir túlkuðu nær alla stærðfræðina sína á rúmfræðilegan máta og þeir héldu að lengdina á sérhverju línustriki væri hægt að tákna sem brot heilla talna, a/b.

Fræg þjóðsaga segir að dag nokkurn í forn-Grikklandi hafi maður að nafni Hippasus fundið tölu sem er ekki hægt að tákna sem almennt brot. Hann hafði nefnilega fundið töluna $\sqrt{2}$ og fullyrti að ekki væru til heiltölur a og b þannig að $\sqrt{2} = a/b$.
Honum var drekkt fyrir að láta sér detta slíka frásinnu í hug.

Töluna $\sqrt{2}$ má túlka rúmfræðilega sem lengd langhliðar í rétthyrndum þríhyrningi með skammhliðar af lengd 1. Ef þríhyrningurinn hefur skammhliðar $a = 1$ og $b = 1$ og langhlið c segir regla Pýþagórasar okkur nefnilega að $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



Það kemur í ljós að Hippasus hafði rétt fyrir sér. Það eru ekki til heiltölur a og b þannig að $\sqrt{2} = a/b$. Sönnunin á því er frekar einföld og hún verður látin fylgja með fyrir áhugasama lesendur:

Þetta verður sannað með mótsögn.

Gerum ráð fyrir að til séu heilar tölur a og b þannig að $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
Fullstyttum nú brotið, þ.e.a.s. skrifum $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ þar sem $\frac{c}{d}$ er fullstytt brot.
Þar sem $\frac{c}{d}$ er fullstytt getur frumtalan 2 í mesta lagi gengið uppí aðra af tölunum c og d
því ef hún gengi upp í þær báðar þá væri brotið $\frac{c}{d}$ ekki fullstytt.
Nú fæst

$$\sqrt{2} = \frac{c}{d} \qquad \textit{sem jafngildir} \qquad d\sqrt{2} = c$$

Ef stæðurnar beggja vegna jafnaðarmerkisins eru settar í annað veldi fæst:

$$2d^2 = c^2$$

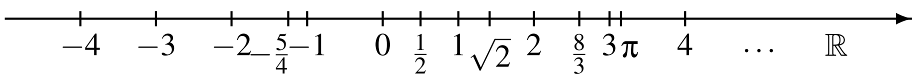
Nú sést að frumtalan 2 gengur uppí töluna c^2. Því hlýtur 2 líka að ganga upp í töluna c
svo til er heiltala c' þannig að $c = 2c'$.
en þá er

$$2d^2 = c^2 = (2c')^2 = 4(c')^2 \qquad \textit{sem jafngildir} \qquad d^2 = 2(c')^2$$

Við sjáum því að frumtalan 2 gengur uppí töluna d^2 og þar af leiðandi upp í töluna d.
Þetta er mótsögn af því að við höfum nú þegar sýnt að 2 gengur uppí c en 2 getur ekki gengið uppí bæði c og d því að $\frac{c}{d}$ var fullstytt brot.
Upphaflega forsendan okkar hlýtur því að vera röng!
Við komumst að þeirri niðurstöðu að ekki eru til heilar tölur a og b þannig að $\sqrt{2} = a/b$

Rauntölurnar

Af kaflannum á undan sést að mengi ræðu talnanna $\mathbb{Q}$ er ekki alveg fullkomið. Það er eins og það vanti tölur inn á milli. Mengi ræðra talna er því stækkað svo að „engar tölur vanti”. Þetta stækkaða mengi köllum við *Rauntölur* og táknum með stafnum $\mathbb{R}$.
Tölurnar sem ekki er hægt að skrifa sem brot heilla talna köllum við *óræðar tölur*. Við þekkjum margar óræðar tölur, t.d. er talan $\sqrt{p}$ óræð fyrir allar frumtölur p. Talan π er líka óræð. Ekkert tákn er notað fyrir óræðar tölur, heldur táknum við það einfaldlega með mengjamismuninum $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Á vissan hátt má færa rök fyrir því að óræðu tölurnar séu miklu fleiri en ræðu tölurnar. Sá rökstuðningur verður hins vegar að bíða betri tíma.
Á mynd má sjá ýmsar tölur staðsettar á talnalínunni:



Athugasemd:
Hér var mengi rauntalna ekki skilgreint formlega. Sú skilgreining er allt of flókin til að setja fram hér.

Reiknireglur

Á mengi rauntalna má leggja saman, draga frá, margfalda og deila. Sömu reiknireglur gilda á rauntölunum og á hinum talnakerfunum, við skulum rifja þær upp:

$(a+b)+c = a+(b+c)$	*(tengiregla samlagningar)*,
$(ab)c = a(bc)$	*(tengiregla margföldunar)*,
$a+b = b+a$	*(víxlregla samlagningar)*,
$ab = ba$	*(víxlregla margföldunar)*,
$a(b+c) = ab+ac$	*(dreifiregla)*,
$a+0 = a$	*(0 er samlagningarhlutleysa)*,
$1a = a$	*(1 er margföldunarhlutleysa)*.
$0a = 0$	*(margföldun með núllu gefur núll)*.

Á mengi rauntalna er líka röðun. Um þessa röðun gilda nokkrar reglur sem auðvelt er að sanna:

ef $a < b$ og $b < c$, þá er $a < c$	*(röðun er gegnvirk)*,
ef $a < b$ þá er $a+c < b+c$	*(röðun er óbreytt við samlagningu)*,
ef $a < b$ og $c > 0$, þá er $ac < bc$	*(röðun er óbreytt við margföldun með jákvæðri tölu)*,
ef $a < b$ og $c < 0$, þá er $bc < ac$	*(röðun snýst við þegar margfaldað er með neikvæðri tölu)*.

Óendanleiki

Öll þau talnakerfi sem við höfum rætt hér, náttúrlegu tölurnar, heilu tölurnar, ræðu tölurnar og rauntölurnar, eru *óendanleg og ótakmörkuð*, ýmist í eina eða tvær áttir. Í efri áttina þýðir það að fyrir hverja tölu a í einhverju þessara mengja má finna aðra tölu b í sama mengi þannig að $a < b$. Þegar við viljum hagnýta okkur þennan eiginleika þurfum við því að taka í notkun nýtt tákn ∞, sem við köllum óendanleikatákn. Við getum hugsað okkur að það bætist við rauntölurnar þannig að $\infty > a$ fyrir öll a í $\mathbb{R}$ (og þar með öll a í $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$

vegna þess að við lítum á þau sem hlutmengi í $\mathbb{R}$). Á sama hátt og neikvæðu tölurnar eru fengnar frá hinum jákvæðu höfum við $-\infty$ þannig að $-\infty < a$ fyrir öll a í $\mathbb{R}$.
Hafa ber í huga að ∞ og $-\infty$ eru ekki tölur og ekki er rétt að nota þær sem slíkar. Við getum ekki án frekari umhugsunar notað þessi tákn í útreikningum þó freistingin geti verið mikil. Sem dæmi um óvænta hegðun þessara tákna þarf $-\infty$ alls ekki að vera samlagningarandhverfa ∞, þ.e. jafnan $-\infty + \infty = 0$ þarf ekki að gilda.

Bil í rauntölunum

$]a,b]$

Látum I vera hlutmengi í $\mathbb{R}$. Við köllum hlutmengið I *bil* ef „engin göt eru í I". Með öðrum orðum, við segjum að mengið I sé bil ef að við getum táknað það á talanlínunni með breiðu línustriki með engum götum. Á hvorn endapunkt striksins setjum við annað hvort fylltan hring eða tóman, eftir því hvort sá endapunktur sé með í bilinu eða ekki. Ef punkturinn á að vera með setjum við fylltan hring, annars tóman.
Formlega skilgreiningin á bili er svohljóðandi:

Hlutmengi I í $\mathbb{R}$ kallast bil ef að fyrir sérvert $a,b \in I$ og $c \in \mathbb{R}$ þ.a. $a < c < b$ þá gildir $c \in I$

Til að tákna bil í prenti þarf að nota tvær tölur og hornklofana [og]. Hér verða nokkur bil útskýrð í töluðu máli:
Bilið $[a,b]$ er mengi allra rauntalna sem eru á milli a og b, meðtaldar eru tölurnar a og b.
Bilið $]a,b[$ er mengi allra rauntalna sem eru á milli a og b en hér eru a og b frátaldar.
Bilið $]a,\infty[$ er mengi allra talna sem eru stærri en a, hér er a ekki tekið með.
Síðan er hægt að snúa hornklofunum á allskonar vegu til að fá allskyns bil.
Hér er tæmandi listi yfir allar gerðir af bilum skilgreind með yrðingum:

Ef $a,b \in \mathbb{R}$ og $a < b$, þá skilgreinum við:

$$\begin{array}{ll}
]a,b[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x < b\} & \textit{(opið bil)},\\
[a,b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \le x \le b\} & \textit{(lokað bil)},\\
[a,b[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, a \le x < b\} & \textit{(hálf-opið bil)},\\
]a,b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, a < x \le b\} & \textit{(hálf-opið bil)},\\
]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < a\} & \textit{(opin hálflína)},
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \le a\} & \textit{(lokuð hálflína)},\\
]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > a\} & \textit{(opin hálflína)},\\
[a,\infty[= \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \ge a\} & \textit{(lokuð hálflína)},\\
]-\infty,\infty[= \mathbb{R} & \textit{(öll rauntalnalínan)},\\
[a,a] = \{a\} & \textit{(eins punkts bil)}.
\end{array}$$

Efri og neðri mörk

Einn af grundvallareiginleikum rauntalna er setningin um efra og neðra mark.

- *Gerum ráð fyrir að A sé hlutmengi í $\mathbb{R}$ og að það sé takmarkað að ofan. Þá er til ótvírætt ákvörðuð tala $S \in \mathbb{R}$ sem upffyllir eftirfarandi skilyrði*

  1. *Ef $a \in A$ þá gildir $S \ge a$.*
  2. *Ef $L \in \mathbb{R}$ er einhver önnur tala sem uppfyllir skilyrði eitt þá er $S \le L$.*

Þessi tala S er kölluð efra mark mengisins A og við skrifum

$$\sup A = S$$

- *Gerum ráð fyrir að A sé hlutmengi í $\mathbb{R}$ og að það sé takmarkað að neðan. Þá er til ótvírætt ákvörðuð tala $s \in \mathbb{R}$ sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði*

  1. *Ef $a \in A$ þá gildir $s \leq a$.*
  2. *Ef $l \in \mathbb{R}$ er einhver önnur tala sem uppfyllir skilyrði eitt þá er $s \geq l$.*

  Þessi tala s er kölluð neðra mark mengisins A og við skrifum

$$\inf A = s$$

Talan S er kölluð efra mark mengisins A útaf eiginleika hennar, í töluðu máli er hún minnsta talan sem er stærri en eða jöfn sérhverju staki í A.
Eins er tala s í stærsta talan sem er minna en eða jöfn sérhverju staki í A.
Þar sem rauntölurnar voru ekki skilgreindar formlega er ómögulegt að sanna þessa reglu hér. Þó er hægt að segja að í vissum skilningi þá var skilgreiningin á rauntölunum valin þannig að hægt væri að sanna þessa reglu.

Nokkur dæmi

Dæmi:
Gerum ráð fyrir að a sé ræð tala n sé náttúruleg tala og að $x > 0$ sé óræð. Skerið úr um hvort eftirfarandi tölur eru ræðar eða óræðar:
(a) $a + x$
(b) ax
(c) $\sqrt[n]{x}$
Lausn:
Þar sem a er ræð má skrifa $a = p/q$ þar sem p og q eru heilar tölur. Í lausninni munum við því alltaf skrifa p/q í staðin fyrir a
(a)
Gerum ráð fyrir að $p/q + x$ sé ræð tala og sýnum að það leiði til mótsagnar.
Þar sem $p/q + x$ er ræð þá eru til heilar tölur r og s þ.a.

$$\frac{p}{q} + x = \frac{r}{s} \qquad \text{sem jafngildir} \qquad x = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{qr - sp}{sq}$$

En það er mótsögn því að $qr - sp$ og sq eru heilar tölur, og þarsem x er óræð á ekki að vera hægt að skrifa x sem brot af heilum tölum. Því hlýtur upphaflega forsendan okkar að vera röng og því hlýtur $p/q + x$ að vera óræð tala.
(b)
Gerum ráð fyrir að $\frac{p}{q}x$ sé ræð tala.
Þá eru til heilar tölur r og s þ.a.

$$\frac{p}{q}x = \frac{r}{s} \qquad \text{sem jafngildir} \qquad x = \frac{r/s}{p/q} = \frac{rq}{ps}$$

En það er mótsögn því að x er óræð. Því er $\frac{p}{q}x$ óræð tala.
(c)
Gerum ráð fyrir að $\sqrt[n]{x}$ sé ræð.
Þá eru til heilar tölur r og s þ.a.

$$\sqrt[n]{x} = \frac{r}{s} \qquad \text{sem jafngildir} \qquad x = (\frac{r}{s})^n = \frac{r^n}{s^n}$$

sem er mótsögn því x er óræð. Því er $\sqrt[n]{x}$ óræð tala.

Dæmi:
Látum $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}; r > 0\}$. Fyrir sérhvert $r \in \mathbb{R}_+$ þá skilgreinum við mengið $A_r = [-r, r]$. Lýsið menginu

$$\bigcap_{r\in\mathbb{R}_+} A_r$$

Á einfaldan hátt.
Lausn:
Tökum eftir að fyrir allar jákvæðar tölur r þá er $0 \in [-r, r]$. Með öðrum orðum þá er $0 \in A_r$ fyrir öll $r \in \mathbb{R}_+$. En þá er $0 \in \bigcap_{r\in\mathbb{R}_+} A_r$ skv. skilgreiningu.
Gerum nú ráð fyrir að x sé einhver tala sem er stærri en 0. Þá er ljóst að $x \notin [-x/2, x/2]$. Með öðrum orðum er $x \notin A_{x/2}$. Sér í lagi er x ekki í öllum mengjunum A_r, $r \in \mathbb{R}_+$.En þá er $x \notin \bigcap_{r\in\mathbb{R}_+} A_r$.
Á svipaðan hátt sést að ef $x < 0$ þá er $x \notin \bigcap_{r\in\mathbb{R}_+} A_r$.
Við höfum því séð að 0 er eina talan sem er í menginu $\bigcap_{r\in\mathbb{R}_+} A_r$
Við getum því skrifað

$$\bigcap_{r\in\mathbb{R}_+} A_r = \{0\}$$

Dæmi:
(a)
Finnið efra mark mengisins
$A = \{x \in \mathbb{R};\ x \text{ er stærra en núll og } x^2 \leq 2\}$.
(b)
Finnið efra mark mengisins
$B = \{x \in \mathbb{R};\ x \text{ er stærra en núll og } x^2 < 2\}$.
Lausn:
(a)
Með örlitlu innsæi er auðvelt að giska á að $S = \sqrt{2}$ gæti verið efra markið. Við skulum sýna að svo er. Til að gera það þurfum við að sýna að $\sqrt{2}$ uppfylli báða eiginleikana í skilgreiningunni.

1. Látum $a \in A$. Þá er $a^2 \leq 2$ skv. skilgreiningunni á menginu A. En þá er líka $a \leq \sqrt{2}$ svo að fyrra skilyrðið er uppfyllt.

2. Gerum ráð fyrir að L sé eitthvað annað stak sem að er þannig að $L \geq a$ fyrir öll $a \in A$. Við vitum að talan $\sqrt{2}$ er í A því að $(\sqrt{2})^2 = 2 \leq 2$ svo að sér í lagi gildir $L \geq \sqrt{2}$. Seinna skilyrðið er þess vegna einnig uppfyllt.

Við sjáum nú að $\sqrt{2}$ er efra mark á A og við skrifum þess vegna

$$\sup A = \sqrt{2}$$

(b)
Við byrjum á svipaðan hátt og í **(a)**-lið. Við giskum meira segja á sömu töluna. Seinni liðurinn verður aðeins þyngri.

1. Látum $a \in A$. Þá er $a^2 < 2$ skv. skilgreiningunni á menginu A. En þá er líka $a < \sqrt{2}$ það hefur sér í lagi í för með sér $a \leq \sqrt{2}$ svo að fyrra skilyrðið er uppfyllt.

2. Látum nú L vera aðra tölu sem er þannig að $L \geq a$ fyrir öll $a \in A$. Við viljum sýna að $L \geq \sqrt{2}$.
   Gerum ráð fyrir að $L < \sqrt{2}$ og sýnum að það leiði til mótsagnar.
   Þar sem $L < \sqrt{2}$ þá er til tala u sem er þannig að $L < u < \sqrt{2}$.
   Þá er $u^2 \leq (\sqrt{2})^2 = 2$ svo að $u \in A$.
   Fyrst að $u \in A$ þá er $L \geq u$. En það er mótsögn því að u var valið minna en L. Forsendan $L < \sqrt{2}$ hlýtur því að vera röng og við komumst að þeirri niðurstöðu að $L \geq \sqrt{2}$.

Við sjáum nú að $\sqrt{2}$ er efra mark á B og við skrifum þess vegna

$$\sup B = \sqrt{2}$$

Endanleg mengi

Fjöldi staka í mengi getur verið endanlegur eða óendanlegur.
Ef mengið A inniheldur endanlega mörg stök og fjöldi staka í því er n þá skrifum við $\#A = n$.
Dæmi:
Látum $A = \{2, 5, 8, 22, 88\}$ $B = \{\text{hestur, köttur, mús}\}$ og $C = \varnothing$.
Þá er $\#A = 5$, $\#B = 3$ og $\#C = 0$.

Teljanlega óendanleg mengi

Við þekkjum mörg mengi sem innihalda óendanlega mörg stök. T.d. $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$.
Hins vegar eru í vissum skilningi til margar gerðir af óendanleika.
Stærðfræðingar segja t.d. að $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Q}$ innihaldi jafn mörg stök. Jafnvel þó að $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.
Stærðfræðingar segja líka að $\mathbb{R}$ innihaldi fleiri stök en $\mathbb{N}$ jafnvel þó þau innihaldi bæði óendanlega mörg stök.
Til að skýra þetta köllum við fram hugtakið *teljanlega óendanlegt mengi*. Ekki er ennþá búið að kenna fræðina til að skilgreina formlega hvenær mengi eru teljanlega óendanleg, en auðvelt er að útskýra það óformlega:

Óendanlegt mengi A er sagt vera teljanlega óendanlegt ef hægt er að búa til númeraðan (óendanlega langan) lista sem er þannig að sérhvert stak í A komi fram á listanum fyrr eða síðar.
Mengi sem eru annað hvort endanleg eða teljanlega óendanleg eru sögð teljanleg.
Mengi sem eru ekki teljanleg eru sögð óteljanleg.

Tökum nokkur auðveld dæmi um þetta.
Dæmi:
(a) Sýnum að $\mathbb{N}$ er teljanlega óendanlegt.
(b) Látum $2\mathbb{N}$ vera mengi sléttra jákvæðra talna. Sýnum að það er teljanlega óendanlegt.
(c) Sýnum að $\mathbb{Z}$ er teljanlega óendanlegt.
Lausn:
(a)
Auðvelt er að búa til númeraðan lista af náttúrulegu tölunum. Við númerum einfaldlega

stak $n \in \mathbb{N}$ sem stak númer n á listanum. Við fáum því listann.

Númer	$\mathbb{N}$
1.	1
2.	2
3.	3
4.	4
$\vdots$	$\vdots$

(b)
Nú erum við að skoða mengi sléttra talna. Við viljum því setja allar sléttu tölurnar á óendanlegan lista. Það er auðvelt, við setjum hverja slétta n sem tölu númer $\frac{n}{2}$ á listanum og fáum:

Númer	$2\mathbb{N}$
1.	2
2.	4
3.	6
4.	8
$\vdots$	$\vdots$

(c)
Auðvelt er að setja $\mathbb{Z}$ á lista, við númerum stakið 0 númer eitt, svo stakið -1 númer tvö, stakið 1 númer þrjú, stakið -2 númer fjögur, stakið 2 númer fimm o.s.fr. til að fá listann:

Númer	$\mathbb{Z}$
1.	0
2.	-1
3.	1
4.	-2
5.	2
6.	-3
7.	3
$\vdots$	$\vdots$

Auðvelt er að sannfæra sig um að sérhver tala í $\mathbb{Z}$ kemur á endanum fram á þessum lista. Önnur formlegri leið til að útskýra þennan lista er að segja ef $n \geq 0$ er í $\mathbb{Z}$ látum við það vera númer $2n+1$ á listanum en ef $n < 0$ er í $\mathbb{Z}$ látum við það vera númer $-2n$ á listanum.

Mengið $\mathbb{Q}$

Það kemur í ljós að mengið $\mathbb{Q}$ er teljanlega óendanlegt, það gæti komið sumum á óvart í fyrstu því það virðist vera svo miklu stærrar en $\mathbb{N}$.
Fyrstu tilraunir til að setja það á lista misheppnast oft því að mönnum hættir til að telja öll brot með nefnara 1 fyrst síðan brot með nefnara 2 og svo framvegis.
Það virkar að sjálfsögðu ekki því að sá listi myndi líta einhvern veginn svona út:

$$\begin{array}{rl}
\text{Númer} & \mathbb{Q} \\
1. & 1/1 \\
2. & 2/1 \\
3. & 3/1 \\
4. & 4/1 \\
5. & 5/1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Við sjáum að þessi listi er ómögulegur því að við komumst aldrei í brot með nefnara 2. Við þurfum því að gera þetta einhvern veginn öðruvísi.

Setjum fyrst öll almenn brot upp í óendanlega töflu. Í efstu línu setjum við öll brot með nefnara 1, í næstu línu öll brot með nefnara 2 í þeirri þriðju öll brot með nefnara 3 og svo framvegis. Teljörunum í hverri línu er raðað eins og gert var fyrir $\mathbb{Z}$ í lið **(c)** í dæminu að ofan:

$$\begin{array}{cccccccc}
0/1 & -1/1 & 1/1 & -2/1 & 2/1 & -3/1 & 3/1 & ... \\
0/2 & -1/2 & 1/2 & -2/2 & 2/2 & -3/2 & 3/2 & ... \\
0/3 & -1/3 & 1/3 & -2/3 & 2/3 & -3/3 & 3/3 & ... \\
0/4 & -1/4 & 1/4 & -2/4 & 2/4 & -3/4 & 3/4 & ... \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

Nú ætti hver og einn að geta sannfært sig um að allar ræðu tölurnar koma fram í þessari töflu. Sérhver ræð tala kemur meira að segja oft fyrir, til dæmis er $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = ... = 1$ og sérhver af þessum framsetningum kemur fram.

Teiknum nú örvar inná þessa mynd eftir öllum skálínum sem stefna upp og til hægri:

$$\begin{array}{cccccccc}
0/1 & -1/1 & 1/1 & -2/1 & 2/1 & -3/1 & 3/1 & ... \\
0/2 & -1/2 & 1/2 & -2/2 & 2/2 & -3/2 & 3/2 & ... \\
0/3 & -1/3 & 1/3 & -2/3 & 2/3 & -3/3 & 3/3 & ... \\
0/4 & -1/4 & 1/4 & -2/4 & 2/4 & -3/4 & 3/4 & ... \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

Röðum nú stökunum á lista eftir skálínunum, fyrst skálínunni sem byrjar í $0/1$ næst þeirri sem byrjar í 0/2 svo í 0/3 o.s.frv. þannig fáum við listann:

Númer	$\mathbb{Q}$
1.	$0/1$
2.	$0/2$
3.	$-1/1$
4.	$0/3$
5.	$-1/2$
6.	$1/1$
7.	$0/4$
9.	$-1/3$
10.	$1/2$
11.	$-2/1$
$\vdots$	$\vdots$

Sérhver tala í töflunni kemur fram á þessum lista, og þess vegna kemur sérhver ræð tala fram á þessum lista. Við erum því búin að lista ræðu tölurnar og höfum því sýnt að þær eru teljanlega margar.

Athugasemd:
Á listanum fyrir $\mathbb{Q}$ kemur hvert stak mörgum sinnum fyrir. Margir stærðfræðingar vilja setja aukareglu sem segir að hvert stak megi aðeins koma einu sinni fram á listanum. Auðvelt er að breyta listanum þannig að sú regla sé uppfyllt. Maður einfaldlega gengur í gegnum listann og strikar út öll brot sem hafa áður komið fram ofar á listanum.

Mengið $\mathbb{R}$

Það kemur í ljós að mengið $\mathbb{R}$ er óendanlegt. Með öðrum orðum þá er ekki hægt að búa til lista sem inniheldur öll stökin í $\mathbb{R}$. Það er ekki mikið mál að sýna það.
Í raun er töluvert þægilegra að sýna að bilið $[0,1]$ sé óteljanlegt. Þar sem $[0,1] \subset \mathbb{R}$ þá hefur það síðan í för með sér að $\mathbb{R}$ sé óendanlegt. Við skulum gera það frekar.
Í tugakerfisframsetningu má skrifa sérhvert $x \in [0,1]$ sem

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 ...$$

Þar sem a_n er n-ti aukastafurinn í x. Ljóst er að a_n verður þá að vera heiltala milli 0 og 9 fyrir öll n.
T.d. ef $x = 0,123123123...$ þá er $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 1$, $a_5 = 2$ o.s.frv.

Gerum nú ráð fyrir að við höfum náð að skrá allar tölurnar í $[0,1]$ á lista og sýnum að það leiði til mótsagnar. Skrifum upp þennan lista:

Númer	$[0,1]$
1.	$A_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} ...$
2.	$A_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} ...$
3.	$A_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} ...$
4.	$A_4 = 0, a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} ...$
$\vdots$	$\vdots$

Hér látum við a_{nm} tákna m-ta aukastafinn í tölunni A_n, sem er tala númer n á listanum.
Búum nú til nýja tölu $B = 0,b_1b_2b_3...$ þar sem b_n er valið á eftirfarandi hátt:

$$\begin{array}{l} \text{Ef } a_{nn} \neq 5 \text{ þá setjum við } b_n = 5 \\ \text{Ef } a_{nn} = 5 \text{ þá setjum við } b_n = 7 \end{array}$$

Þá sjáum við að B er ekki á listanum okkar því fyrir sérhvert $n \in \mathbb{N}$ þá er aukastafur númer n í B (sem er b_n) ólíkur aukastaf númer n í tölunni A_n (sem er a_{nn}). B er því ólíkt A_n fyrir öll n með öðrum orðum þá er B ekki á listanum, en það er mótsögn því að $B \in [0,1]$ og skv. forsendu voru öll stök í $[0,1]$ á þessum lista. Því hlýtur upphaflega forsendan okkar að vera röng.
Það er ekki hægt að skrá stök mengisins $[0,1]$ á lista og því er það óteljanlegt, sér í lagi er þá $\mathbb{R}$ óteljanlegt.

Summu- og margfeldistáknið

Stundum kemur fyrir að stærðfræðingar vilja leggja saman marga liði.
Til dæmis

$$1+2+3+4+...+100 \qquad \text{eða} \qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{87}$$

Í báðum þessum dæmum ætti að vera augljóst hvað summan þýðir þó að svona þrípunktur sé ekki alvöru stærðfræðitákn.
Í fyrra dæminu er verið að leggja saman allar tölur frá einum uppí hundrað og í seinna dæminu er verið að leggja saman einn á móti sérhverri tölu frá fjórum uppí áttatíu-og-sjö.

Stundum vinnum við samt með flóknari gerðir af summum og þá dugar svona táknmál skammt.
Þess vegna innleiðum við summutaknið $\sum$

Segjum að við viljum leggja saman allar tölur af gerðinni $n(n+1)$ þar sem n gengur frá einum uppí hundrað. Einhverjum gæti dottið í hug að skrifa

$$1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+4\cdot(4+1)+...+100\cdot(100+1) = 2+6+12+20+...+10100$$

en þetta þykir ekki snyrtileg leið að tákna summu. Þess vegna skrifum við frekar

$$\sum_{n=1}^{100} n(n+1)$$

Fyrir neðan summutáknið stendur $n = 1$ sem merkir að breytistærðin sem við vinnum í er n og að við byrjum í einum. Fyrir ofan summutáknið stendur hundrað sem þýðir að við endum summuna þegar $n = 100$. Hægra megin við summutáknið stendur síðan formúlan fyrir sérhvern lið í summunni.
Summurnar sem teknar voru fram í byrjun kaflans yrðu táknaðar með

$$\sum_{n=1}^{100} n = 1+2+3+...+100$$

og

$$\sum_{n=4}^{87} \frac{1}{n}$$

Stundum lendum við í sömu vandræðum með löng margfeldi. Þess vegna innleiðum við margfeldistáknið $\prod$ sem er notað á sama hátt og summutáknið en bara fyrir margfeldi. Þannig er

$$\prod_{n=1}^{100} n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 100 \qquad \prod_{n=4}^{87}\frac{1}{n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdots\frac{1}{100}$$

og

$$\prod_{n=1}^{100} n(n+1) = 1(1+1)\cdot 2(2+1)\cdot 3(3+1)\cdots 100(100+1) = 2\cdot 6\cdot 12\cdots 10100$$

Dæmi:
(a) Reiknið:

$$\sum_{n=-3}^{5} n^2$$

(b) Reiknið:

$$\prod_{n=1}^{4}(1+n)$$

Lausn:
(a)

$$\begin{aligned}\sum_{n=-3}^{5} n^2 &= (-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\\ &= 9+4+1+0+1+4+9+16+25 = 69\end{aligned}$$

(b)

$$\prod_{n=1}^{4}(1+n) = (1+1)(1+2)(1+3)(1+4) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$

Liðun og þáttun

Liðun kallast það þegar stærðtákni sem samanstendur af einum lið er breytt í fleiri liði. Dreifireglan segir okkur hvernig liðun er framkvæmd. Lítum á nokkrar reglur um liðun:

$$\begin{aligned}
&(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd, &&\\
&(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 && \textit{(ferningsregla fyrir summu),}\\
&(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 && \textit{(ferningsregla fyrir mismun),}\\
&(a+b)(a-b) = a^2-b^2 && \textit{(samokaregla),}\\
&(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3, &&\\
&(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3. &&
\end{aligned}$$

Hér höfum við skrifað niður jöfnur sem segja að stærðtáknin sem standa beggja vegna jafnaðarmerkisins séu sama talan fyrir öll möguleg gildi á breytunum a, b, c og d . Við skulum skoða í smáatriðum hvernig reiknireglunum er beitt til þess að sýna fram á að fyrsta jafnan gildi:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= (a+b)c+(a+b)d && \textit{(dreifiregla)},\\ &= c(a+b)+d(a+b) && \textit{(víxlregla fyrir margföldun)},\\ &= ca+cb+da+db && \textit{(dreifiregla)},\\ &= ac+bc+ad+bd && \textit{(víxlregla fyrir margföldun)},\\ &= ac+ad+bc+bd && \textit{(víxlregla fyrir samlagningu)}.\end{aligned}$$

Þáttun er andhverf aðgerð við liðun. Þá er stærðtákni með fleiri en einum lið breytt í jafngilt stærðtákn sem samanstendur aðeins af þáttum. Það má hugsa sér að þáttun snúist um að beita dreifireglunni afturábak, $ab+ac=a(b+c)$, og taka þætti sem eru sameiginlegir öllum liðum út fyrir sviga.

Dæmi:
Liðið $(x-1)(x+1)^2$.
Lausn:
Við byrjum á að margfalda saman tvo sviga, notum samokareglu til að margfalda saman tvo fyrstu svigana

$$(x-1)(x+1)^2=(x-1)(x+1)(x+1)=(x^2-1)(x+1)=x(x^2-1)+(x^2-1)=x^3-x+x^2-1=x^3+x^2-x-1.$$

Dæmi:
Liðið $(x+4)^2(x-4)^2$.
Lausn:
Notum samokareglu og síðan ferningsreglu ($(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$):

$$(x+4)^2(x-4)^2=((x+4)(x-4))^2=(x^2-16)^2=x^4-2\cdot 16x^2+16^2=x^4-32x+256.$$

Dæmi:
Þáttið x^3-2x^2+x.
Lausn:
Við sjáum strax að x gengur upp í margliðunni og eftir að hafa tekið x útfyrir má nota ferningsreglu ($(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$).

$$x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2.$$

Dæmi:
Þáttið x^4-1.
Lausn:
Við beitum samokareglunni og fáum

$$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

Margliðan x^2+1 er óþættanleg í rauntölunum.

Tölugildistáknið

Látum x vera rauntölu. Fjarlægð tölunnar x frá núllpunktinum á talnalínunni köllum við *tölugildi* eða *algildi* tölunnar x. Við táknum það með $|x|$. Athugum að fjarlægð getur ekki

verið neikvæð svo að $|x| \geq 0$ fyrir öll x.
Frekar augljóst þykir að ef x er jákvæð þá er $|x| = x$. Ef hinsvegar x er neikvæð þá fæst tölugildi hennar með því að „taka mínusinn af henni". Í raun er jafngilt að margfalda hana með -1 því að þá„ hverfur mínusinn af henni". Með táknmáli er tölugildið skilgreint svona:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ef } x \geq 0 \\ -x & \text{ef } x < 0 \end{cases}$$

Dæmi:
$5 \geq 0$ svo að $|5| = 5$.
$-3 < 0$ svo að $|-3| = (-1) \cdot (-3) = 3$.

Reiknireglur fyrir tölugildistáknið

Um tölugildismerkið gilda nokkrar reglur:

Látum a og b vera rauntölur. Þá gildir eftirfarandi:

$a \leq \|a\|$	*(tölugildi getur aðeins stækkað tölu)*
$\|a\| = \|-a\|$	*(tölugildi eru óháð formerki)*
$\|a\| \cdot \|b\| = \|ab\|$	*(tölugildi varðveitir margföldun),*
$\|a\|^2 = a^2$	*(önnur veldi eyða tölugildi),*
$\|a\| + \|b\| \geq \|a+b\|$	*(þríhyrningsójafna),*

Tökum sérstaklega eftir þríhyrningsójöfnunni. Almennt gildir ekki $|a| + |b| = |a+b|$.
Það sést til dæmis ef við prófum að setja inn $a = -3$ og $b = 8$
þá er $|a| + |b| = |-3| + |8| = 3 + 8 = 11$
en $|a+b| = |-3+8| = |5| = 5$
Þetta er þó í samræmi við þríhyrningsójöfnuna því að $11 \geq 5$

Athugum að fyrir tölur a og b þá má túlka töluna $|a-b|$ sem fjarlægð a frá b á talnalínunni. T.d. ef $a = 3$ og $b = 10$ þá er fjarlægðin á milli þessara talna á talnalínunni 7. Það er í samræmi við reikninga okkar
$|3-10| = |-7| = 7$ og $|10-3| = |7| = 7$.

Dæmi:
Finnið öll x sem uppfylla $|x+4| = 10$.
Lausn:
Við komum með tvær lausnir:
(a) Jafnan $|x+4| = |x-(-4)| = 10$ segir okkur að fjarlægðin milli x og tölunnar -4 er 10.
Því er ljóst að $x = -14$ eða $x = 6$.
(2) Jafnan $|x+4| = 10$ þýðir:
Annað hvort er $x+4 = 10$ eða $x+4 = -10$
Fyrri jafnan hefur lausnina $x = 6$ og sú seinni $x = -14$.

Dæmi:
Finnið öll x sem uppfylla $|x-3| = |x+7|$.
Lausn:
Við komum með þrjár lausnir:
(a) Rúmfræðilega þýðir jafnan $|x-3| = |x-(-7)|$ að fjarlægð tölunnar x frá 3 er jöfn fjarlægðar x frá -7.Þá hlýtur x að vera talan sem er mitt á milli 3 og -7 á talnalínunni. Með öðrum orðum er x meðaltal þessara talna:

$$x = \frac{3+(-7)}{2} = -2$$

(b) Skiptum í þrjú tilvik:

1. Ef $x < -7$ þá er $x-3 < 0$ og $x+7 < 0$
   Samkvæmt skilgreiningu er því
   $|x-3| = -(x-3) = -x+3$ og
   $|x+7| = -(x+7) = -x-7$.
   Eftir stendur jafnan $-x+3 = -x-7$ sem jafngildir $3 = -7$ sem er fráleitt.
   Jafnan hefur því enga lausn x sem uppfyllir $x < -7$

2. Ef $-7 \leq x < 3$ þá er $x-3 < 0$ og $x+7 \geq 0$
   Samkvæmt skilgreiningu er því $|x-3| = -(x-3) = -x+3$ og
   $|x+7| = x+7$.
   Eftir stendur jafnan $-x+3 = x+7$ sem hefur lausnina $x = -2$.

3. Ef $x \geq 3$ þá er $x-3 \geq 0$ og $x+7 > 0$
   Samkvæmt skilgreiningu er því
   $|x-3| = x-3$ og $|x+7| = x+7$ Eftir stendur jafnan $x-3 = x+7$ sem jafngildir $-3 = 7$ sem er fráleitt.
   Jafnan hefur því enga lausn sem uppfyllir $x \geq 3$

(c) Setjum báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi. Þá eyðast tölugildin skv. reiknireglu og eftir stendur:

$$(x-3)^2 = (x+7)^2$$

sem jafngildir

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 14x + 49$$

eða

$$-20x = 40$$

$$x = -2$$

Ef þessari lausn er stungið inní upphaflegu jöfnuna þá sést að þetta er lausn sem virkar.

Athugasemd:
Takið eftir að í lausn **(c)** í dæminu hér á undan þá enda ég á því að prófa lausnina sem ég fékk. Það er af því að þegar jöfnur eru settar í annað veldi geta skapast „falskar lausnir".
Því þarf alltaf að athuga hvort lausnirnar sem fengust séu raunverulegar lausnir.
Skoðum til dæmis jöfnuna $4x = 8$.
Þessi jafna hefur augljóslega bara eina lausn $x = 2$.
Ef einhver myndi asnanst til að setja þessa jöfnu í annað veldi fengi hann jöfnuna $16x^2 = 64$ sem jafngildir $x^2 = 4$ eða $x = \pm 2$.
Hér skapaðist falska lausnin -2 sem er ekki lausn á upprunalegu jöfnunni. Upphaflega lausnin er hinsvegar ennþá til staðar.

Venjulegt og rúmfræðilegt meðaltal

Flestir kannast við venjulegt meðaltal talna:

Ef $a_1, a_2, ... a_n$ eru tölur þá er venjulegt meðaltal þeirra talan

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Væntanlega hafa færri heyrt um rúmfræðilegt meðaltal. Það er meðaltal sem er frekar notað í prósentu eða vaxtareikningi. T.d. þegar bankar tala í daglegu talu um meðalvexti á lánum þá eru þeir í raun að tala um rúmfræðilega meðaltalið.

Ef $a_1, a_2, ..., a_n$ eru jákvæðar rauntölur þá er rúmfræðilegt meðaltal þeirra talan

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Um þessi meðaltöl gildir fræg ójafna sem segir að venjulegt meðaltal af jákvæðum rauntölum er alltaf stærra en rúmfræðilega meðaltalið. Í táknmáli skrifum við þetta sem:

Ef $a_1, a_2, ..., a_n$ eru jákvæðar rauntölur þá er

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Mjög auðvelt er að sanna þetta fyrir tvær tölur. Við skulum gera það hér en sleppum sönnuninni fyrir fleiri tölur:

Þekkt er að tala í öðru veldi er alltaf jákvæð. Ef a og b eru jákvæðar rauntölur gildir því

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Ef reiknað er uppúr öðru veldinu fæst:

$$(a - 2\sqrt{ab} + b) \geq 0$$

Færum nú $2\sqrt{ab}$ yfir jafnaðarmerkið og deilum í gegn með 2 til að fá

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Dæmi:
Finnum venjulegt og rúmfræðilegt meðaltal talnanna

$$2, 3, 8, 27$$

Lausn:
Venjulegt meðaltal þeirra er

$$\frac{2+3+8+27}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Rúmfræðilegt meðaltal þeirra er

$$\sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 27} = \sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{6^4} = 6$$

Athugum að þetta er í samræmi við ójöfnuna um venjulegt og rúmfræðilegt meðaltal.

Dæmi:
Sýnum að fyrir allar jákvæðar rauntölur x gildir ójafnan $x + \frac{1}{x} \geq 2$
Lausn:
Stingum tölunum x og $\frac{1}{x}$ inní óhöfnuna um venjulegt og rúmfræðilegt meðaltal. Þá fáum við:

$$\frac{x + 1/x}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

Færum tvistinn yfir til að fá:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2\sqrt{1}=2$$

Punktar og línur í plani

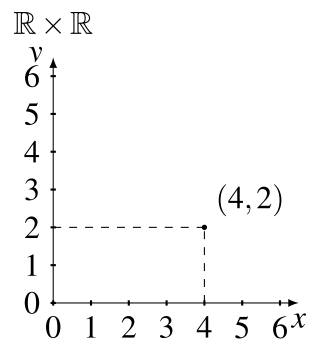
Punktar og línur eru meðal þeirra viðfangsefna stærðfræðinnar (nánar til tekið flatarmyndafræðinnar) sem við höfum góða tilfinningu fyrir úr daglegu lífi. Einmitt þess vegna er mjög erfitt að gera sér grein fyrir hvar maður á að byrja þegar rætt er um slíka hluti: Við *vitum* öll hvað línur og punktar eru þannig að allar tilraunir til að skilgreina það formlega virka stirðar, klaufalegar og óþarfar við fyrstu sýn.
Málið er hins vegar ekki alveg jafn einfalt og ætla mætti. Til þess að geta með góðu móti stundað kerfisbundnar athuganir á rúmfræði þarf fólk að koma sér saman um nákvæmlega við hvað er átt og þar duga óljósar tilvísanir í alþekkta hluti skammt.
Sú leið sem þegar upp er staðið hefur orðið fyrir valinu til að fást við rúmfræði er að skilgreina *punkta* og *línur* út frá nokkrum einföldum grundvallareiginleikum þeirra, gefa sér að nokkrar einfaldar staðreyndir (svokallaðar *frumsendur*) gildi og vinna sig út frá þeim. Mikilvægustu frumsendurnar um punkta og línur í hefðbundinni flatarmyndafræði eru:

- Í gegn um tvo ólíka punkta liggur nákvæmlega ein lína.
- Í gegn um hvern punkt liggur nákvæmlega ein lína samsíða gefinni línu.

Á frumsendunum og því sem af þeim leiðir má síðan byggja afganginn af alþekktu rúmfræðinni sem við höfum tilfinningu fyrir úr daglegu lífi.
Punktar í rúmfræði hafa enga stærð og línur í rúmfræði teygja sig óendanlega langt í hvora átt. Ef A og B eru tveir punktar og ℓ er lína sem liggur um punktana þá er sá hluti línunnar sem liggur á milli punktanna kallaður *strikið* eða *línustrikið* frá A til B.
Yfirleitt er ekki gerður greinarmunur á línu annars vegar og mengi þeirra punkta sem liggja á línunni hins vegar. Um hvern punkt A liggja tvær hálflínur samsíða gefinni línu ℓ, ein í hvora átt, og samanstendur önnur af þeim punktum línunnar m sem liggur um A samsíða ℓ sem eru öðrum megin við A en hin af þeim sem eru hinum megin. Punkturinn A er sjálfur innihaldinn í báðum hálflínunum.

Hnitakerfið

Til að geta betur táknað punkta og línur í sléttunni þá innleiðum við hnitakerfi. Hnitakerfið er í raun sú mynd sem við gerum okkur af menginu $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
Tvær talnalínur eru lagðar í kross þannig að þær standi hornréttar á hvora aðra og skerist í núllpunktum sínum. Lárétta talnalínan er oftast kölluð x-ásinn og sú lóðrétta y-ásinn.
Til að marka punkt (a,b) inn á svona hnitakerfi þá teiknum við lóðrétta línu í gegnum punktinn a á x-ásnum og lárétta línu í gegnum punktinn b á y-ásnum. Þar sem línurnar skerast mörkum við punktinn (a,b).
Á mynd til hliðar má sjá hvar punkturinn $(4,2)$ hefur verið markaður inn í hnitakerfið.



Jafna Línu í hnitakerfinu

Til að tákna línur í hnitakerfinu er algengt að nota jöfnur.
Jafna línu er jafna af gerðinni

$$ax + by = c$$

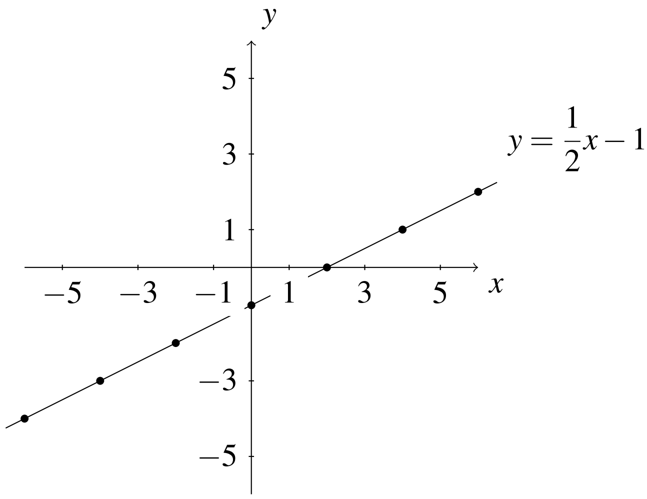
Þar sem $a, b, c \in \mathbb{R}$ eru fastar.

Við skulum nú útskýra af hverju þessi jafna er sögð jafna beinnar línu.
Það verður best gert með dæmi:

Dæmi:
Skoðum jöfnuna

$$-\frac{1}{2}x + y = -1$$

Hér er $a = -1/2$, $b = 1$ og $c = -1$ miðað við framsetninguna að ofan.
Finnum nú nokkur gildi á x og y sem uppfylla þessa jöfnu og mörkum samsvarandi punkta (x, y) í hnitakerfið.
Ef $x = 0$ og $y = -1$ þá stenst jafnan. Við mörkum því punktinn $(0, 1)$ í hnitakerfið.
Ef $x = 2$ og $y = 0$ þá stenst jafnan. Við mörkum því punktinn $(2, 0)$ í hnitakerfið.
Á sama hátt getum við markað punktana $(-6, -4)$, $(-4, -3)$, $(-2, -2)$, $(4, 1)$ og $(6, 2)$ í hnitakerfið því að ef að þessum hnitum er stungið inní jöfnuna þá stenst hún. Það hefur verið gert hér til hliðar.
Þegar þessir punktar hafa verið markaðir inn sést að þeir liggja á beinni línu. Í ljós kemur að allir punktar sem eru lausn á þessari jöfnu liggja á þessasri línu. Það sem meira er þá eru allir punktar á þessari línu lausn á upphaflegu jöfnunni. Þess vegna segjum við að jafnan



$$-\frac{1}{2}x + y = -1$$

sé jafna línunnar sem fram kemur á myndinni til hliðar.

Í mengjafræðilegum skilningi þá er myndin af línunni í hnitakerfinu í raun mynd af menginu

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\, -\frac{1}{2}x + y = -1\}$$

Hallatala og skurðpunktur við ása

Ef $b \neq 0$ og breytan y er einangruð úr jöfnunni

$$ax + by = c$$

Þá fæst

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Við getum endurskýrt fastana í þessari jöfnu, setjum $h = -a/b$ og $s = c/b$ svo að jafnan líti betur út

$$y = hx + s$$

Miðað við þessa framsetningu þá er fastinn h oftast kallaður hallatala línunnar og fastinn s táknar skurðpunkt við y-ás.

Auðvitað er ástæða fyrir þessum nafngiftum.
Fastinn h kallast hallatala línunnar því að með honum er hægt að túlka hversu mikið línan hallar. Nefnilega ef (x_0, y_0) er einhver punktur á línunni þá getum við fullyrt að punkturinn $(x_0, y_0) + (1, h) = (x_0 + 1, y_0 + h)$ sé á línunni.
Með öðrum orðum, ef að við vitum einn punkt á línunni þá getum við fundið þann næsta með því að færa okkur fyrst einn til hægri í hnitakerfinu og síðan h upp.
Formlega skilgreiningin á hallatölu línu er svohljóðandi:

Ef l er lína í hnitakerfinu sem er ekki lóðrétt þá er til fasti h þannig að fyrir sérhverja tvo punkta (x_1, y_1) og (x_2, y_2) á línuni þá er

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = h$$

Þessi fasti kallast hallatala línunnar l

Fastann s er auðveldara að útskýra. Þessa tölu köllum við skurðpunkt við y-ás af því að þessi tala segir okkur hvar línan sker y-ásinn. Línan mun skera ásinn í punktinum $(0, s)$. Það sést af því að ef að punktinum $(x, y) = (0, s)$ er stungið inní jöfnuna

$$y = hx + s$$

Þá fæst

$$s = h \cdot 0 + s \qquad \text{eða} \qquad s = s$$

svo jafnan stenst.

Skurðpunkt við x-ás er auðvelt að finna. Við einfaldlega setjum $y = 0$ inní jöfnu línunnar og leysum út x.

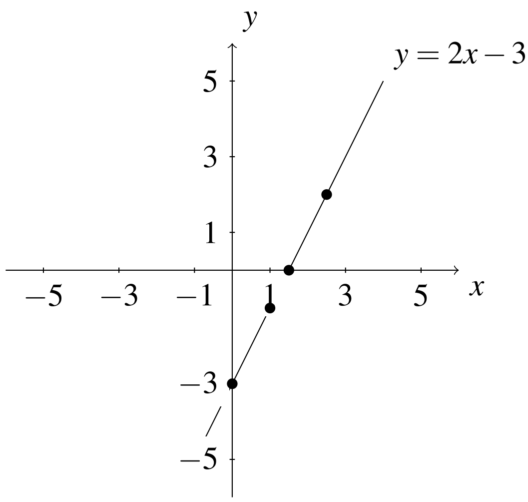
$$0 = hx + s \qquad \text{gefur} \qquad x = -\frac{s}{h}$$

Skurðpunktur línunnar við x-ásinn er því punkturinn $(-s/h, 0)$

Dæmi:
Teiknið línuna

$$y = 2x - 3$$

Lausn:



Skurðpunktinn við y-ás fæst beint útúr jöfnunni. Hann hefur hnit $(0, -3)$ Við mörkum hann því inná hnitakerfið.
Hallatala línunnar er tveir. Við færum okkur þess vegna einn til hægri og tvo upp frá skurðpunktinum og mörkum $(0 + 1, -3 + 2) = (1, -1)$ inná hnitakerfið.
Skv. jöfnu að ofan fæst svo að skurðpunktur við x-ás er $(-(-3)/2, 0) = (3/2, 0)$ Við mörkum hann líka inná hnitakerfið.
Hallatala línunnar er tveir við getum því markað punktinn $(3/2 + 1, 0 + 2) = (5/2, 2)$ inná hnitakerfið.

Nú erum við búin að marka fjóra punkta inná hnitakerfið og í gegnum þá má teikna línu.
Athugum að tveir punktar nægja til að skilgreina línu,

það hefði því verið nóg að finna einhverja tvo af þessum fjórum punktum sem fundnir voru í dæminu.

Meira um jöfnu línu

Stundum fáum við gefna tvo punkta (x_1, y_1) og (x_2, y_2) og þurfum að finna jöfnu línunnar sem gengur í gegnum þá. Það er gert á eftirfarandi hátt:

Finna skal jöfnu línu sem gengur í gegnum punkta (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

1. *Hallatala línunnar ,h, fæst með formúlunni*

$$h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. *Skurðpunktur við y-ás ,s, fæst svo með formúlunni*

$$s = y_1 - x_1 h$$

Jafna línunnar verður þá $y = hx + s$

Auðvelt er að rökstyðja af hverju þetta virkar. Hallatalan er reiknuð beint útúr formlegu skilgreiningunni sem gefin var á henni að ofan.
Síðan þarf að reikna út fastan s. Við vitum að línan gengur í gegnum punktinn (x_1, y_1) svo jafnan $y_1 = hx_1 + s$ þarf að ganga upp. Við getum því einangrað s úr þessari jöfnu til að fá $s = y_1 - hx_1$.

Dæmi:
Finnið jöfnu línunnar sem gengur í gegnum punktana $(1, 2)$ og $(13, 17)$.
Lausn:

1. Hallatala línunnar er

$$h = \frac{17 - 2}{13 - 1} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

2. Skurðpunktur við y-ás fæst með

$$s = 1 - 2 \cdot \frac{5}{4} = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

Jafna línunnar er þess vegna

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$$

Dæmi:
Látum l vera línuna sem gengur í gegnum punktana $(-2, 3)$ og $(1, 12)$.
Finnið jöfnu línu sem gengur í gegnum punktinn $(2, 2)$ og er samsíða línunni l.
Lausn:
Köllum línuna sem við erum að leita að m. Það að línurnar l og m séu samsíða þýðir að þær hafa sömu hallatölu. Til að finna hallatölu línunnar m nægir því að finna hallatölu línunnar l.
Hallatalan er:

$$h = \frac{12 - 3}{1 - (-2)} = \frac{9}{3} = 3$$

Jafna línunnar m er því af gerðinni

$$y = 3x + s$$

en við eigum eftir að finna s.
Gefið er að punkturinn $(2, 2)$ er á línunni svo jafnan þarf að standast þegar $(x, y) = (2, 2)$ er stungið inní hana. Með öðrum orðum er

$$2 = 3 \cdot 2 + s \qquad \text{sem jafngildir} \qquad s = 2 - 6 = -4$$

Jafna línunnar m er því

$$y = 3x - 4$$

Skurðpunktur lína

Oft getur verið gagnlegt að finna skurðpunkt tveggja lína sem eru ekki samsíða (ef þær eru samsíða þá er enginn skurðpunktur til).
Mjög gagnlegt er að þekkja jöfnu línanna ef markmiðið er að finna skurðpunkt þeirra.
G.r.f. að jöfnur línanna l og m séu gefnar:

$$l: \quad a_1x + b_1y = c_1$$

$$m: \quad a_2x + b_2y = c_2$$

Nú er litið á þessar jöfnur sem svo að fastarnir $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ séu þekktir. Því má líta á jöfnur línanna sem tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum, x og y. Lausnin á jöfnuhneppinu verður skurðpunktur línanna, en hún er:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \text{og} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Dæmi:
G.r.f. að l sé línan sem gengur í gegnum punktana $(1,2)$, $(3,3)$.
Látum m vera línuna sem er gefin með jöfnunni $2x + 3y = 5$
Finnið skurðpunkt l og m.
Lausn:
Byrjum á því að finna jöfnu línunnar l.
Hallatala hennar er

$$h = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$$

Jafna l er þá af gerðinni

$$l: \quad y = \frac{1}{2}x + s$$

og s fæst með því að setja þekktan punkt á línunni inní þessa jöfnu. Vitað er að $(1,2)$ er á línunni svo að:

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + s \qquad \text{sem gefur} \qquad s = \frac{3}{2}$$

Jafna l er því

$$l: \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Jafna m er þekkt

$$m: \quad 2x + 3y = 5$$

Lítum á jöfnur línanna sem tvær jöfnur í tveimur óþekktum stærðum, x og y og reynum að leysa úr.
Við höfum nú þegar einangrað y úr jöfnu l. Stingum því inní jöfnu m:

$$2x + 3\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 5 \qquad \text{sem jafngildir} \qquad \frac{7}{2}x + \frac{9}{2} = 5$$

Sem gefur svo $x = 1/7$.
Ef þessu gildi á x er stungið inní jöfnu línunnar l fæst

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{2} = \frac{11}{7}$$

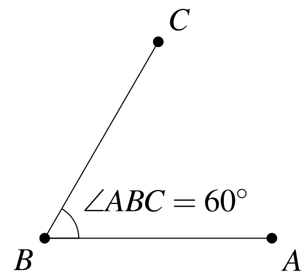
Skurðpunktur línanna er þess vegna:

$$(x,y) = \left(\frac{1}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

Horn

Horn nefnist sú mynd sem fæst þegar tvær hálflínur eru dregnar út frá sama punkti. Þessi punktur er kallaður oddpunktur hornsins, en hálflínurnar armar þess.

Stærð hornsins er mælt í *gráðum* eða *bogaeiningum*. Gráður eru táknaðar með merkinu „° ” en einfaldlega er skrifað „Rad” fyrir bogaeiningar. Eins og er þá munum við nota gráður í alla reikninga okkar en í seinni köflum munum við skipta yfir í bogaeiningar sem í vissum skilningi er mun náttúrulegri mælieining á horn.
Ein gráða er skilgreind sem einn-þrjúhundruðogsextugasti hluti úr hring.
Með öðrum orðum er 360° heill hringur.

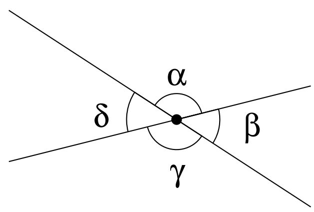


Þá verður horn sem er 180° bein lína og horn sem er 90° köllum við rétt horn.
Horn sem er stærra en 0° en minna en 90° köllum við hvasst horn en horn sem er stærra en 90° en minna en 180° köllum við gleitt horn.

Segjum að þrír punktar í sléttunni, A,B og C, séu gefnir. Hornið sem myndast þegar farið er frá A til B og svo í C er oft táknað með $\angle ABC$.
Lengd línustriksins milli punktana A og B er oft táknað með $|AB|$

Topphorn og grannhorn.

Þegar tvær línur skerast myndast fjögur horn. Hornin sem standa á móti horu öðru kallast topphorn. Horn sem standa hlið við hlið kallast grannhorn.
Á mynd til hliðar eru α og γ topphorn
β og δ eru líka topphorn.
α og β eru grannhorn.
Fleiri grannhorn eru β og γ, γ og δ eða α og δ.



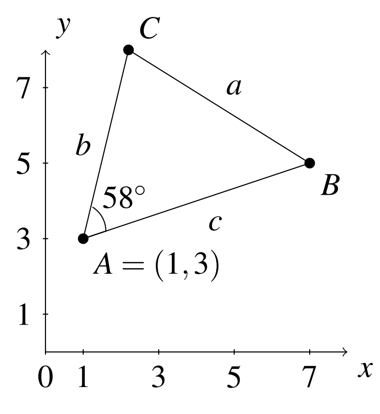
Um topphorn og grannhorn gilda einfaldar reglur:

1. *Topphorn eru jafnstór.*
2. *Summa grannhorna er* 180°.

Þríhyrningar

Ferill sem samanstendur af þremur línustrikum sem mætast tvö og tvö í þremur hornum nefnist *þríhyrningur*.

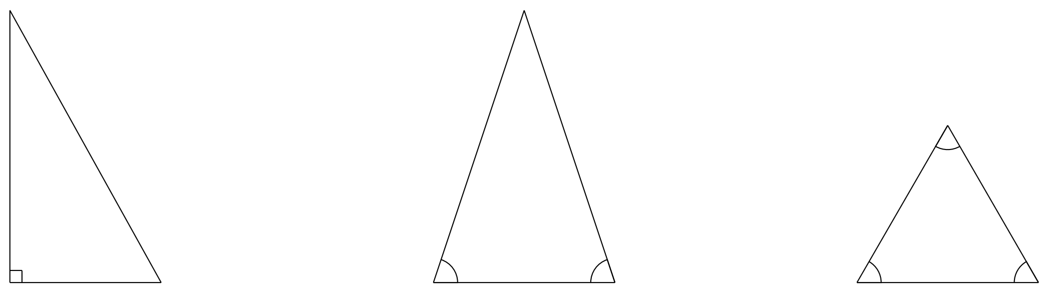
Algengast er að tákna hornpunkta þríhyrningsins með stórum stöfum, oftast A,B og C. Hliðar þríhyrningsins eru táknaðar með litlum bókstöfum sem samsvara nöfnum hornpunktana. Þannig er hliðin sem stendur á móti



hornpunktinum A oftast látin heita a, hliðin sem stendur á móti B látin heita b o.s.fr.
Algengt er að nefna þríhyrninga eftir hornpunktum sýnum með lítið þríhyrningsmerki fyrir framan. Þannig er þríhyrningur með hornpunkta A, B og C oft kallaður þríhyrningurinn ΔABC.

Athugum að hefð er fyrir því að tákna horn þríhyrninga með sama tákni og er notað fyrir hornpunktinn. Ímyndum okkur til dæmis þrihyrning í hnitakerfinu sem hefur hornpunkt í $(1,3)$ og samsvarandi horn $58°$. Nefnum þennan hornpunkt A. Þá má bæði skrifa $A = (1,3)$ og $A = 58°$. Við táknum semsagt bæði hornpunktinn og hornið sjálft með bókstafnum A. Þetta ætti ekki að valda misskilningi því að út frá samhengi á alltaf að sjást hvort um er að ræða hornið eða punktinn.

Þríhyrningur er sagður rétthyrndur ef eitthvert horna hans er rétt (sem er $90°$).
Þríhyrningur er sagður jafnarma ef tvær hliðar hans eru jafnlangar.
Þríhyrningur er sagður jafnhliða ef allar hliðar hans eru jafn langar.



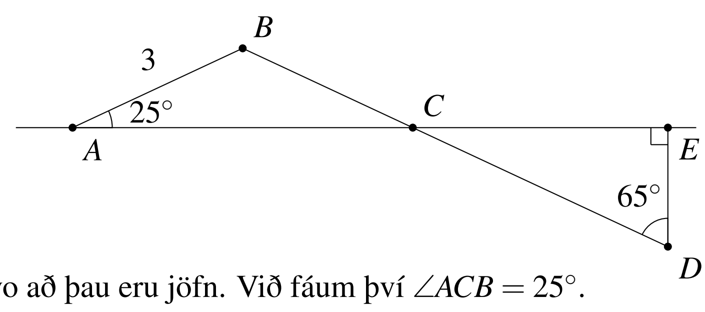
Rétthyrndur þríhyrningur **Jafnarma þríhyrningur** **Jafnhliða þríhyrningur**

Á myndum er rétt horn yfirleitt táknað með litlum kassa í hornið eins og á myndinni hér að ofan.
Um þríhyrninga gilda þessar einföldu reglur:

1. *Hornasumma þríhyrnings er* $180°$.
2. *Þríhyrningur er jafnarma þ.þ.a.a. tvö horn hans séu jafn stór. Hornin sem eru jafn stór standa á móti jafnstórum hliðum.*
3. *Þríhyrningur er jafnhliða þ.þ.a.a. öll horn séu* $60°$.

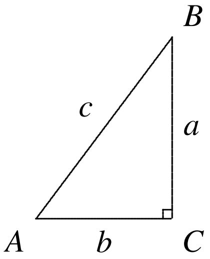
Dæmi:

Gefið er að $|AB| = 3$.
Einnig er gefið að punktarnir B, C og D liggja á beinni línu.
Finnið $|BC|$.



Lausn:
Hornasumma þrihyrnings er $180°$. Við beytum þeirri reglu á þríhyrninginn DEC til að fá $\angle ECD = 180° - 90° - 65° = 25°$
Nú eru hornin $\angle ECD$ og $\angle ACB$ topphorn svo að þau eru jöfn. Við fáum því $\angle ACB = 25°$.
Af þessu sést að þríhyrningurinn ABC er jafnarma. Skv. reglu um jafnarma þríhyrninga eru þá línustrikin AB og BC jafnlöng svo að $|BC| = 3$

Regla Pýþagórasar



Regla Pýþagórasar er sáraeinföld, hún segir:

G.r.f. að c sé lengsta hliðin í
rétthyrndum þríhyrningi og að a og b séu styttri hliðarnar, þá gildir

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Regla Pýþagórasar á sér líka andhverfu, hún hljómar svona:

G.r.f. að a, b og c séu hliðar í þríhyrningi og að þær uppfylli jöfnuna

$$a^2 + b^2 = c^2$$

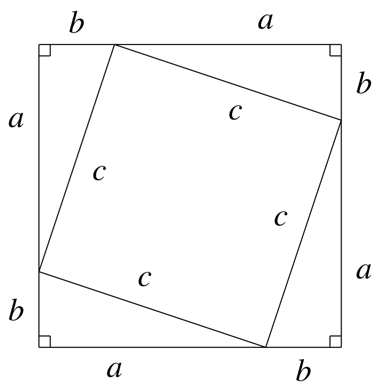
Þá er þríhyrningurinn rétthyrndur með rétt horn mótlægt hliðinni c.

Sönnunin á reglu Pýþagórasar er klassísk og verður gert skil á henni hér:

.

Röðum fjórum rétthyrndum þríhyrningum upp þannig að þeir myndi ferning eins og á myndinni til hliðar. Köllum flatarmál ferningsins F. Hægt er að mæla flatarmál þessa fernings á tvo mismunandi vegu. Í fyrsta lagi er flatarmál hans jafnt hliðarlengdinni í öðru veldi:

$$F = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



Í öðru lagi er hægt að leggja saman flatarmál allra fjögurra þríhyrninganna og ferningsins í miðjunni sem hefur hliðarlengd c, en þá fæst að flatarmálið er

$$F = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$$

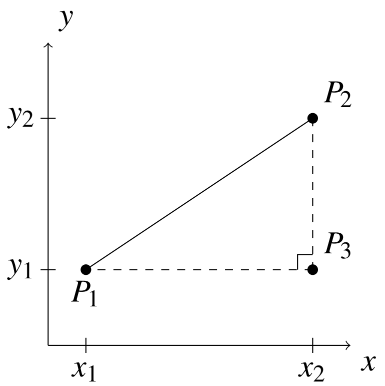
Nú höfum við fengið að

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2 \qquad \textit{sem gefur} \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

Dæmi:
Gefinn er rétthyrndur þríhyrningur með skammhlið 4 og langhlið 5. Finnið hina skammhlið þríhyrningsins.
Lausn:
Köllum óþekktu hliðina x. Af reglu Pýþagórasar fæst þá $5^2 = x^2 + 4^2$. Færum yfir jafnaðarmerkið til að fá $x^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$.
Þá er ljóst að $x = \sqrt{9} = 3$

Dæmi:
Athugið hvort þríhyrningur með hliðarlengdir 5,6,7 er rétthyrndur.
Lausn:
Við notum reglu Pýþagórasar, þríhyrningurinn er rétthyrndur ef og aðeins ef $7^2 = 6^2 + 5^2$, en $7^2 = 49$ og $5^2 + 6^2 = 61$ svo að þríhyrningurinn er ekki rétthyrndur.

Fjarlægð milli punkta í hnitakerfi



Látum nú $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$ vera tvo punkta í hnitakerfinu. Nú er hægt að nota reglu Pýþagórasar til að finna fjarlægðina á milli þeirra.
Mörkum punktinn (x_2, y_1) inná hnitakerfið og köllum hann P_3. Þá sést að punktarnir P_1, P_2, P_3 mynda rétthyrndan þríhyrning.
Fjarlægðin milli punktanna P_1 og P_3 er $|x_2 - x_1|$, m.ö.o. er $|P_1P_3| = |x_2 - x_1|$
Fjarlægðin milli punktanna P_2 og P_3 er $|y_2 - y_1|$, m.ö.o. er $|P_2P_3| = |y_2 - y_1|$
Þetta eru skammhliðarnar í þríhyrningnum, af reglu Pýþagórasar fæst nú beint eftirfarandi regla:

Fjarlægðin milli punktanna $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$ í hnitakerfinu er

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dæmi:
Hver er fjarlægðin milli punktanna $(1,2)$ og $(5,7)$ í hnitakerfinu?
Lausn:
Hér er $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $y_1 = 2$ og $y_2 = 7$.
Setjum þetta ínní jöfnuna að ofan og fáum að fjarlægðin milli punktanna er

$$\sqrt{(5-1)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \approx 6,403124$$

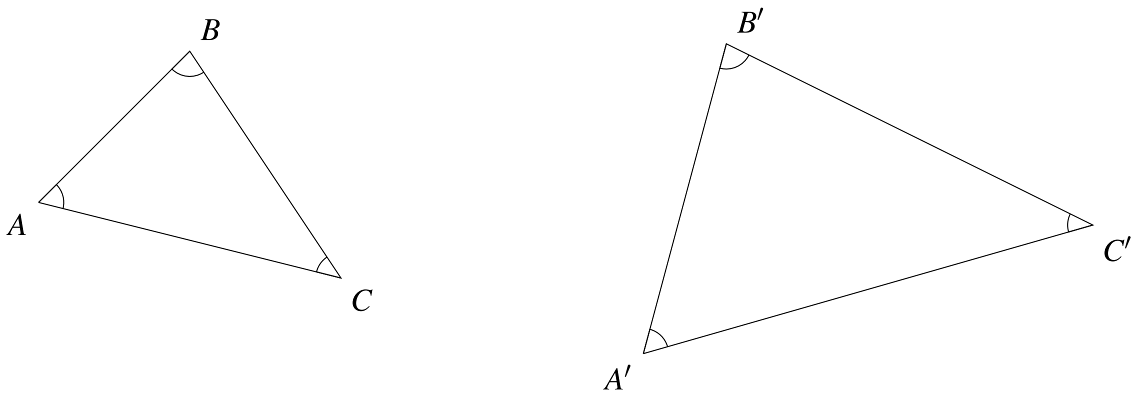
Einslaga þríhyrningar

Setjum fram skilgreininguna á einslaga þríhyrningum:

Tveir þríhyrningar eru sagðir einslaga ef að öll hornin þeirra eru jafnstór.

Þessi skilgreining þýðir að tveir þríhyrningar eru einslaga ef þeir eru eins í laginu. Þeir mega vera misstórir og annar má snúa öðruvísi en hinn en það eina sem skiptir máli er að þeir hafi jafnstór horn.

Einslaga þríhyrningar



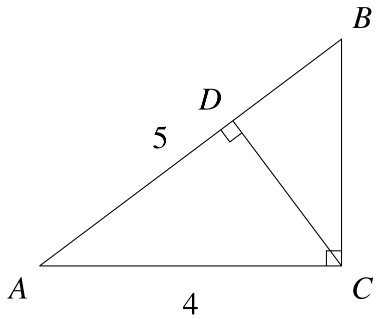
Um einslaga þríhyrninga gildir mjög mikilvæg regla:

Ef þríhyrningar ΔABC og $\Delta A'B'C'$ eru einslaga, hornið A er jafnt horninu A', B er jafnt horninu B' og C er jafnt horninu C'. Þá er hlutfallið milli samsvarandi hliða í þríhyrningunum jafnt.
Þ.e.a.s.

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|}, \qquad \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} \qquad og \qquad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|}$$

Athugum að ef tvö horn í þríhyrningi eru þekkt þá fæst það þriðja sjálfkrafa því að hornasumma þríhyrnings er fasti, 180°. Þess vegna fæst að ef tveir þríhyrningar hafa tvö jafnstór horn þá verða sjálfkrafa síðustu hornin jafnstór. M.ö.o. það nægir að athuga hvort að tvö horn séu jafnstór til að skera úr um hvort þríhyrningarnir séu einslaga.

Dæmi:
Gefinn er rétthyrndur þríhyrningur ABC með rétt horn í C. Gefið er að $|AC| = 4$ og $|AB| = 5$. Látum D vera punktinn á strikinu AB þannig að strikið DC verði hornrétt á AB.
Finnið $|CD|$



Lausn:
Notum reglu Pýþagórasar til að finna $|BC|$.

$$|BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

Við fáum þá $|BC| = \sqrt{9} = 3$
Berum nú saman þríhyriningana ΔABC og ΔACD. Þeir hafa báðir eitt horn sem er 90° og þeir hafa eitt sameiginlegt horn. Nefnilega hornið $\angle BCA$. Þessir þríhyrningar hafa þess vegna tvö horn eins og eru þvi einslaga. Við getum þessvegna beitt reglunni að ofan. Maður verður að passa sig að velja hliðarnar rétt.
Hér samsvarar hliðin BC í ΔABC hliðinni CD í ΔACD
Hliðin AB í ΔABC samsvarar svo hliðinni AC í ΔACD
Samkvæmt reglu um einslaga þríhyrninga er þess vegna

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

eða

$$|CD| = |AC|\frac{|BC|}{|AB|} = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

Dæmi:
Látum ABC og DEF vera einslaga þríhyrninga með $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$. Látum $|AB| = 10$, $|DE| = 5$, $|BC| = 6$. Finnið $|EF|$.
Lausn:
Þar sem þríhyrningarnir eru einslaga vitum við að

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$$

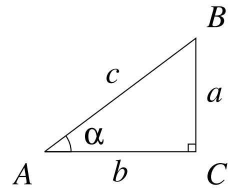
sem umritast í

$$|EF| = \frac{|DE||BC|}{|AB|} = \frac{5 \cdot 6}{10} = 3.$$

Hornaföllin

Í þessum kafla munum við skilgreina hornaföllin $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ og $\cot(\alpha)$ fyrir eitthvað horn α stærra en 0° en minna en 90°. Það þarfnast smá undirbúnings.

Látum α vera horn þ.a. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Teiknum nú einhvern rétthyrndan þríhyrning ΔABC með rétt horn í C, þannig að hornið A sé jafnt horninu α. Merkjum hliðarnar sem a, b og c samkvæmt hefð. Skoðum nú hlutfallið a/c.



Tökum eftir því að þetta hlutfall er eingöngu háð horninu α en er ekki háð því hvernig rétthyrndi þríhyrningurinn var teiknaður.
Með öðrum orðum, hefðum við teiknað öðruvísi rétthyrndan þríhyrning $\Delta A'B'C'$ með rétt horn í C' og þannig að hornið A' er jafnt horninu α þá væru þríhyrningarnir ΔABC og $\Delta A'B'C'$ einslaga og því fengist

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$$

Þar sem að þetta hlutfall er eingöngu háð α en ekki sjálfum þríhyrningnum getum við þess vegna skilgreint

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

Þar sem ΔABC er einhver þríhyrningur teiknaður eftir leiðbeiningunum að ofan.
Á sama hátt má sjá að hlutföllin b/c, a/b og b/a eru eingöngu háð upphaflega horninu α.
Þess vegna skilgreinum við:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{a}{c} = \text{mótlæg skammhlið deild með langhlið,}\\
\cos\alpha &= \frac{b}{c} = \text{aðlæg skammhlið deild með langhlið,}\\
\tan\alpha &= \frac{a}{b} = \text{mótlæg skammhlið deild með}\\
&\qquad \text{aðlægri skammhlið,}\\
\cot\alpha &= \frac{b}{a} = \text{aðlæg skammhlið deild með}\\
&\qquad \text{mótlægri skammhlið.}
\end{aligned}$$

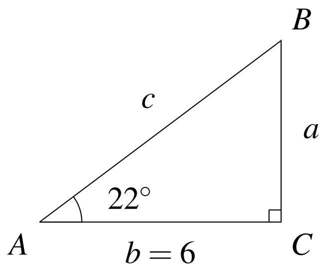
Hér er hliðin a kölluð mótlæg skammhlið því að það er skammhliðin sem liggur á móti horninu A. Hliðin b er kölluð aðlæg skammhlið út af svipuðum ástæðum og hliðin c er kölluð langhlið rétthyrnda þríhyrningsins eins og áður.

Athugasemd 1:
Á íslensku eru hornaföllin borin fram svona:
Hornafallið sin er borið fram „sínus".
Hornafallið cos er borið fram „kósínus".
Hornafallið tan er borið fram „tangens".
Hornafallið cot er borið fram „kótangens".

Athugasemd 2:
Hornaföllin má finna á öllum alvöru vasareiknum. Áður en reiknað er með hornaföllum í vasareikni skal athuga hvernig vasareiknirinn er stilltur. Hægt er að stilla hann á gráður, radíönur eða aðrar mælieiningar á horn. Ef vasareiknirinn er stilltur á aðra mælieiningu en verið er að vinna með fást kolvitlausar niðurstöður.

Dæmi:

Gefinn er rétthyrndur þríhyrningur ΔABC með rétt horn í C. Gefið er að hornið A er 22° og $b = 6$. Finnið a og c.



Lausn:
Nú er

$$\tan(22^\circ) = \frac{a}{b} = \frac{a}{6}$$

svo að:

$$a = 6\tan(22^\circ) \approx 2,42416$$

Einnig fæst

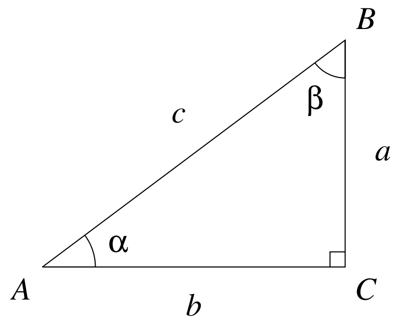
$$\cos(22^\circ) = \frac{b}{c} = \frac{6}{c}$$

svo að:

$$c = \frac{6}{\cos(22^\circ)} \approx 6,47121$$

Hornafallareglur

Um hornaföllin gilda nokkrar reglur sem auðvelt er að sanna



Fyrir öll α *þ.a.* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ *gildir:*

1. $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
2. $\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$
3. $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$
4. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$
5. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$

Sönnum þetta:

Fyrir alla liðina munum við velja þríhyrning ΔABC *sem er þannig að hornið* C *sé* 90°*, hornið* A *sé jafnt* α *og við látum hliðarnar heita* a*,* b *og* c *í samræmi við hefð. Fyrir ofan er mynd af honum.*

1. *Skv. skilgreiningu þá er* $\sin(\alpha) = a/c$, $\cos(\alpha) = b/c$ *og* $\tan(\alpha) = a/b$.
   Því fæst:
   $$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = \tan(\alpha)$$
2. *Skv. skilgreiningu þá er* $\tan(\alpha) = a/b$ *og* $\cot(\alpha) = b/a$.
   Því fæst:
   $$\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{1}{a/b} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

3. *Munum að þríhyrningurinn sem unnið er með er rétthyrndur svo um hliðar hans gildir* $a^2 + b^2 = c^2$.
Við fáumm þess vegna:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

4. *Látum* $\beta = 90^\circ - \alpha$.
Tökum eftir því að í þríhyrningnum ΔABC *er* $A = \alpha$, $C = 90^\circ$ *og því fæst* $B = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha = \beta$.
Nú er hægt að finna $\sin(\beta)$ *beint út frá skilgreiningu miðað við þríhyrninginn* ΔABC.
Við höfum víxlað hornum, svo að aðlæg skammhlið víxlast við mótlæga skammhlið en langhliðin helst sú sama.
Því fæst:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin(\beta) = \frac{b}{c} = \cos(\alpha)$$

5. *Röksemdarfærslan er sú sama og í lið fjögur.*

Þekkt horn

Á þessu stigi í stærðfræði er frekar ómögulegt að reikna í höndunum sínusa eða kósínusa af flestum hornum. Því látum við yfirleitt vasareikninn sjá um það fyrir okkur.
Þó eru nokkur horn sem auðvelt er að reikna. Dæmi um slík horn eru 30°, 45° og 60°. Hér kemur tafla yfir gildi hornafallanna í þessum hornum.

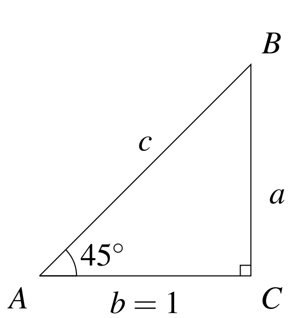
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Í þessum kafla munum við sýna hvernig útkomurnar $\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eru fengnar. Ef búið er að sýna þetta þá fæst afgangurinn af töflunni auðveldlega með því að nota reglurnar í kaflanum á undan. Við mælum með þvi að duglegir nemendur spreyti sig á því að fylla út töfluna.

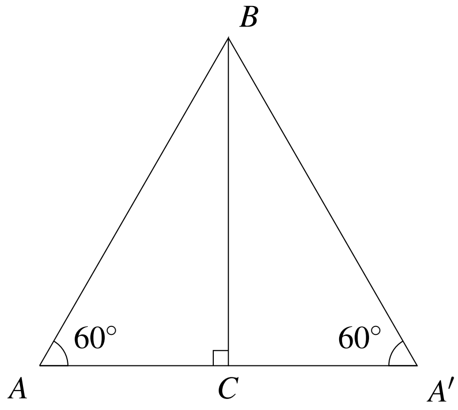
Byrjum á $\sin(45^\circ)$:

Teiknum rétthyrndan þríhyrning ΔABC sem hefur rétt horn í C, hornið A er 45° og hliðarlengdin b er 1.
Skv. skilgreiningu er þá $\sin(45^\circ) = b/c = 1/c$.
Tökum eftir að $B = 45^\circ$.
Tvö horn þríhyrningsins eru jafn stór, og því er hann jafnarma, því er $a = 1$.
Nú notum við Pýþagóras til að fá $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ og að lokum fæst:

$$\sin(45^\circ) = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Reiknum nú $\sin(60^\circ)$



Teiknum rétthyrndan þríhyrning ΔABC sem hefur rétt horn í C, hornið A er 60° og hliðarlengdin $|AC|$ er 1.
Þá er skv. skilgreiningu $\sin(60^\circ) = |BC|/|AB|$.
Speglum nú þríhyrningnum yfir hliðina BC og mörkum nýjan punkt A' þar sem punkturinn A lendir.
Þá er $|CA'| = |AC| = 1$ og $|AA'| = 2$
Tökum eftir að í í þríhyrningnu, $\Delta ABA'$ eru tvö horn 60° svo það þriðja er líka 60°. Þríhyrningurinn $\Delta ABA'$ er þess vegna jafnhliða svo allar hliðar hans eru jafn langar. Við vitum að $|AA'| = 2$ svo að $|AB| = 2$.
Nú getum við notað Pýþagóras á þríhyrninginn ΔABC til að finna hliðina $|BC|$.

$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

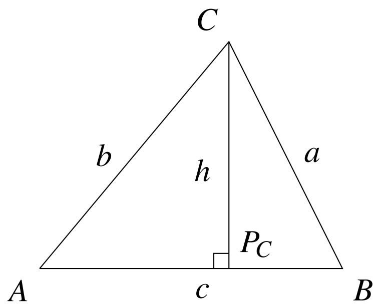
En nú höfum við allar upplýsingar til að reikna sínusinn

$$\sin(60^\circ) = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Flatarmál þríhyrnings

Flestir nemndur ættu að þekkja klassíksu jöfnuna til að reikna flatarmál þríhyrnings

$$Flatarmál = \frac{grunnlína \cdot hæð}{2}$$



Hún er notuð þannig að fyrst er valin hlið á þríhyrningnum sem við köllum grunnlínu. Næst er teiknað strik frá hornpunktinum sem er mótlægur grunnlínunni, niður á grunnlínuna þannig að grunnlínan og strikið eru horrétt. Þetta strik er kallað hæð þríhyrningsins og oftast táknað með h.
Miðað við þrihyrninginn til hliðar þá er grunnlínan hliðin c og hæðin nær uppí topppunktinn C. Hér yrði flatarmálið $\frac{ch}{2}$.
Í reikningi kemur oft fyrir að hæðin h er ekki gefin og þá getur verið vandasamt að reikna flatarmálið, í þeim tilfellum geta hornaföllin komið okkur til hjálpar.
Köllum fótpunkt hæðarinnar í þríhyrningnum P_C. Með því að skoða þríhyrninginn ACP_C sést að

$$\sin(A) = \frac{h}{b} \qquad \text{eða} \qquad h = b\sin(A)$$

Flatarmál þríhyrningsins verður þess vegna

$$F = \frac{ch}{2} = \frac{1}{2}cb\sin(A)$$

. Hér höfum við leitt út nýja reglu fyrir flatarmál þríhyrnings:

Ef ΔABC er þríhyrningur með hliðar a, b og c merktar skv. hefð, þá er flatarmál hans

$$F = \frac{1}{2}ab\sin(C) = \frac{1}{2}ac\sin(B) = \frac{1}{2}bc\sin(A)$$

Dæmi:
Gefinn er rétthyrndur þríhyrningur með langhlið 13 og skammhlið 5. Finnið flatarmál þríhyrningsins.
Lausn:
Við byrjum á að finna hina skammhliðina. Hún er $\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$. Þá er auðvelt að reikna flatarmálið. $A=12\cdot 5\cdot \frac{1}{2}=30$.

Dæmi:
Gefinn er þríhyrningur ΔABC með $a=3$ $b=8$ og $C=60°$. Finnið flatarmálið.
Lausn:
Skv. töflu að ofan þá er $\sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ því fáum við

$$F=ab\sin(C)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot \sin(60°)=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

Sínus- og kósínusreglurnar

Skoðum aðeins betur jöfnuna fyrir flatarmál þríhyrnings.
Hún gefur $\frac{1}{2}ab\sin(C)=\frac{1}{2}ac\sin(B)=\frac{1}{2}bc\sin(A)$
Ef við margöldum í gegnum þessa jöfnu með stærðinni $\frac{2}{abc}$ fæst fræg regla sem er oftast köllus sínusreglan:

Ef ΔABC er þríhyrningur með hliðar a,b og c merktar skv. hefð, þá er

$$\frac{\sin(C)}{c}=\frac{\sin(B)}{b}=\frac{\sin(A)}{a}$$

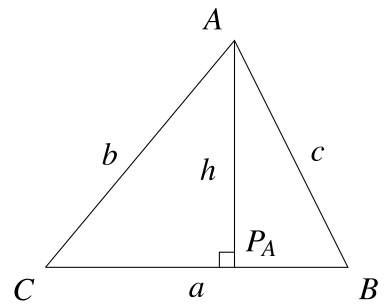
Að lokum setjum við fram fræga reglu sem er oftast kölluð kósínusreglan:

Ef ΔABC er þríhyrningur með hliðar a,b og c merktar skv. hefð, þá er

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(C)$$

Takið eftir hvað kósínusreglan líkist reglu Pýþagórasar. Þær eru eins fyrir utan að í kósínusreglunni bætist við liður $-2ab\cos(C)$. Í rauninni er regla Pýþagórasar bara sértilvik af kósínusreglunni. Í seinni köflum munum við nefnilega framlengja hornaföllin þannig að við getum reiknað kósínus af horni sem eru stærri en 90°. Þá kemur í ljós að $\cos(90°)=0$. Þannig að ef $C=90°$ er stungið inní kósínusjöfnunna fæst regla Pýþagórasar.

Það er ekki mjög flókið að sanna kósínusregluna:



Teiknum upp þríhyrninginn ΔABC þannig að hann hafi hliðina a sem grunnlínu. Merkjum inn hæðina h og nefnum fótpunkt hæðarinnar P_A. Ef þríhyrningurinn ΔCAP_A er skoðaður sést að

$$\cos(C)=\frac{|CP_A|}{b} \qquad \text{eða} \qquad |CP_A|=b\cos(C)$$

Athugum einnig að $a=|CP_A|+|P_AB|$ svo að

$$|P_AB|=a-|CP_A|=a-b\cos(C)$$

Notum nú reglu Pýþagórasar á sitthvorn þríhyrninganna ΔCAP_A og ΔBAP_A til þess að fá

$$h^2 = b^2 - |CP_A|^2 \qquad og \qquad h^2 = c^2 - |P_AB|^2$$

Setjum þessatr jöfnur saman til þess að fá:

$$b^2 - |CP_A|^2 = c^2 - |P_AB|^2$$

Setjum nú inn gildin á $|CP_A|$ og $|P_AB|$ sem við vorum búin að reikna til þess að fá

$$b^2 - (b\cos(C))^2 = c^2 - (a - b\cos(C))^2$$

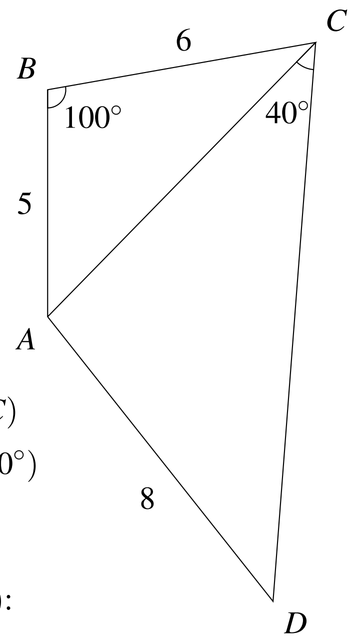
Þegar reiknað er uppúr sviganum sést að liðurinn $b^2\cos^2(C)$ dettur út og eftir stendur

$$b^2 = c^2 - a^2 + 2ab\cos(C) \qquad \text{sem jafngildir} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

Dæmi:
Hvasshyrndur þríhyrningur ABC hefur hliðarlengdir $c = |AB| = 5$, $a = |BC| = 6$, $b = |CA| = 7$. Finnið $\cos(\angle ABC)$.
Lausn:
Samkvæmt kósínusreglu er $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos(\angle ABC)$. Með því að færa yfir fáum við svo

$$\cos(\angle ABC) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

Dæmi:
Teiknum ferhyrning $ABCD$ sem er þannig að $|AB| = 5$, $|BC| = 6$, $|AD| = 8$, $\angle ABC = 100°$ og $\angle ACD = 40°$.
Finnið $|AC|$ og $\sin(\angle CDA)$.



Athugasemd:
Við erum ekki búin að skilgreina hvað $\cos(100°)$ er því hornið er of stórt, við skulum samt leyfa okkur að stimpla því inní vasareininn því að í raun gilda sínus og kósínusreglan fyrir öll horn.
Lausn:
Notum fyrst kósínusregluna á þríhyrninginn ΔABC til að finna $|AC|$. Skv. henni gildir:

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos(\angle ABC) \\ &= 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6\cos(100°) = 61 - 60\cos(100°) \end{aligned}$$

Svo að

$$|AC| = \sqrt{61 - 60\cos(100°)} \approx 8,450969806$$

Notum nú sínusreglu á þríhyrninginn ΔACD til að finna $\sin(\angle ADC)$:

$$\frac{\sin(\angle ADC)}{|AC|} = \frac{\sin(\angle ACD)}{|AD|}$$

svo að

$$\sin(\angle ADC) = |AC|\frac{\sin(\angle ACD)}{|AD|} \approx \frac{\sin(40°)}{8} \cdot 8,450969806 \approx 0,679022335$$

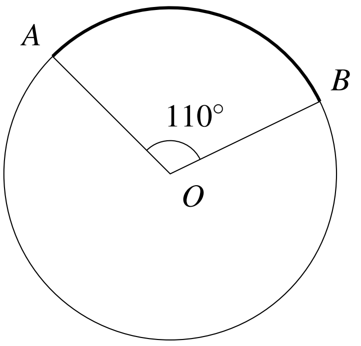
Hringir

Formlega skilgreiningin á *hring* er svohljóðandi:

Látum P vera punkt í sléttunni og $r \in \mathbb{R}_+$.
Hringur með miðju í P og geisla r er mengi allra punkta í sléttunni sem eru í fjarlægðinni r frá punktinum P.

Miðhorn og ferilhorn

Skilgreinum nú *miðhorn* og *stærð boga*:



Látum H vera hring með miðju í punkti O og látum A, B og C vera punkta á hringnum. Hornið $\angle AOB$ kallast þá miðhorn hringsins H. Sá hluti af hringnum sem er á milli punktanna A og B (sá hluti sem er styttri) kallast boginn milli A og B og er táknaður með $\widehat{AB}$. Stærð bogans milli A og B er mæld í gráðum og er jöfn horninu $\angle AOB$.

Á myndinni til hliðar er hornið $\angle AOB$ dæmi um miðhorn hringsins. Boginn á milli A og B er markaður með þykkari línu. Hornið $\angle AOB$ er $\angle 110°$ og þess vegna segjum við að boginn á milli A og B sé $110°$ og skrifum $\widehat{AB} = 110°$.

Setjum nú fram reglu um horn og hringi án sönnunar. Reglan er dálítið flókin í framsteningu en ekki jafn flókin í notkun.

Látum A, B, C og D vera ólíka punkta á hring H. Gerum ráð fyrir að þeim sé raðað þannig að hvorki D né B liggi á boganum $\widehat{AC}$.
Látum l vera línuna í gegnum A og B og m vera línuna í gegnum C og D.
G.r.f. að l og m séu ekki samsíða og að þær skerist í punkti P.
Þá fæst eftirfarandi:
Ef P er innaní hringnum H þá er

$$\angle APC = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

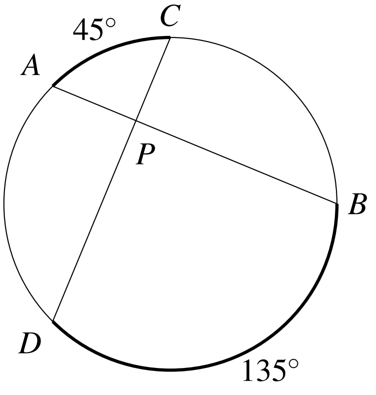
En ef P er utan við hringinn H þá er

$$\angle APC = \frac{|\widehat{AC} - \widehat{BD}|}{2}$$

Tökum dæmi til að skýra þessa reglu betur:

Dæmi:
Látum A, B, C og D vera punkta á hring eins og á myndinni til hliðar. Látum P vera skurðpunkt línustrikanna AB og CD.
Gefið er að $\widehat{AC} = 45°$ og $\widehat{BD} = 135°$
Finnið $\angle APC$.
Lausn:
Hér er skurðpunkturinn P innaní hringnum. Því fæst

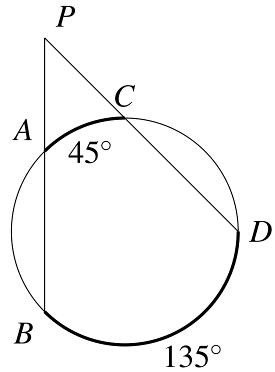
$$\angle APC = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} = \frac{45° + 135°}{2} = 90°$$



Dæmi:

Látum A, B, C og D vera punkta sem liggja á hring eins og á myndinni til hliðar. Látum P vera skurðpunkt línanna sem ganga í gegnum A og B annars vegar og C og D hins vegar.
Gefið er að $\widetilde{AC} = 45^\circ$ og $\widetilde{BD} = 135^\circ$
Finnið $\angle APC$.
Lausn:
Hér er skurðpunkturinn P utan við hringinn. Því fæst

$$\angle APC = \frac{|\widetilde{AC} - \widetilde{BD}|}{2} = \frac{|45^\circ - 135^\circ|}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$



Ferilhorn

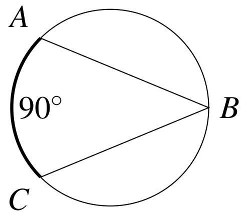
Skilgreinum ferilhorn:

Látum H vera hring og A, B og C vera punkta á hringnum.
Hornið $\angle ABC$ kallast ferilhorn á hringnum H og það er sagt spanna bogann $\widehat{AC}$

Til er mjög einföld regla um ferilhorn

Ferilhorn er jafnt hálfum boganum sem það spannar.

Á myndinni til hliðar er hornið $\angle ADB$ ferilhorn hringsins. Boginn $\widehat{AC}$ er 90° svo að $\angle ABC$ er 45°.



Hringur í hnitakerfinu

Nú skulum við taka okkur dálitla stund í að skoða jöfnuna

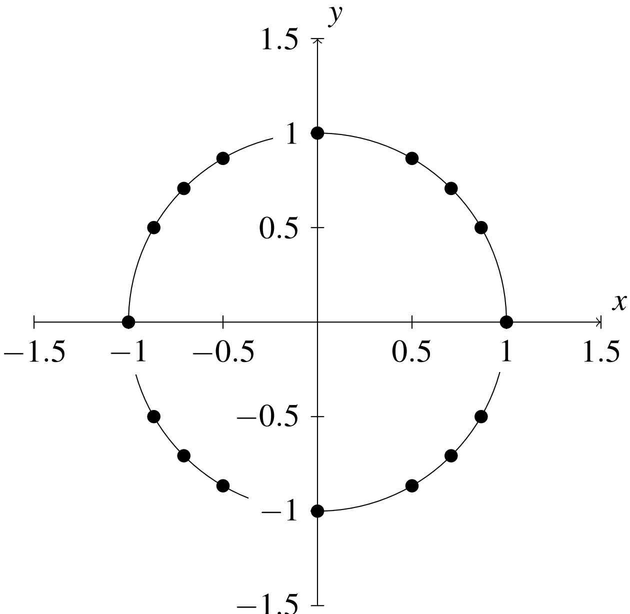
$$x^2 + y^2 = 1$$

.
Reynum nú að finna einhver gildi á x og y sem uppfyla þessa jöfnu og mörkum þau inná hnitakerfið:

Auðvelt er að sjá að ef $x = 1$ og $y = 0$ þá er jafnan uppfyllt. Þess vegna mörkum við punktinn $(1, 0)$ á hnitakerfið.
Við mörkum punktana $(-1, 0)$, $(0, 1)$ og $(0, -1)$ á hnitakerfið útaf sömu ástæðu.
Við tökum eftir að ef $x = 1/\sqrt{2}$ og $y = 1/\sqrt{2}$ þá er jafnan uppfyllt því að

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Við mörkum því punktinn $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \approx (0.707, 0.707)$ inná hnitakerfið.
Útaf sömu ástæðu þá mörkum við punktana



$$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \approx (0.707, -0.707)$$

$$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \approx (-0.707, 0.707)$$
$$(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \approx (-0.707, -0.707)$$

inná hnitakerfið.
Prófum næst að stinga $x = 1/2$ og $y = \sqrt{3}/2$ inní jöfnuna.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

. Við sjáum að jafnan stenst þá og því mörkum við punktinn $(1/2, \sqrt{3}/2) \approx (0.5, 0.866)$ inná hnitakerfið.
Útaf sömu ástæðu mörkum við punktana $(1/2, -\sqrt{3}/2)$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)$, $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$, $(\sqrt{3}/2, 1/2)$, $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$, $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ og $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$ inná hnitakerfið.

Nú ættu nemendur að sjá í hvað stefnir. Allir punktarnir sem hafa verið markaðir á hnitakerfið liggja á sama hringnum sem er með miðju í $(0,0)$ og geisla 1.
Í raun er hægt að fullyrða að sérhvert hnit (x_0, y_0) sem er þannig að x_0 og y_0 uppfylla jöfnuna $x^2 + y^2 = 1$ mun liggja á þessum hring. Einnig er hægt að fullyrða að sérhvert hnit sem liggur á hringnum mun uppfylla þessa jörnu.
Í mengjafræðilegum skilningi þá er myndin af hringnum í hnitakerfinu í raun mynd af menginu

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\, x^2 + y^2 = 1\}$$

Útaf þessum ástæðum þá segjum við að jafnan $x^2 + y^2 = 1$ sé jafna hrings með miðju í punktinum $(0,0)$ og geisla 1. Þessi hringur kemur oft fyrir í stærðfræði og því fær hann sér nafn. Við köllum hann *einingarhringinn*.

Setjum nú fram skilgreininguna á almennri jöfnu hrings:

Jafna af gerðinni

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

kallast jafna hrings.
Hún lýsir hring í hnitakerfinu sem er með miðju í punktinum (a,b) og geisla r.

Dæmi:
Finnið jöfnu hringsins með miðju í punktunum $(2,-3)$ og gengur í gegnum punktinn $(1,0)$.
Lausn:
Fjarlægðin milli punktanna $(2,3)$ og $(1,0)$ er geisli hringsins. Geislinn er þess vegna

$$\sqrt{(1-2)^2 + (0-(-3))^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Jafna hringsins er þá

$$(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = (\sqrt{10})^2$$

sem einfaldast í

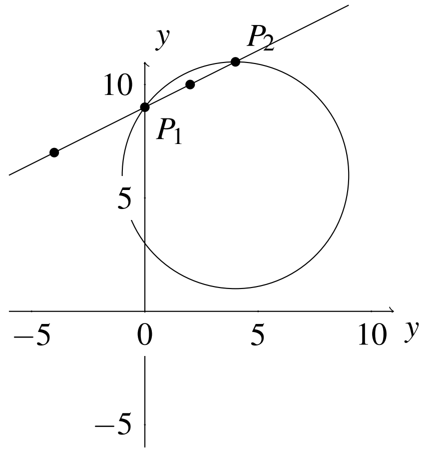
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 10$$

Dæmi:
Hringur sem við köllum H er gefinn með jöfnunni

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$$

Lína l gengur í gegnum punktana $(2,10)$ og $(-4,7)$.
Línan og hringurinn skerast í tveimur punktum P_1 og P_2.
Finnið þá.

Lausn:
Byrjum á því að finna jöfnu línunnar. Hallatalan er



$$h = \frac{7-10}{-4-2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

Svo jafna línunnar er af gerðinni

$$y = \frac{1}{2}x + s$$

Nú liggur punkturinn $(2,10)$ á henni svo að jafnan

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 2 + s$$

er uppfyllt. En þá fæst að s er 9 og jafna línunnar er

$$y = \frac{1}{2}x + 9$$

Stingum þessu gildi á y inní jöfnu hringsins sem var

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$$

og fáum

$$(x-4)^2 + (\frac{1}{2}x + 9 - 6)^2 = 25$$

Eftir að reiknað er uppúr báðum svigunum, allt fært sömu megin jafnaðarmerkisins og einfaldað fæst

$$\frac{5}{4}x^2 - 5x = 0$$

Margföldum í gegn með $\frac{4}{4}$ og tökum x útfyrir sviga til að fá

$$x(x-4) = 0$$

Þetta gefur $x = 0$ eða $x = 4$
Punktarnir sem leitað er að hafa því x-hnitin $x_1 = 0$ og $x_2 = 4$.
Báðir punktarnir liggja á línunni samkvæmt skilgreiningu svo y-hnitin fást með því að stinga þessum x-hnitum inní jöfnu línunnar.
Fáum:

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 9 = 9 \qquad \text{og} \qquad y_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 + 9 = 11$$

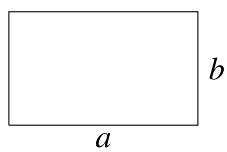
Svo punktarnir eru

$$P_1 = (0,9) \qquad \text{og} \qquad P_2 = (4,11)$$

Flatarmál ýmissa forma

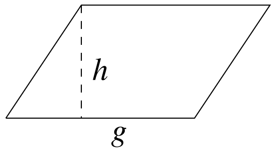
Flatarmál rétthyrnings:

$$F = a \cdot b$$



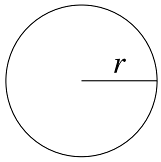
Flatarmál samsíðungs:

$$F = g \cdot h$$



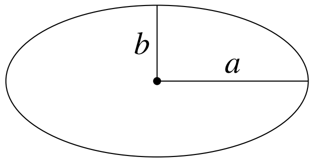
Flatarmál hrings:

$$F = r^2 \cdot \pi$$



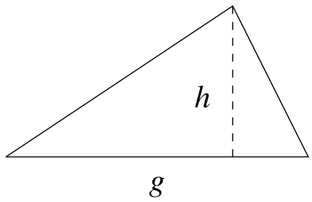
Flatarmál sporbaugs:

$$F = a \cdot b \cdot \pi$$



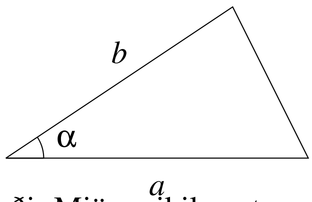
Flatarmál þríhyrnings:

$$F = \frac{g \cdot h}{2}$$



Flatarmál þríhyrnings (2):

$$F = \frac{1}{2} a \cdot b \sin(\alpha)$$

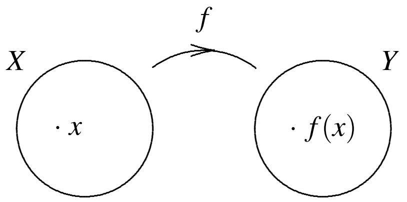


Varpanir og föll

Vörpun er eitt allra miklvægasta hugtak sem notast er við í stærðfræði. Mjög mikilvægt er að nemendur reyni að skilja þetta hugtak til fullnustu og geti tileinkað sér notkun þess. Útskýringar á vörpun eru því miður oftast frekar torskiljanlegar þeim sem eru óvanir stærðfræði, en með dæmum og æfingu skýrast hlutir betur.

Látum X og Y vera mengi. *Vörpun* frá X í Y er regla sem úthlutar sérhverju staki í X nákvæmlega einu staki í Y. Hefðin er að tákna slíka vörpun (reglu) með bókstaf.
Ef f er vörpun frá X í Y og $x \in X$, þá táknum við með $f(x)$ stakið í Y sem reglan (vörpunin) f úthlutar stakinu x.

Mengið X kallast *skilgreiningarmengi* eða *formengi* vörpunnarinnar og mengið Y *bakmengi* hennar.



Varpanir eru táknaðar með ýmsum hætti, til dæmis

$$f : X \to Y, \qquad X \xrightarrow{f} Y \qquad \text{eða} \qquad X \to Y,\ x \mapsto f(x).$$

Athugasemd:
Þegar bakmengið, Y, er hlutmengi í mengi rauntalna, $\mathbb{R}$, þá tölum við stundum um *fall*, en ekki *vörpun*. Í raun er fall bara ákveðin gerð af vörpun.

Dæmi:
(a)
Látum $X = \mathbb{R}$ og $Y = \mathbb{R}$. Skilgreinum nú vörpun (reglu) á $\mathbb{R}$. Sem segir að sérhverju staki x í $\mathbb{R}$ verði úthlutað stakinu x^2 í Y. Köllum þessa vörpun f
Þessi vörpun (regla) úthlutar t.d. stakinu 2 í X stakinu $2^2 = 4$ í Y, og hún úthlutar stakinu 9 í X stakinu $9^2 = 81$ í Y. Þess vegna skrifum við $f(2) = 4$ og $f(9) = 81$
Oftast vilja menn þó geta skrifað þessa reglu í táknmáli á fljótlegan hátt, og nenna ekki að skrifa textann sem hefur verið skrifaður í þessu dæmi. Fljótlegri leið til að skilgreina þessa vörpun hefði verið að skrifa:

$$f : X \to Y, \qquad f(x) = x^2$$

Athugum að hér er bakmengið $\mathbb{R}$ svo að f er fall.
(b)
Varpanir eiga oft við um eitthvað annað en tölur, tökum dæmi um það:
Látum A vera mengi allra íslenskra orða og B vera mengi allra íslenskra bókstafa. Skilgreinum nú vörpun á A sem úthlutar sérhverju orði í A fyrsta bókstafnum í því. Köllum þessa vörpun g.
Þessi vörpun úthlutar orðinu „hundur” bókstafnum „h” og þess vegna skrifum við $g(\text{hundur}) = \text{h}$
Þessi vörpun úthlutar orðinu „kirkja” bókstafnum „k” og þess vegna skrifum við $g(\text{kirkja}) = \text{k}$.
Í liðnum á undan náðum við að skilgreina vörpunina f með formúlunni $f(x) = x^2$. Hér er engin formúla til og við verðum að láta okkur nægja að útskýra hana með orðum.
(c)
Stundum þegar við erum að vinna með endanleg mengi getum við skilgreint vörpun með því að ákveða hvað hún gerir stak fyrir stak. Tökum dæmi um þetta:
Látum $W = \{1, 2, 3\}$ og $Z = \mathbb{Q}$. Skilgreinum nú vörpun h frá W í Z með reglunni:
h varpar stakinu 1 í stakið $\frac{3}{7}$
h varpar stakinu 2 í stakið $\frac{11}{3924}$
h varpar stakinu 3 í stakið 8
Hér erum við búin að skilgreina vörpun (reglu) með því einfaldlega að ákveða hvað vörpunin (reglan) gerir við hvert stak í formenginu.
Fljótlegri leið til að gera sama hlutinn hefði verið að skrifa:
Látum h vera vörpunina frá W í Z sem er skilgreind með

$$h(1) = \frac{3}{7} \qquad h(2) = \frac{11}{3924} \qquad h(3) = 8$$

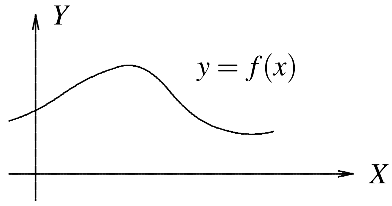
Athugum að hér er engin sjáanleg formúla eða regla til að tengja saman stökin tvö og tvö, reglan er bara búin til stak fyrir stak.
Athugasemd:
Í stærðfræði sem er á einhvern hátt hagnýt er langoftast hægt að skilgreina varpanirnar eða

föllin sem unnið er með útfrá formúlu eins og í lið **(a)**.
Mikilvægt er að skilja að aðrar varpanir og föll eru samt til.

Graf vörpunnar

Graf vörpunarinnar f er hlutmengi í faldmenginu $X \times Y$ sem skilgreint er með

$$\{(x, f(x)) \in X \times Y\,;\, x \in X\}.$$



$\{(x,y) \in X \times Y\,;\, y = f(x)\}$

Athugum að samkvæmt skilgreiningu er graf ekkert nema mengi, en ekki eins konar mynd eins og margir gera sér hugmynd um.
Þegar f er fall frá $\mathbb{R}$ í $\mathbb{R}$ þá er hinsvegar hægt að sjá fyrir sér þetta graf myndrænt og oft er mjög gagnlegt að teikna upp mynd af grafinu sem hlutmengi í $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Þegar teiknuð er mynd af grafi falls, er í daglegu tali oftast talað um að teikna upp fallið.
Það að teikna upp fall er sáraeinfallt:

Teikna skal mynd af fallinu f

1. *Valdir eru nokkrir punktar $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ í $\mathbb{R}$.*
   (Í raun má velja þessa punkta hvernig sem er en ef maður vill fa góða mynd af fallinu er best að fara eftir ákveðnum reglum. Í seinni kafla eru útskýrðar reglur til að velja þessa punkta.)
2. *Tölurnar $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots f(x_n)$ eru reiknaðar út.*
3. *Punktarnir $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2), (x_3, f(x_3), \ldots (x_n, f(x_n))$ eru markaðir í hnitakerfið.*
4. *Ferill er teiknaður sem fer í gegnum alla punktana. Þessi ferill þarf að fara sem beinustu leið á milli punkta, en ekki telst góður siður að setja horn á ferilinn.*
   Reynt að fara ákveðinn milliveg milli þess að láta ferilinn fara sem beinustu leið á milli punkta og láta hann „beygja sem minnst”

Aðgerðir á föllum

Látum f og g vera einhver föll frá mengi X yfir í $Y = \mathbb{R}$. Þá getum við notað reikniaðgerðirnar á $\mathbb{R}$ til að skilgreina ný föll. Við skilgreinum *summu*, *mismun* og *margfeldi* fallana með:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x), \qquad x \in X,\\
(f-g)(x) &= f(x) - g(x), \qquad x \in X\\
(fg)(x) &= f(x)g(x), \qquad x \in X.
\end{aligned}$$

Ef $g(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in X$, þá getum við einnig skilgreint kvóta $\dfrac{f}{g}$ fallanna f og g með formúlunni

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in X$$

Athugasemd:
Sumum sem eru ekki orðnir vanir hugtakinu „fall” gæti fundist þessar skilgreiningar skrítnar, eða fundist við ekki vera að skilgreina neitt. Þetta er vissulega mjög augljós og náttúruleg skilgreining en samt nauðsynleg.
Tökum sem dæmi fyrsta liðinn $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$. Útskýrum í orðum hvað þetta þýðir.
Hér er verið að búa til nýtt fall (nýja úthlutunarreglu) á X. Nýja fallið (Nýju úthlutunarregluna) köllum við $f+g$. Það úthlutar sérhverju staki $x \in X$ stakinu sem er fengið með formúlunni $f(x)+g(x)$

Lotubundin föll

Við segjum að fall sé lotubundið ef það í vissum skilningi endurtekur sjálft sig aftur og aftur, formleg skilgreining er:

Fall $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er sagt vera lotubundið með lotu a ef $a \in \mathbb{R}$ og $f(x+a) = f(x)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$

Sérstaklega skal taka fram að þegar við segjum að einhver tala a sé lota einhvers falls f þá er ekki þar með sagt að það sé minnsta mögulega lotan. Fall með lotu 4 getur líka haft lotu 2.

Við sjáum líka að ef a er lota einhvers falls a þá verður $2a$ líka lota fallsins því að fyrir öll x fæst

$$f(x+2a) = f((x+a)+a) = f(x+a) = f(x)$$

Auðvelt er að sjá að svona er hægt að halda áfram fyrir allar heilar tölur og við fáum reglu:

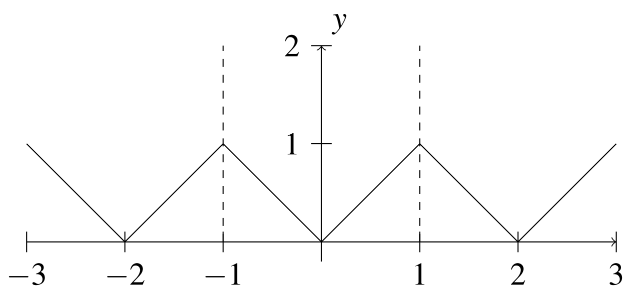
Látum $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ver lotubundið fall með lotu a, þá er $f(x+na) = f(x)$ fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$ og öll $x \in \mathbb{R}$.

Oft er þægilegt að notfæra sér þetta hugtak til að skilgreina ný föll:

Dæmi:
Látum $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera fallið sem er með lotu 2 og er skilgreint með formúlunni:

$$f(x) = |x| \qquad \text{ef} \qquad x \in [-1,1[$$

Tökum eftir að formúlan er aðeins tekin fram fyrir bilið $[-1,1[$ en hún nægir samt til að skilgreina f ótvírætt á öllu $\mathbb{R}$ því ef x er tala sem er ekki á þessu bili getum við alltaf fundið $f(x)$ með því að notfæra okkur það að það er með lotu 2. Til dæmis ef reikna á $f(5)$ þá getum við notfært okkur lotu fallsins til að reikna:



$$f(5) = f(-1+3\cdot 2) = f(-1) = |-1| = 1$$

Tökum eftir að við þurftum að „færa okkur” inn á svæði þar sem að formúlan fyrir f var gefin. Á mynd til hliðar er mynd af fallinu. Upphaflega lotan sem gefin er með formúlu er mörkuð innan við punktalínur

Jafnstæð og oddstæð föll

Skilgreinum jafnstæð og oddstæð föll:

Látum $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vera fall.
Við segjum að f sé jafnstætt ef $f(-x)=f(x)$ fyrir öll $x\in\mathbb{R}$
Við segjum að f sé oddstætt ef $f(-x)=-f(x)$ fyrir öll $x\in\mathbb{R}$

Skoðum þessar skilgreiningar myndrænt.
Fall er sagt jafnstætt ef myndin af grafi þess er eins sitt hvoru megin við y-ásinn.
Fall er sagt oddstætt ef myndin af grafi þess verður spegluð um x-ás ef fært sig er yfir y-ásinn.

Dæmi:
Skerið úr um hvort föllin séu jafnstæð, oddstæð eða hvorugt.
(a)
$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gefið með $f(x)=x^2$
(b)
$g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gefið með $g(x)=x^3$
(c)
$h:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gefið með $h(x)=x^2+x^3$
Lausn:
(a)
f er jafnstætt því að fyrir öll $x\in\mathbb{R}$ gildir $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$
(b)
g er oddstætt því að fyrir öll $x\in\mathbb{R}$ gildir $g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$
(c)
Hér er h hvorki jafnstætt né oddstætt. Til að sýna það þurfum við einfaldlega að finna dæmi um x þannig að $h(-x)\neq h(x)$ og $h(-x)\neq -h(x)$.
Ef að við prófum $x=2$ fáum við að $h(2)=12$, $h(-2)=-4$.
Við sjáum þá að $h(-2)\neq h(2)$ og $h(-2)\neq -h(2)$.

Dæmi:
Skilgreinum fall $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ með:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{ef } x \text{ er óræð tala} \\ 1 & \text{ef } x \text{ er ræð tala} \end{cases}$$

(a)
Skerið úr um hvort f er jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.
(b)
Finnið allar lotur fallsins f.
Með öðrum orðum, finnið einfalda framsetningu á menginu:

$$\{a\in\mathbb{R};\ a \text{ er lota fallsins } f\}$$

Lausn:
(a)
Augljóst er að ef x er ræð tala þá er $-x$ líka ræð tala.
Við fáum þess vegna að fyrir allar ræðar tölur x er $f(x)=1$ og $f(-x)=1$. Þess vegna er $f(x)=f(-x)$ ef x er ræð.
Eins sést að $f(x)=f(-x)$ ef x er óræð tala.
Allar tölur eru annað hvort ræðar eða óræðar svo að við höfum fengið

$$f(-x)=f(x) \qquad \text{fyrir öll } x\in\mathbb{R}$$

Með öðrum orðum þá er fallið jafnstætt.

(b)
Skiptum dæminu í tvo liði:

1. Sýnum fyrst að sérhver ræð tala er lota fallsins f.
   Látum a vera ræða tölu.
   Við þurfum að sýna að fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ þá gildi $f(x+a) = f(x)$.
   Ef x er líka ræð tala þá er auðvelt að sjá að summan $x+a$ er líka ræð tala þess vegna fæst $f(x+a) = f(x)$ fyrir öll ræð x
   Ef x er óræð tala þá er auðvelt að sjá að $x+a$ er líka óræð. Þess vegna gildir $f(x+a) = f(x)$ fyrir öll óræð x.
   Öll $x \in \mathbb{R}$ eru annaðhvort ræð eða óræð, og þvi höfum við sýnt að
   $$f(x+a) = f(x) \qquad \text{fyrir öll } x \in \mathbb{R}$$
   Með öðrum orðum þá er a lota fallsins f.

2. Sýnum næst að engin óræð tala sé lota fallsins f
   Látum a vera óræða tölu.
   Við þurfum að sýna að til er tala x_0 þ.a. $f(x_0+a) \neq f(x_0)$.
   Látum $x_0 = -a$, þá er x_0 óræð svo að $f(x_0) = 0$.
   Hinsvegar er $f(x_0+a) = f(-a+a) = f(0) = 1$ því að 0 er ræð tala.
   Við höfum fengið að $f(x_0+a) \neq f(x_0)$ svo að fallið hefur ekki lotu a.

Af liðum 1. og 2. sést að a er lota fallsins f þ.þ.a.a. a sé ræð tala.
Með öðrum orðum er
$$\{a \in \mathbb{R};\, a \text{ er lota fallsins } f\} = \mathbb{Q}$$

Einhalla föll

Fall er sagt vera *vaxandi* ef myndin af grafi þess gerir ekkert nema

Látum $X \subset \mathbb{R}$, og $f : X \to \mathbb{R}$ vera fall.

- *Ef um sérhver $x_1, x_2 \in X$ sem eru valin þannig að $x_1 > x_2$ gildir*
  $$f(x_1) \geq f(x_2)$$
  Þá er f sagt vera vaxandi fall.

- *Ef um sérhver $x_1, x_2 \in X$ sem eru valin þannig að $x_1 > x_2$ gildir*
  $$f(x_1) \leq f(x_2)$$
  þá er f sagt vera minnkandi fall.

- *Ef að ójöfnurnar fyrir fallgildin í skilgreiningunum væru strangar væri f sagt vera stranglega vaxandi/minnkandi fall.*

- *Fall sem er annað hvort vaxandi eða minnkandi er sagt vera einhalla.*

- *Fall sem er annað hvort stranglega vaxandi eða stranglega minnkandi er sagt vera stranglega einhalla.*

Margliður

Margliða er fall $p:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sem tákna má með formúlu af gerðinni

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Þar sem $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ stuðlarnir a_j eru rauntölur og $a_n \neq 0$.
Náttúrulega talan n kallast stig margliðunnar. Stig margliðu p er táknað með $\deg p$.
Margliðan er sögð vera stöðluð ef $a_n = 1$
Um margliður gildir mikilvæg regla:

Látum $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ og $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ vera maragliður af stigi n og m.
Ef $p(x) = q(x)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ þá er $n = m$ og
$a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ... , $a_n = b_m$

Þessi regla segir í töluðu máli að margliður eru jafnar þ.þ.a.a. allir stuðlar þeirra séu jafnir. Til að sanna þessa reglu þarf annaðhvort þekkingu í línulegri algebru eða nota sér samfelldni margliðunnar og þrepun. Þetta eru hugtök sem er ekki búið að kynna ennþá og þess vegna verður sönnuninni sleppt hér.

Dæmi:
(a)
$p(x) = 3x^5 + \pi x^2 - \dfrac{4}{5}$ er dæmi um margliðu. Hér er $a_0 = -\frac{4}{5}$, $a_2 = \pi$, $a_5 = 3$ og $a_1 = a_3 = a_4 = 0$ Þessi margliða hefur stig 5. Hún er ekki stöðluð því að $a_5 = 3$
(b)
$g(x) = 3^x$ er ekki margliða.

Núllstöðvar margliða

Ef p er margliða og x_0 er tala þ.a. $p(x_0) = 0$ þá segjum við að x_0 sé *núllstöð* eða *rót* margliðunnar p.
Sumar margliður hafa engar núllstöðvar eins og t.d. margliðan $p(x) = x^2 + 1$ (sem sést af því að talan x^2 er stærri en 0 fyrir öll x).
Aðrar margliður hafa margar núllstöðvar, eins og til dæmis margliðan $q(x) = x^2 - 1$ sem hefur núllstöðvarnar $x = 1$ og $x = -1$.
Fjöldi núllstöðva margliða er þó takmarkaður eins og fram kemur í eftirfarandi reglu:

Látum p vera margliðu af stigi n. Fjöldi mismunandi núllstöðva margliðunnar p er þá í mesta lagi n.

Margliður koma oft fram þegar reynt er að lýsa náttúrunni með stærðfræði, og því teljast margliður vera mikilvæg föll.
Það er því mjög gagnlegt að geta fundið allar núllstöðvar gefinnar margliðu p. Þegar allar núllstöðvar margliðu p eru fundnar er í daglegu máli talað um að leysa margliðuna p.
Til eru einfaldar formúlur til að leysa allar fyrsta og annars stigs margliður. Þær verða útskýrðar í næstu köflum.
Einnig eru til aðferðir til að leysa þriðja og fjórða stigs margliður en þær eru töluvert flóknari og verða ekki skýrðar hér.
Í langan tíma reyndu stærðfræðingar að leysa margliður af fimmta stigi og hærra. Árið 1823

tókst manni að nafni Niels Henrik Abel hins vegar að sanna sláandi niðurstöðu. Honum tókst að sanna að ekki er hægt að leysa almennar margliður af stigi fimm og hærra. Það er niðurstaða sem gríðarlega flókið er að sanna. Það eitt að setja þessa niðurstöðu formlega fram telst vera allt of flókið fyrir þennan texta.

Fyrsta stigs margliður

Fyrsta stigs margliða er fall af gerðinni $p(x) = ax+b$, þar sem $a \neq 0$ og $b \in \mathbb{R}$. Þessi margliða hefur í mesta lagi eina núllstöð. Þessa núllstöð er auðvellt að finna. Maður einangrar einfaldlega x úr jöfnunni $ax+b = 0$ og fær $x = -b/a$.

Dæmi:
Finnið núllstöð margliðunnar $p(x) = 4x+8$.
Lausn:
Leysum úr jöfnunni $4x+8 = 0$. Fáum:

$$4x = -8 \qquad \text{sem jafngildir} \qquad x = -2$$

Margliðan hefur eina núllstöð $x = -2$

Annars stigs margliður

Látum $p(x) = ax^2+bx+c$ þar sem $a \neq 0$ og $b,c \in \mathbb{R}$ vera margliðu af stigi tvö. Talan $D = b^2-4ac$ nefnist þá aðgreinir margliðunnar. Lausn margliðunnar p þarf að skipta í þrjú tilvik.

1. Ef $D < 0$ þá hefur margliðan p enga núllstöð
2. Ef $D = 0$ þá hefur margliðan p eina núllstöð $x = \dfrac{-b}{2a}$
3. Ef $D > 0$ þá hefur margliðan p tvær núllstöðvar:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad \text{og} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Sönnunin á þessu er ekki ýkja flókin:

Einangra þarf x útúr jöfnunni $ax^2+bx+c = 0$. Ef deilt er með a báðu megin jafnaðarmerkis fæst jafnan

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0$$

Nú leggjum við töluna $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ við báðu megin jafnaðarmerkis til að fá

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

Ferningsreglan er notuð vinstra megin jafnaðarmerkisins og hægra megin eru brotin lögð saman til að fá:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Skiptum nú í þrjú tilvik:

1. *Ef* $b^2 - 4ac < 0$ *þá er stærðin vinstra megin jafnaðarmerkisins jákvæð en sú sem er hægra megin er neikvæð. jafnan hefur því enga lausn.*

2. *Ef* $b^2 - 4ac = 0$ *þá stendur eftir jafnan:*

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \qquad \textit{sem jafngildir} \qquad x + \frac{b}{2a} = 0$$

   Þetta gefur svo $x = \dfrac{-b}{2a}$

3. *Ef* $b^2 - 4ac > 0$ *þá má taka rót báðu megin jafnaðarmerkis til að fá:*

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   sem jafngildir

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dæmi:
Leysið jöfnuna $2x^2 + 3x - 5 = 2$.
Lausn:
Við komum jöfnunni á staðlað form með því að færa yfir jafnaðarmerkið, þ.e.
$2x^2 + 3x - 7 = 0$. Þá getum við stungið öllu saman inn í lausnarformúlu annars stigs jöfnu.
Hér er $a = 2, b = 3$ og $c = 7$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4}.$$

Lausnirnar eru $\frac{-3-\sqrt{65}}{4}$ og $\frac{-3+\sqrt{65}}{4}$.

Þáttun margliða

Ef tvær margliður p og q eru lagðar saman eða önnur dregin frá hinni verður útkoman ný margliða. Margfeldið pq verður einnig ný margliða, en það sama verður ekki sagt um deilingu. Ef p og q eru margliður þá er fallið $\dfrac{p}{q}$ almennt ekki margliða.
Þetta svipar dáltið til heilu talnanna og alveg eins og með heilar tölur getum við skilgreint að ein margliða gangi upp í annari:

Látum p og q vera margliður. Ef að til er margliða h þannig að $p = hq$ þá segjum við að margliðan q gangi upp í margliðunni p. Þá skrifum við líka $\dfrac{p}{q} = h$ eða $p/q = h$

Athugum að sérhver margliða p gengur uppí sjálfa sig því að $p = 1 \cdot p$
Það að skrifa margliðu q sem margfeldi margliða af lægra stigi kallast *þáttun* margliðu.
Margliða q er sögð *óþáttanleg* ef engin margliða af lægra stigi en q gengur upp í q.
Margliða er sögð vera *fullþáttuð* ef að búið er að skrifa hana sem margfeldi af óþáttanlegum margliðum.
Það getur verið mjög gagnlegt að þátta margliður. Þess vegna er gagnlegt að vita fyrirfram hvort það sé í höfuð hægt að þátta margliðu. Eftirfarandi regla segir til um það:

Sérhver margliða sem hefur stig hærra en tveir er þáttanleg.
Með öðrum orðum, ef q er margliða af stigi $n \geq 3$ þá eru til margliður q_1 og q_2 sem eru ekki fastar og $q = q_1 q_2$

Það getur verið erfitt að þátta margliður, eftirfarandi regla gerir manni þó lífið töluvert léttara:

Látum p vera margliðu. Þá gengur margliðan $x - a$ uppí margliðunni p þá og því aðeins að $p(a) = 0$

Þessi regla nýtist vel við að þátta margliður. Sértilvik af þessari reglu er nefnilega:

Ef p er stöðluð margliða af stigi n og hún hefur n ólíkar rætur, a_1, a_2,... a_n. Þá má skrifa $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$

Dæmi:
Fullþáttið $p(x) = x^2 + 2x - 5$.
Lausn:
Hér er $a = 1$, $b = 2$ og $c = -5$. Stingum þessu inní lausnarformúlu annars stigs jöfnu.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$$

Samkvæmt reglu getum við því þáttað:

$$p(x) = (x - (-1 + \sqrt{6}))(x - (-1 - \sqrt{6})) = (x + 1 - \sqrt{6})(x + 1 + \sqrt{6})$$

Deiling með afgangi

Eins og á heiltölunum er deiling á margliðum ekki fullkomin í þeim skilningi að ef einni margliðu er deilt með annari fæst ekki alltaf margliða út. Við skilgreinum því deilingu með afgangi til að hjálpa okkur:

Látum p og q vera margliður. Þá eru til margliður s og r þannig að

$$p = qs + r \qquad og \qquad \deg r < \deg q$$

Það að finna þessar margliður s og r kallast deiling með afgangi.

Hægt er að nota aðferð sem er mjög lík löngudeilingu með heiltölur til að deila margliðum með afgangi.

Dæmi:
Deilið með margliðunni $q(x) = x + 4$ í margliðuna $p(x) = x^4 + 2x - 4$ með afgangi.

Lausn:
Með löngudeilingu fæst eftirfarandi

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & x^3 & -4x^2 & +16x & -62. & \\
\cline{2-6}
x+4\big) & x^4 & & & +2x & -4 \\
 & -x^4 & -4x^3 & & & \\
\cline{2-3}
 & & -4x^3 & & & \\
 & & 4x^3 & +16x^2 & & \\
\cline{3-4}
 & & & 16x^2 & +2x & \\
 & & & -16x^2 & -64x & \\
\cline{4-5}
 & & & & -62x & -4 \\
 & & & & 62x & +248 \\
\cline{5-6}
 & & & & & 244
\end{array}
$$

Þetta segir okkur að $s(x) = x^3 - 4x^2 + 16x - 62$ og $r(x) = 244$. Við getum nú skrifað:

$$x^4 + 2x - 4 = (x+4)(x^3 - 4x^2 + 16x - 62) + 244$$

Dæmi:
Finnið allar rætur margliðunnar $p(x) = x^3 + x - 10$. Gefið er að $x = 2$ er rót.
Lausn:
Við vitum að þar sem $x = 2$ er rót á margliðunni þá gengur margliðan $x - 2$ uppí margliðunni p. Notum margliðudeilingu til að þátta p.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +2x & +5 & \\
\cline{2-5}
x-2\big) & x^3 & & +x & -10 \\
 & -x^3 & +2x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & 2x^2 & +x & \\
 & & -2x^2 & +4x & \\
\cline{3-4}
 & & & 5x & -10 \\
 & & & -5x & +10 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

Af þessu sjáum við að

$$p(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 5)$$

Finnum nú núllstöðvar margliðunnar $x^2 + 2x + 5$. Við notum til þess lausn annars stigs margliðu. Fáum:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Við sjáum að aðgreinir annars stigs margliðunnar er minni en $-16 < 0$.
Margliðan $x^2 + 2x + 5$ hefur því engar núllstöðvar. $x = 2$ er því eina núllstöð upprunalegu margliðunnar p.

$\frac{p}{q}$-aðferð

Engin almenn leið er til sem að leysir margliður af háum stigum. Eftirfarandi regla getur þó nýst okkur stundum:

Látum $r(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ vera margliðu af stigi n ($a_n \neq 0$) með heiltölustuðla. Ef að ræð tala p/q er núllstöð margliðunnar r þá gengur p uppí a_0 og q gengur uppí a_n.

Þessi regla segir okkur að ef að við viljum finna einhverja núllstöð margliðu $r(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ þá er ráðlagt að „giska" fyrst á núllstöðvarnar af gerðinni $\frac{p}{q}$ þar sem p gegnur uppí a_0 og q gengur uppí a_n.
Dæmi:
Finnið einhverja núllstöð á margliðunni $r(x) = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 9$
Lausn:
Mengi allra talna sem gengur uppí tölunni 2 er $A = \{1, -1, 2, -2\}$. Mengi allra talna sem gengur uppí tölunni 27 er $B = \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$
$\frac{p}{q}$-aðferð segir okkur að við eigum að giska á núllstöð af gerðinni $\frac{p}{q}$ þar sem $p \in B$ og $q \in A$.
Öll möguleg brot af slíkri gerð eru $4 \cdot 6 = 24$ talsins, hins vegar má í raun sleppa öllum mínustölum í öðru hvoru menginu því annars tvíteljum við margar tölur. Sleppum mínustölunum í A og þá eru 12 möguleikar:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{9}{1}, \frac{9}{2}, \frac{-9}{1}, \frac{-9}{2}$$

Stingum öllum þessum tölum inní margliðuna r:
$r(\frac{1}{1}) = r(1) = -14$
$r(\frac{1}{2}) = -10$
$r(\frac{-1}{1}) = r(-1) = -4$
$r(\frac{-1}{2}) = -\frac{35}{4}$
$r(\frac{3}{1}) = r(3) = 0$
$r(\frac{3}{2}) = -\frac{81}{4}$
$r(\frac{-3}{1}) = r(-3) = 270$
$r(\frac{-3}{2}) = \frac{27}{2}$
$r(\frac{9}{1}) = r(9) = 9306$
$r(\frac{9}{2}) = 315$
$r(\frac{-9}{1}) = r(-9) = 16596$
$r(\frac{-9}{2}) = \frac{4905}{4}$
Með þessari aðferð fundum við eina núllstöð. Nefnilega núllstöðina $x = 3$ því að $r(3) = 0$.

Ræð föll

Ef r er fall sem tákna má með formúlu af gerðinni

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0}$$

Þá segjum við að r sé *rætt fall*.
Í þessari formúlu er $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, stuðlarnir a_i og b_i eru rauntölur fyrir öll i og fremstu stuðlarnir mega ekki vera 0, þ.e.a.s. $a_n, b_m \neq 0$.

Þetta er bara önnur leið til að segja að fallið r kallist rætt fall ef til eru margliður p og q þ.a. $r = \frac{p}{q}$

Stofnbrotsliðun

Látum p og q vera margliður og látum $r = \frac{p}{q}$. Ef margliðurnar p og q eru af háum stigum getur ræða fallið r oft verið erfitt viðureignar. Þá er gagnlegt að geta skrifað r sem summu af einfaldari ræðum föllum. Eftirfarandi regla getur þá stundum verið gagnleg:

Látum p og q vera margliður af stigi n og m.
G.r.f. að margliðan q hafi m ólíkar rætur $a_1, a_2, ..., a_m$
Þá er til margliða s og fastar $b_1, b_2, ..., b_m$ *þ.a.*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{b_1}{x - a_1} + \frac{b_2}{x - a_2} + ... + \frac{b_m}{x - a_m}$$

Þegar þessari reglu er beitt þá segjumst við vera að *stofnbrotsliða* ræða fallið p/q.
Við sönnum þessa reglu ekki beint en lýsum aðferðinni til að stofnbrotsliða hér:

Stofnbrotsliða skal ræða fallið $\frac{p}{q}$ *þar sem p og q eru margliður og*

$$q(x) = c_m x^m + ... + c_1 x + c_0$$

er af stigi m

1. *Finnum allar núllstöðvar margliðunnar q.*
   Ef margliðan hefur færri en m núllstöðvar hættum við því að þá virkar þessi aðferð ekki.
   Ef m ólíkar núllstöðvar finnast köllum við þær $a_1, a_2, ..., a_m$.

2. *Deilum margliðunni q uppí margliðuna p með afgangi til þess að finna margliður s og* p_1 *sem eru þannig að* $\deg p_1 < \deg q$ *og* $p = sq + p_1$. *Þá má skrifa:*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

3. *Skilgreinum nýja margliðu* q' *með því að setja*

$$q'(x) = mc_m x^{m-1} + (m-1)c_{m-1}x^{m-2} + ... + 2 \cdot c_2 x + 1 \cdot c_1$$

4. *Reiknum út stuðlana* $b_1, b_2, ..., b_m$ *með formúlunni*

$$b_i = \frac{p_1(a_i)}{q'(a_i)} \qquad \textit{fyrir öll } i$$

5. *Nú má skrifa*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{b_1}{x - a_1} + \frac{b_2}{x - a_2} + ... + \frac{b_m}{x - a_m}$$

Athugasemd
Þeir sem eru komnir aðeins lengra í stærðfræði og þekkja diffrun munu taka eftir að í aðferðinni að ofan þá er nýja margliðan q' diffurkvótinn af margliðunni q.

Dæmi:
Stofnbrotsliðið ræða fallið

$$\frac{x^4 - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

Lausn:
Hér er $p(x) = x^4 - 2$ og $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

1. Finnum núllstöðvar q.
   p/q-aðferð sem lýst var í síðasta kafla segir okkur að við eigum að prófa hvort tölurnar $-1, 1, -2, 2$ séu núllstöðvar margliðunnar q:

   $$q(-1) = 0 \qquad q(1) = 0 \qquad q(-2) = 0 \qquad q(2) = 12$$

   Hér fundum við þrjár mismunandi núllstöðvar, q hefur stig 3 svo við getum haldið áfram. Við setjum $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ og $a_3 = -2$.

2. Deilum q uppí p með afgangi:

   $$\begin{array}{r|l}
    & \quad x - 2. \\
   \hline
   x^3 + 2x^2 - x - 2 & x^4 \qquad\qquad\qquad -2 \\
    & -x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x \\
    & \quad - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 \\
    & \qquad 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 \\
    & \qquad\quad 5x^2 \qquad - 6
   \end{array}$$

   Skv. þessu getum við skrifað

   $$p(x) = (x-2)q(x) + (5x^2 - 6)$$

   Við setjum $p_1(x) = 5x^2 - 6$ og $s(x) = x - 2$.

3. Skilgreinum margliðuna

   $$q'(x) = 3x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 1x^{1-1} = 3x^2 + 4x - 1$$

4. Reiknum út:

   $$b_1 = \frac{p_1(a_1)}{q'(a_1)} = \frac{p_1(-1)}{q'(-1)} = \frac{5 \cdot (-1)^2 - 6}{3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

   $$b_2 = \frac{p_1(a_2)}{q'(a_2)} = \frac{-1}{6} \qquad \text{og} \qquad b_3 = \frac{p_1(a_3)}{q'(a_3)} = \frac{14}{3}$$

5. Lausnin okkar er þess vegna:

   $$\frac{x^4 - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = x - 2 + \frac{1/2}{x+1} + \frac{-1/6}{x-1} + \frac{14/3}{x+2} = x - 2 + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{6(x-1)} + \frac{14}{3(x+2)}$$

Vísisföll

Vísisfall er fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sem skrifa má með formúlu af gerðinni

$$f(x) = a^x$$

Þar sem $a \geq 0$ er rauntala.
Það er fátt hægt að segja um vísisföll eins og er. Höfundur ráðleggur nemendum að rifja upp veldareglurnar sem segir frá í kaflanum um veldareikning.

Andhverfa vörpunnar

Skilgreining á andhverfu vörpunnar er svohljóðandi:

Látum A og B vera gefin mengi og $f: A \to B$ vera vörpun.
Ef til er vörpun $g: B \to A$ þannig að

$$f(g(b)) = b \qquad \textit{fyrir öll} \qquad b \in B$$

og

$$g(f(a)) = a \qquad \textit{fyrir öll} \qquad a \in A$$

þá kallast fallið g andhverfa vörpunarinnar f.
Andhverfa vörpunarinnar f er oft táknuð með f^{-1}.

Í vissum skilningi er andhverfa vörpunarinnar f sú vörpun sem gerir „akkúrat öfugt" við það sem vörpunin f gerir.
Ef við förum aftur í orðalag kaflans um varpanir og föll þá er vörpunin f^{-1} sú regla sem úthlutar sérhverju staki $f(a)$ í B stakinu a í A.

Tökum dæmi um þetta:

Dæmi:
Látum A vera mengi allra Íslendinga og B vera mengið sem inniheldur allar íslenskar kennitölur.
Skilgreinum nú vörpun $k: A \to B$ sem úthlutar sérhverjum Íslendingi kennitölu sinni.
Þá er andhverfan $k^{-1}: B \to A$ og hún úthlutar sérhverri íslenskri kennitölu Íslendingnum sem á þá kennitölu.

Dæmi:
Skilgreinum fall $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ með formúlunni $f(x) = x^2$.
Finnið andhverfu fallsins f.
Lausn:
Skilgreiningarmengið er hér jákvæðu rauntölurnar, rótarfallið var í raun skilgreint sem andhverfa þessa falls.
Andhverfan er $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, staðfestum það:
Fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}_+$ er $(\sqrt{x})^2 = x$.
Fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}_+$ er $\sqrt{x^2} = x$.
Andhverfan hefur verið staðfest

Dæmi:
Skilgreinum fall $f: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ með formúlunni $f(x) = x^2$.
Finnið andhverfu fallsins f.
Lausn:
Tökum eftir að þetta er ekki alveg sama fallið og í dæminu á undan því að skilgreiningarmengið er annað, nú er skilgreiningarmengið neikvæðu rauntölurnar. Við sjáum að ef x er neikvæð rauntala þá er $\sqrt{x^2} = -x$.
Til dæmis ef $x = -3$ þá fæst $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3) = -x$.
Þess vegna er andhverfufallið í þetta skiptið $f^{-1} = -\sqrt{x}$.
Staðfestum það:
Fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}_+$ þá er $(-\sqrt{x})^2 = (\sqrt{x})^2 = x$
Fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}_-$ þá er $-\sqrt{x^2} = -(-x) = x$
Þetta staðfestir andhverfuna.

Dæmi:
Látum $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera fall gefið með formúlunni

$$f(x) = x + 4$$

Finnið andhverfu fallsins.
Lausn:
Skrifum y í staðin fyrir $f(x)$ í formúlu fallsins.

$$y = x + 4$$

Einangrum x úr þessari jöfnu

$$x = y - 4$$

Þetta gefur okkur að andhverfa f er

$$f^{-1}(x) = x - 4$$

Dæmi:

Látum f vera fall gefið með formúlunni

$$f(x) = \frac{x+5}{x-2}$$

Finnið andhverfu fallsins.
Lausn:
Skrifum y í staðin fyrir $f(x)$ í formúlu fallsins

$$y = \frac{x+5}{x-2}$$

Einangrum nú x í þessari jöfnu:
Fáum

$$y(x-2) = x + 5$$

Margföldum uppúr sviganum og færum yfir jafnaðarmerkið til að fá

$$yx - x = 5 + 2y$$

Tökum x útfyrir sviga vinstra megin

$$x(y-1) = 5 + 2y$$

Deilum í gegn með $(y-1)$ til að fá

$$x = \frac{5+2y}{y-1}$$

Nú höfum við einangrað x úr upphaflegu jöfnunni. Andhverfufallið okkar er þá

$$f^{-1}(x) = \frac{5+2x}{x-1}$$

(Athugum að þegar skilgreiningarmengi falls er ekki tilgreint má gera ráð fyrir að það sé stærsta mögulega skilgreiningarmengið. Skilgreiningarmengi f yrði þess vegna hér $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Tveir er dregið frá menginu því annars yrði deilt með núlli. Skilgreiningarmengi andhverfufallsins f^{-1} yrði $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ útaf sömu ástæðu.)

Lograr

Látum a vera jákvæða rauntölu og $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ vera vísisfall gefið með formúlunni

$$f(x) = a^x$$

Þetta fall á sér andhverfu sem að við köllum a-logrann og er táknaður með

$$\log_a$$

Skv. skilgreiningu á andhverfu í kaflanum á undan er a-logrinn þess vegna fallið sem uppfyllir:

$$\log_a(a^x) = x \qquad \text{fyir öll } x \in \mathbb{R}$$

og

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{fyir öll } x \in \mathbb{R}_+$$

Þegar nemandi er beðinn um að reikna út töluna $\log_a(x)$ fyrir gefin x og a er spurningin í töluðu máli þessi:

„Í hvaða veldi þarf að setja a svo að útkoman verði x?"

Þar sem að við vinnum í tugakerfi á þessari jörð þá er talan tíu stundum hafin yfir aðrar tölur. Þess vegna er tíu-logrinn oftast bara kallaður logrinn án þess að taka fram töluna tíu og hann er táknaður með log í staðin fyrir $\log_{10}$.

Dæmi:
Reikinð
(a) $\log_2(8)$
(b) $\log_3(81)$
(c) $\log(10^6)$
Lausn:
(a)
Í töluðu máli er spurningin þessi:

„Í hvaða veldi þarf að setja tvo svo að útkoman verði átta?"

Auðvelt er að reikna að $2^3 = 8$, svarið er þess vegna 3 og þess vegna skrifum við

$$\log_2(8) = 3$$

(b)
Auðvelt er að staðfesta að $3^4 = 81$, þess vegna er

$$\log_3(81) = 4$$

(c)
Hér er engin tala sett í index svo að við drögum þá ályktun að við séum að vinna með tíu-logrann. Svarið er eiginlega gefið í sjálfri spurningunni því að í töluðu máli er spurningin þessi;

„Í hvaða veldi þarf 10 að vera til þess að útkoman verði 10^6"

Það ætti að vera ljóst að svarið er 6 og þess vegna skrifum við

$$\log(10^6) = 6$$

Lograreglur

Um logra gilda nokkrar reglur:

Fyrir $a, b, x, y \in \mathbb{R}_+$ og $r \in \mathbb{R}$ gildir:

1. $\log_a(1) = 0$
2. $\log_a(1/x) = -\log_a(x)$
3. $\log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$
4. $\log_a(x/y) = \log_a(x) - log_a(y)$
5. $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$
6. $\log_a(x) = \dfrac{log_b(x)}{log_b(a)}$

Sönnum þessar reglur og tökum svo nokkur dæmi:

1. *Fyrir sérhvert $a \in \mathbb{R}_+$ þá er $a^0 = 1$, þess vegna er*

$$\log_a(1) = 0$$

2. *Við þurfum að sýna að ef talan a er hafin upp í veldið $-log_a(x)$ þá verði útkoman $1/x$.*
Það fæst beint af veldareglum og skilgreiningu á logra:

$$a^{-\log_a(x)} = (a^{\log_a(x)})^{-1} = x^{-1} = 1/x$$

3. *Við þurfum að sýna að ef talan a er hafin upp í veldið $\log_a(x) + \log_a(y)$ þá verði útkoman xy.*
Það fæst beint af veldareglunum og skilgreiningu á logra:

$$a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = xy$$

4. *Fæst beint af liðum 2 og 3 nefnilega:*

$$\log_a(x/y) = \log_a(x) + \log_a(1/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

5. *Við þurfum að sýna að ef talan a er hafin upp í veldið $r\log_a(x)$ þá fæst útkoman x^r:*

$$a^{r\log_a(x)} = (a^{\log_a(x)})^r = x^r$$

6. *Við þurfum að sýna að ef talan a er hafin upp í veldið $\log_b(x)/\log_b(a)$ þá fæst útkoman x.*
Athugum að fyrir öll $a, b \in \mathbb{R}_+$ gildir $a = b^{\log_b(a)}$. Þess vegna fæst:

$$a^{\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}} = (b^{\log_b(a)})^{\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}} = b^{\log_b(a) \cdot \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}} = b^{\log_b(x)} = x$$

Athugum að á flestum vasareiknum er ekki hægt að reikna alla logra. Yfirleitt er bara takki fyrir tíu-logrann sem er táknaður með log. Þess vegna er reikniregla sex hér að ofan mjög mikilvæg því að hún segir sér í lagi að fyrir sérhvert $a \in \mathbb{R}_+$ er

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

Dæmi:
Reiknið án vasareiknis:
(a) $\log_5(50) + \log_5(\frac{1}{2})$
(b) $\log_2(49) \cdot \log_7(2)$
(c) $(\log_{12}(1))^{12}$
Reiknið með vasareikni:
(d) $\log_7(22)$
(e) $\log_2(5)$
Lausn:
(a)
Við notum reiknireglur þrjú og fjögur:

$$\log_5(50) + \log_5(\frac{1}{2}) = \log_5(5^2 \cdot 2) - \log_5(2) = \log_5(5^2) + \log_5(2) - \log_5(2) = \log_5(5^2) = 2$$

(b)
Notum reiknireglu sex:

$$\log_2(49) \cdot \log_7(2) = \frac{\log_7(49)}{\log_7(2)} \cdot \log_7(2) = \log_7(49) = \log_7(7^2) = 2$$

(c)
Notum reiknireglu eitt:

$$(\log_{12}(1))^{12} = 0^{12} = 0$$

(d)
Notum reiknireglu sex, stingum stærðinni $\log(22)/\log(7)$ inní vasareikninn og fáum

$$\log_7(22) \approx 0,629532003$$

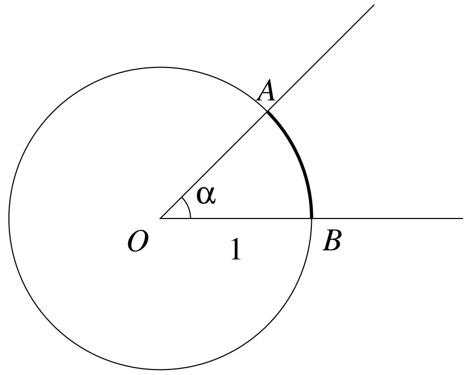
(e)
Notum reiknireglu sex, stingum stærðinni $\log(5)/\log(2)$ inní vasareikninn og fáum

$$\log_2(5) \approx 2,321928095$$

Bogaeiningar

Hingað til höfum við í öllum reikningum okkar notað mælieininguna *gráður* til þess að mæla horn. Samkvæmt skilgreiningu þá skiptir hún hringnum í þrjúhundruð-og-sextíu jafna hluta og einn slíkur hluti er kallaður ein gráða.
Hvernig talan 360 varð fyrir valinu er ekki vitað fyrir víst. Kenningar segja að þessi tala sé komin frá Babílon sem notuðu tugakerfi byggt á tölunni 60 en ekki á tölunni 10 eins og við. Sumir benda á að í tunglmánuði séu 30 dagar, og að í árinu séu 12 mánuðir, og halda að talan $360 = 12 \cdot 30$ sé komin þaðan.
Stærðfræðilega séð þykir talan 360 ekkert merkilegri en aðrar tölur og því engin ástæða til að búa til mælieiningakerfi byggt á henni. Í raun er til miklu náttúrulegri leið til að skilgreina nýja mælieiningu á horn. Þessa nýju mælieiningu köllum við *bogaeiningu* og hún er skilgreind á eftirfarandi máta:

Látum α vera horn. Köllum oddpunkt hornsins O. Teiknum hring með geisla 1 *með miðju í punktinum O. Armar hornsins skera hringinn í tveimur punktum A og B. Stærð hornsins α er þá jafnt lengd bogans á milli punktanna A og B. (lengd hans eins og hann væri mældur með málbandi.)*



Á myndinni til hliðar sést mynd af horni α. Búið er að teikna inn einingarhring á myndina og merkja inn skurðpunktana A og B. Stærð hornsins α er jafnt lengd bogans milli A og B sem er feitletraður.

Samkvæmt þessari skilgreiningu þá verður heill hringur 2π bogaeiningar því að það er ummál hrings með geisla 1.
Horn beinnar línu er π bogaeiningar og rétt horn er $\frac{\pi}{2}$ bogaeiningar.

Stundum er mælieiningin *Rad* notuð fyrir bogaeiningar. Í hreinni stærðfræði er samt sterkari hefð fyrir því að láta horn vera einingarlaus og skrifa einfaldlega $\angle ABC = x$ í staðin fyrir $\angle ABC = x\,Rad$.

Vesnlin milli gráða og bogaeininga er svona:

$$x\,Rad = \left(x \cdot \frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} \qquad \text{og} \qquad x^{\circ} = x \cdot \frac{2\pi}{360}\,Rad$$

Dæmi:
(a) Skrifið $\frac{\pi}{6}$ *Rad* í gráðum.
(b) Skrifið 70° í bogaeiningum.
Lausn:
(a)

$$\frac{\pi}{6}\,Rad = \left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} = 30^{\circ}$$

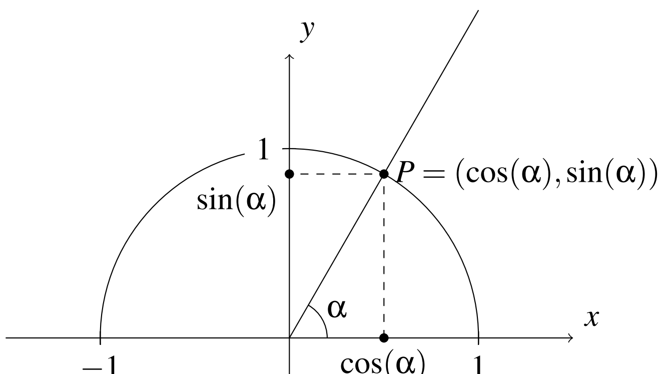
(b)

$$70^{\circ} = 70 \cdot \frac{2\pi}{360}\,Rad = \frac{7}{18}\pi\,Rad$$

Einingarhringurinn og hornaföllin

Munum að hringurinn sem er miðju í punktinum $(0,0)$ í hnitakerfinu og geisla einn er kallaður einingarhringurinn.
Í þessum kafla munum við nota einingarhringinn og bogaeiningar til að skilgreina hornaföllin á nýjan máta.

Nú er markmiðið að skýra stærðirnar $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ *og* $\cot(\alpha)$*:*
Eftirfarandi útskýring virkar aðeins ef unnið er í bogaeiningum:



Teiknum einingahring í hnitakerfið.
Setjum blýantinn okkar í punktinn $(1,0)$ og færum hann rangsælis eftir einingarhringnum þar til blýanturinn er búinn að færast um vegalengdina α. (Ef α er neikvæð tala förum við réttsælis um vegalengdina $-\alpha$).
Hér er í lagi þó að α sé stór tala og við förum marga hringi í kringum einingahringinn.
Þegar blýanturinn er búinn að ferðast um vegalengdina α þá stoppum við og mörkum punktinn P inná hnitakerfið þar sem stoppað var.
Kósínus af hornina α er nú skilgreindur sem x-hnit punktsins P, og sínus af horninu α er skilgreindur sem y-hnit punktsins P.
Við skilgreinum svo $\tan(\alpha)$ *og* $\cot(\alpha)$ *með forúlunum*

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad (\cos(\alpha) \neq 0)$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \qquad (\sin(\alpha) \neq 0)$$

Skoðum aðeins hvernig þessi útskýring tengist hornum.
Þegar við færum blýantinn eftir einingahringnum erum við í rauninni að mæla hornið sem hefur oddpunkt í hnitinu $(0,0)$, hefur jákvæða hluta x-ássins sem arm og hefur stærðina α ef það er mælt í bogaeiningum. Við höfum teiknað þetta horn inná myndina og þar sést að efri armurinn gengur í gegnum punktinn P sem fékkst í útskýringunni hér að ofan.
Setjum fram formlegri skilgreiningu á hornaföllunum:

Ef $0 \leq \alpha \leq \pi$ þá látum við $E = (1,0)$ og $O = (0,0)$.
Veljum nú punktinn P sem er í fjarlægðinni einn frá O, sem hefur y-hnit sem er ekki neikvætt og er þannig að $\angle EOP = \alpha$.
Við skilgreinum $\cos(\alpha)$ *sem x-hnit punktsins P.*
Við skilgreinum $\sin(\alpha)$ *sem y-hnit punktsins P.*

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *er* 2π*-lotubundna jafnstæða fallið sem uppfyllir skilgreininguna að ofan fyrir* $\alpha \in [0,\pi]$
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *er* 2π*-lotubundna oddstæða fallið sem uppfyllir skilgreininguna að ofan fyrir* $\alpha \in [0,\pi]$

Taka skal fram að þessi skilgreining er algjörlega í samræmi við skilgreiningu hornafalla sem sett var fram í kaflanum um þríhyrninga.

Þekkt gildi á hornaföllum

Skoðum nú nokkur gildi á α í samhengi við útskýringuna á hornaföllunum hér að ofan.
Munið að við látum blýant byrja í punktinum $(1,0)$ og færum okkur eftir einingarhringnum eins langt og α segir til um, og endum í punkti P

1. Ef $\alpha = 0$ þá færum við okkur ekki neitt. Við endum í sama punkti og við byrjum í og þess vegna verður $P = (1,0)$. Þess vegna er $\cos(0) = 1$ og $\sin(0) = 0$.

2. Ef $\alpha = \pi/2$ þá færum við okkur rangsælis um fjórðung af hringnum (ummál hringsins er 2π). Við endum semsagt í topppunkti hringsins sem hefur hnit $P = (0,1)$ svo $\cos(\pi/2) = 0$ og $\sin(\pi/2) = 1$

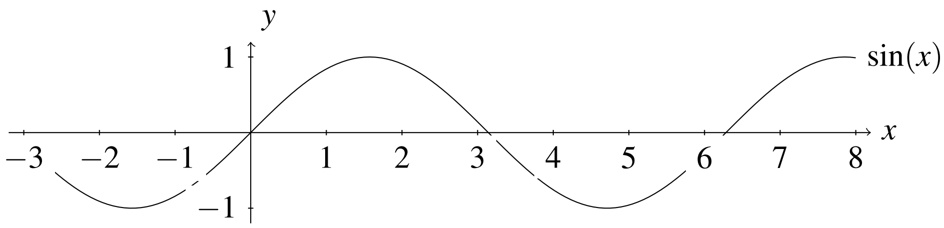
3. Ef $\alpha = \pi$ þá færum við okkur rangsælis um hálfan hring. Þá erum við stödd í punktinum $P = (-1,0)$ svo að $\cos(\pi) = -1$ og $\sin(\pi) = 0$

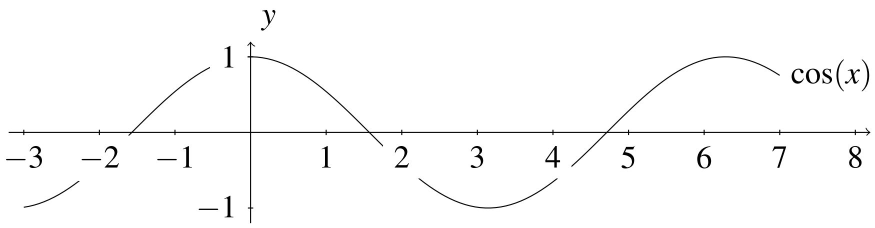
Svona gætum við lengi haldið áfram.
Í kaflanum um þríhyrniga leiddum við út sínus fyrir tvö horn í viðbót, setjum upp töflu

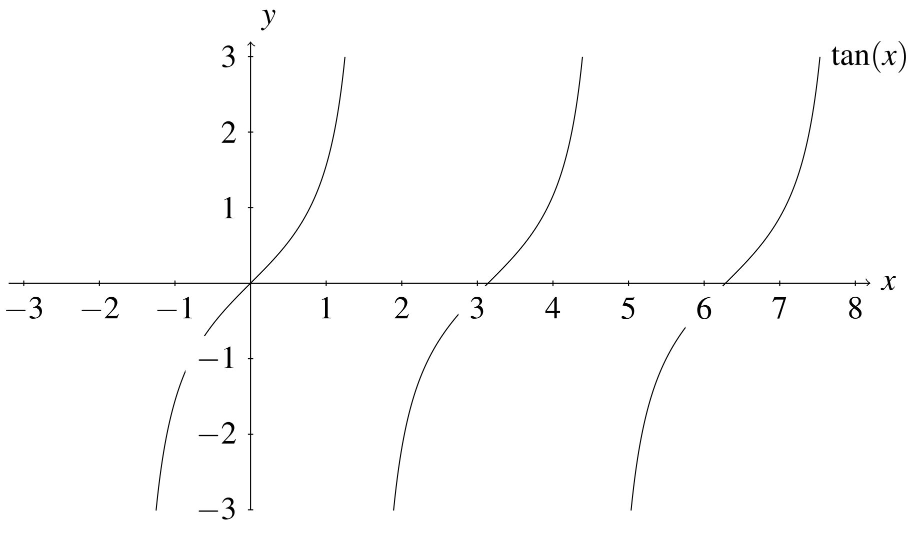
x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
0	0	1	0	$--$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$--$	0

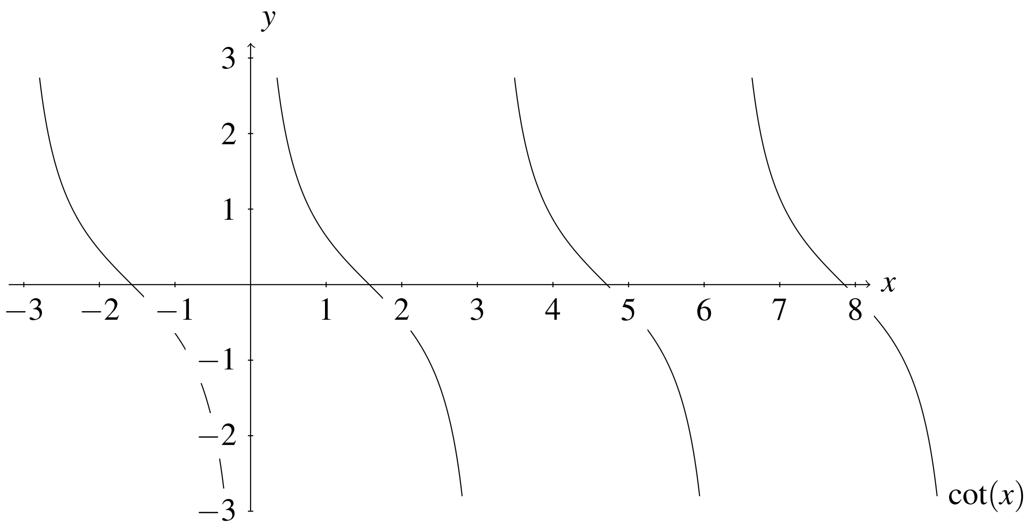
Myndir af hornaföllunum

Mikilvægt er að nemandi geti séð fyrir sér hornaföllin á marga mismunandi vegu. Ein leiðin er að sjá fyrir sér einingarhringinn, en það er einnig mikilvægt að þekkja myndirnar af grafi þeirra ef litið er á þau sem venjuleg föll. Þau líta svona út:









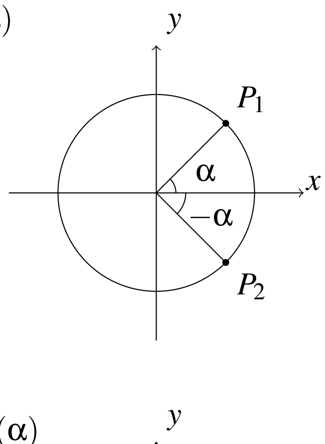
Takið eftir að öll föllin eru lotubundin með lotu 2π.
Takið líka eftir að kósinusinn lítur næstum alveg eins út og sínusinn, eini munurinn á gröfunum er að búið er að hliðra öðru til hliðar um π miðað við hitt.
Sínusinn og kósínusinn eru takmörkuð föll, takmörkuð af einum að ofan og mínus einum að neðan.
Tangensinn og kótangensinn eru ekki takmörkuð heldur stefna þau á plús eða mínus óendanlegt á sumum stöðum. Það eru staðirnir sem kósínusinn eða sínusinn eru núll

Hornafallareglur

Um hornaföllin gilda margar reglur sem gagnlegt er að muna, margar þeirra er hægt að sjá fyrir sér myndrænt með einingahringnum. Við skulum taka dæmi um nokkrar slíkar, og rökstyðja þær í samræmi við útskýringuna að ofan

(1) Rökstyðjum að

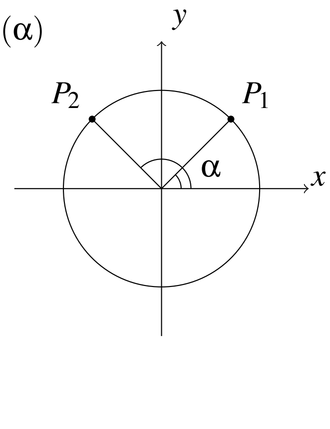
$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) \qquad \text{og} \qquad \sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$$



Við byrjum í punktinum $(1,0)$. Færum okkur fyrst rangsælis eftir einingarhringnum um vegalengdina α og mörkum þar punktinn P_1, færum okkur svo rangsælis um α og mörkum þar inn P_2. Auðvelt er að sjá fyrir sér að punktarnir munu hafa sömu x-hnit en y-hnit annars hefur gagnstætt formerki miðað við y-hnit hins. En það er einmitt það sem að við erum að reyna að rökstyðja.

(2) Rökstyðjum að

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \text{og} \qquad \sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$$



Við mörkum inn tvo punkta inná hnitakerfið.
P_1 mörkum við með því að færa okkur um hornið $\pi-\alpha$, en það er gert með því að færa sig fyrst rangsælis um π en svo aftur til baka réttsælis um hornið α.
P_2 mörkum við inná hnitakerfið með því að færa okkur um hornið α rangsælis.
Þá er auðvelt að sjá að P_1 og P_2 hafa sömu y-hnit en x-hnit þeirra hafa gagnstæð formerki. En það er einmitt það sem við erum að reyna að rökstyðja.

Það er hægt að rökstyðja allskonar fleiri reglur á auðveldan máta.
Hér verða nokkrar slíkar settar fram, höfundur hvetur nemendur til að reyna að sjá þessar reglur fyrir sér myndrænt.

$$\begin{aligned}
\cos(-\theta) &= \cos\theta \\
\sin(-\theta) &= -\sin\theta, \\
\cos(\pi-\theta) &= -\cos\theta \\
\sin(\pi-\theta) &= \sin\theta, \\
\cos(\theta+\pi) &= -\cos\theta \\
\sin(\theta+\pi) &= -\sin\theta, \\
\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\theta) &= \sin\theta \\
\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\theta) &= \cos\theta,
\end{aligned}$$

Athugum að allar reglur sem voru settar fram í kaflanum um þríhyrninga gilda einnig almennt fyrir hornaföll.

Andhverfur hornafallana

Skoðum aðeins jöfnuna

$$\sin(x) = 0$$

Segjum að við myndum vilja einangra x útúr þessari jöfnu. Nú gæti einhver stungið upp á að $x = 0$ sé lausnin því að $\sin(0) = 0$.
Það er þó aðeins að hluta til rétt því að þessi jafna hefur í raun óendanlega margar lausnir.
$x = \pi$ er líka lausn á þessari jöfnu og einnig $x = 2\pi$.
Raunin er að $n\cdot\pi$ er lausn á þessari jöfnu fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$.
Það sem meira er þá eru þetta allar lausnirnar. Þess vegna skrifum við stundum

$$\sin^{-1}(0) = \{n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Þetta gildir um fleiri tölur en 0. Jafnan $\sin(x) = a$ hefur nefnilega óendanlega margar lausnir í x fyrir öll $a \in [-1,1]$.
Hinsvegar er auðvelt að sjá að nákvæmlega ein af þessum lausnum er tekin af bilinu $[-\pi/2, pi/2]$.
Við skilgreinum þess vegna nýtt fall Arcsin sem að er þannig að

$$\text{Arcsin(a)} = x_0$$

Þá og því aðeins að x_0 sé talan af bilinu $[-\pi/2, \pi/2]$ sem uppfyllir jöfnuna

$$\sin(x_0) = a$$

Arcsin er þessvegna hálfgerð andhverfa sínusfallsins vegna þess að

$$\sin(\text{Arcsin(x)}) = x \qquad \text{fyrir öll } x \in [-1,1]$$

hún nær þó ekki að verða algjör andhverfan því að það öfuga gildir ekki. Þ.e.a.s. ekki er hægt að fullyrða að $\text{Arcsin}(\sin(x))$ sé jafnt og x.
T.d. er $\sin(2\pi) = 0$ og $\text{Arcsin}(0) = 0$ og því fæst

$$\text{Arcsin}(\sin(2\pi)) = \text{Arcsin}(0) = 0$$

Við skulum nú skilgreina andhverfur allra hornafallanna formlega:

1. *Arcsin* : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
   er fallið sem uppfyllir

$$\sin(\textit{Arcsin(x)}) = x \qquad \textit{fyrir öll } x \in [-1,1]$$

2. *Arccos* : $[-1,1] \to [0,\pi]$
   er fallið sem uppfyllir

$$\cos(\textit{Arccos(x)}) = x \qquad \textit{fyrir öll } x \in [-1,1]$$

3. *Arctan* : $[-\infty,\infty] \to [-\pi/2, \pi/2]$
   er fallið sem uppfyllir

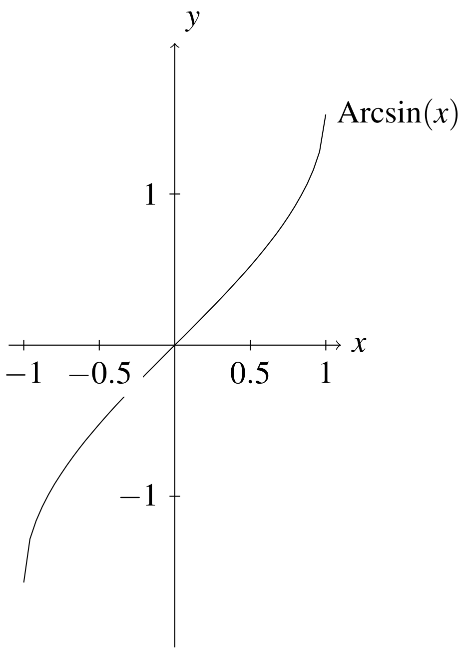
$$\tan(\textit{Arctan(x)}) = x \qquad \textit{fyrir öll } x \in [-\infty,\infty]$$

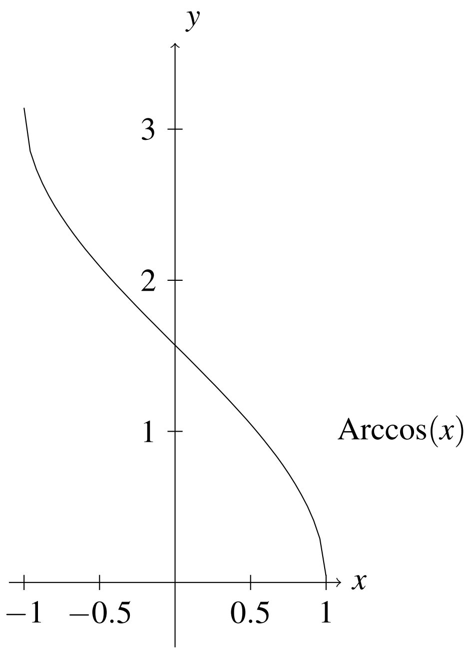
4. *Arccot* : $[-\infty,\infty] \to [0,\pi]$
   er fallið sem uppfyllir

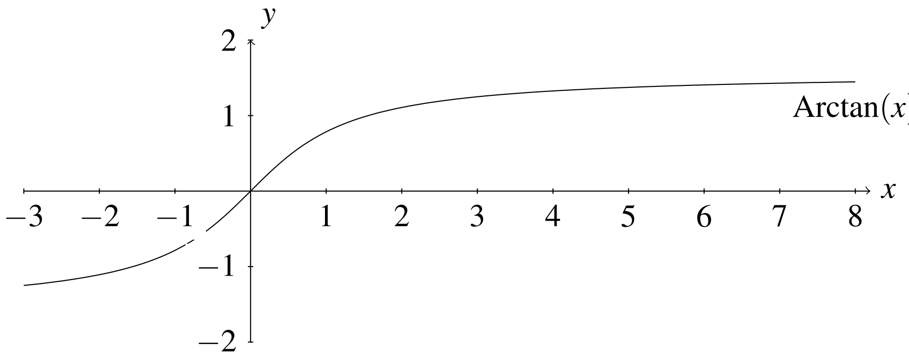
$$\cot(\textit{Arccot(x)}) = x \qquad \textit{fyrir öll } x \in [-\infty,\infty]$$

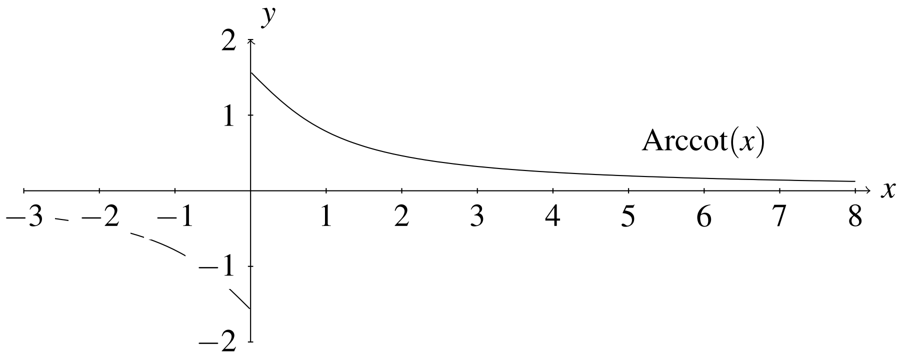
Tökum sérstaklega eftir bakmengjum fallanna.
Hér er bakmengi Arcsin fallsins bilið $[-\pi/2, \pi/2]$ því að Arcsin(a) er lausnin á jöfnunni $sin(x) = a$ sem er tekin af því bili.
Hinsvegar er annað bakmengi fyrir fallið Arccos því að Arccos(a) er lausnin á jöfnunni $cos(x) = a$ sem er tekin af bilinu $[0,\pi]$
Bakmengi Arctan og Arccot eru valin af sömu ástæðum.
Tökum einnig eftir formengjunum.
Formengið fyrir Arcsin og Arccos er bilið $[-1,1]$ því að föllin cos og sin taka bara gildi á því mengi. Jafnan $\sin(x) = 2$ er til dæmis óleysanleg því að sínusfallið er alltaf minna en einn.
Formengið fyrir Arctan og Arccot er hinsvegar bilið $[-\infty,\infty]$ það er af því að þessi föll eru ótakmörkuð, jafnan $tan(x) = a$ hefur lausn fyrir öll a. Samanber myndina af gröfum fallanna fyrir ofan.

Mikilvægt er að geta séð fyrir sér andhverfur hornafallanna á mynd.
Hér eru myndir af þeim:









Yrðingar

Stærðfræðileg *yrðing* er setning eða fullyrðing sem að er annaðhvort sönn eða ósönn. Yrðingar eru oftast táknaðar með bókstöfum, alveg eins og tölur, föll, mengi eða aðrir hlutir í stærðfræði.
Dæmi um sannar yrðingar er

P : „Talan 7 er frumtala."

Q : „Vigdís Finnbogadóttir var einu sinni forseti Íslands."

Dæmi um ósannar yrðingar er

R : „2+2=5"

S : „Jólin eru haldin í febrúar."

Í rauninni er það eina sem skiptir máli að yrðingarnar séu án nokkurs vafa annað hvort sannar eða ósannar.

Taka skal sérstaklega fram að allar yrðingar eru sannar nema þær séu ósannar. Sem dæmi um þetta má nefna yrðingarnar

$$T: \text{ „Allir keisarar Íslands eru rauðhærðir.“}$$

$$U: \text{ „Ef tunglið er úr osti þá er sólin líka úr osti.“}$$

Báðar þessar yrðingar teljast vera sannar!
Enginn keisari er á Íslandi svo að sér í lagi er enginn keisari á Íslandi rauðhærður. Þess vegna er ekki hægt að rökstyðja að fullyrðingin T sé ósönn. Þess vegna verður hún sjálkrafa sönn.
Sólin er vissulega ekki úr osti, en tunglið er heldur ekki úr osti og það hefur aldrei verið úr osti. Í rökfræðinni er viðhorfið þannig að við látumst ekki getað vitað hvað myndi gerast ef tunglið væri úr osti því það hefur aldrei gerst. Þess vegna er ekki hægt að rökstyðja að yrðingin U se ósönn. Hún verður þvi sjálfkrafa sönn.

Tökum eitt dæmi um yrðingu í viðbót.

$$V: \text{ „Ef talan 7 er frumtala þá er Ísland eyja í Atlantshafi.“}$$

Þetta er enn eitt dæmi um sanna yrðingu.
Vissulega er ekkert orsakasamhengi á milli þess að 7 sé frumtala og að Ísland sé eyja í Atlantshafi. Þessi yrðing er engu að síður sönn.
Hægt er að skilja þetta sem svo að rökfræðingar látast ekki vita hvort það sé orsakasamhengi þarna á milli. Það eina sem þeir vita er að 7 er frumtala og að Ísland er eyja í Atlantshafi. Þeir geta ekki rökstutt að orsakasamhengið sé ekki til staðar og því láta þeir eins og svo sé.

Aðgerðir á yrðingum

Afskaplega lítið væri hægt að gera með yrðingar ef ekki væri hægt að framkvæma neinar aðgerðir á þeim. Hér verða taldar upp þær helstu.

- Aðgerðin $\neg$
  Látum P vera yrðingu. Með aðgerðinni $\neg$ er hægt að búa til nýja yrðingu táknaða með $\neg P$ sem hljómar svona:

  $$\neg P: \text{ „Yrðingin } P \text{ er ósönn.“}$$

  Hér er listi yfir sannleiksglidi $\neg P$:
  Yrðinginn $\neg P$ er sönn ef P er ósönn.
  Yrðingin $\neg P$ er ósönn ef P er sönn.

- Aðgerðin $\wedge$
  Látum P og Q vera yrðingar. Með aðgerðinni $\wedge$ er hægt að búa til nýja yrðingu táknaða með $P \wedge Q$ sem hljómar svona:

  $$P \wedge Q: \text{ „Yrðingin } P \text{ er sönn og yrðingin } Q \text{ er sönn.“}$$

  Skoðum hvenær $P \wedge Q$ er sönn yrðing og hvenær hún er ósönn.
  Hér þarf að skoða fjóra möguleika, eftir því hvort P og Q eru sannar eða ósannar:
  Ef P er sönn yrðing og Q er sönn yrðing þá er $P \wedge Q$ sönn yrðing.

Ef P er sönn yrðing og Q er ósönn yrðing þá er $P \wedge Q$ ósönn yrðing.
Ef P er ósönn yrðing og Q er sönn yrðing þá er $P \wedge Q$ ósönn yrðing.
Ef P er ósönn yrðing og Q er ósönn yrðing þá er $P \wedge Q$ ósönn yrðing.

- Aðgerðin $\vee$
  Látum P og Q vera yrðingar. Með aðgerðinni $\vee$ er hægt að búa til nýja yrðingu táknaða með $P \vee Q$ sem hljómar svona:

  $P \vee Q$: „Yrðingin P er sönn eða yrðingin Q er sönn"

  (Í rökfræði er orðið „eða" alltaf notað í meiningunni „annaðhvort eða".)
  Skoðum hvenær $P \vee Q$ er sönn yrðing og hvenær hún er ósönn.
  Hér þarf að skoða fjóra möguleika, eftir því hvort P og Q eru sannar eða ósannar:
  Ef P er sönn yrðing og Q er sönn yrðing þá er $P \vee Q$ sönn yrðing.
  Ef P er sönn yrðing og Q er ósönn yrðing þá er $P \vee Q$ sönn yrðing.
  Ef P er ósönn yrðing og Q er sönn yrðing þá er $P \vee Q$ sönn yrðing.
  Ef P er ósönn yrðing og Q er ósönn yrðing þá er $P \vee Q$ ósönn yrðing.

- Aðgerðin $\rightarrow$
  Látum P og Q vera yrðingar. Með aðgerðinni $\rightarrow$ er hægt að búa til nýja yrðingu táknaða með $P \rightarrow Q$ sem hljómar svona:

  $P \rightarrow Q$: „Ef P er sönn yrðing þá er Q sönn yrðing"

  Að ofan voru tekin tvö dæmi um svona yrðingu. Við skulum skoða hvenær $P \rightarrow Q$ er sönn yrðing og hvenær hún er ósönn.
  Ef P er sönn yrðing og Q er sönn yrðing þá er $P \rightarrow Q$ sönn yrðing.
  Ef P er sönn yrðing og Q er ósönn yrðing þá er $P \rightarrow Q$ ósönn yrðing.
  Ef P er ósönn yrðing og Q er sönn yrðing þá er $P \rightarrow Q$ sönn yrðing.
  Ef P er ósönn yrðing og Q er ósönn yrðing þá er $P \rightarrow Q$ sönn yrðing.

- Aðgerðin $\leftrightarrow$
  Látum P og Q vera yrðingar. Með aðgerðinni $\leftrightarrow$ er hægt að búa til nýja yrðingu táknaða með $P \leftrightarrow Q$ sem hljómar svona:

  $P \leftrightarrow Q$: „P er sönn yrðing þá og því aðeins að Q er sönn yrðing"

  Við skulum skoða hvenær $P \leftrightarrow Q$ er sönn yrðing og hvenær hún er ósönn.
  Ef P er sönn yrðing og Q er sönn yrðing þá er $P \leftrightarrow Q$ sönn yrðing.
  Ef P er sönn yrðing og Q er ósönn yrðing þá er $P \leftrightarrow Q$ ósönn yrðing.
  Ef P er ósönn yrðing og Q er sönn yrðing þá er $P \leftrightarrow Q$ ósönn yrðing.
  Ef P er ósönn yrðing og Q er ósönn yrðing þá er $P \leftrightarrow Q$ sönn yrðing.

Í staðin fyrir að telja upp alla möguleikana þá getur verið þægilegt að setja upp töflu fyrir sannleiksgildi yrðinga. Í svona töflu þá er talan 0 notuð fyrir ósanna yrðingu en talan 1 notuð fyrir sanna yrðingu. Setjum upp töflu fyrir allar aðgerðirnar sem hafa verið kynntar í þessum kafla:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Það sem stendur vinstra megin við tvöföldu lóðréttu línuna eru allar mögulegar samsetningar af sannleiksgildum á P og Q en hægra megin við tvöföldu lóðréttu línurnar eru afleiðingar af því.

Athugum að alveg eins og í venjulegri algebru þá skiptir öllu máli í hvaða röð aðgerðir eru framkvæmdar. Í venjulegri algebru segir reglan að margföldun skuli framkvæma á undan samlegningu en í rökfræði eru engar svoleiðis reglu. Þegar unnið er í rökfræði þarf maður því alltaf að vera duglegur að nota sviga.
Berum rétt snöggvast saman yrðingarnar $(P \wedge Q) \vee T$ og $P \wedge (Q \vee T)$.

Yrðinguna $(P \wedge Q) \vee T$ má túlka í töluðu máli sem

$$(P \wedge Q) \vee T: \text{ „Yrðingarnar } P \text{ og } Q \text{ eru báðar sannar eða yrðingin } T \text{ er sönn"}$$

En yrðinguna $P \wedge (Q \vee T)$ má túlka í töluðu máli sem

$$P \wedge (Q \vee T): \text{ „}P \text{ er sönn og önnur hvor yrðingin } Q \text{ eða } T \text{ er sönn"}$$

Það ætti að vera öllum ljóst að þessar setningar þýða tvo mismunandi hluti.

Dæmi:
Gerum ráð fyrir að P og Q séu sannar yrðingar og að R og S séu ósannar yrðingar. Skerið úr um hvort að eftirfarandi yrðingar séu sannar eða ósannar:
(a) $(P \vee R) \wedge Q$
(b) $(P \to R) \to S$
(c) $P \to (R \to S)$
(d) $P \vee ((Q \leftrightarrow S) \vee R)$
Lausn:
(a)
Yrðingin P er sönn svo að yrðingin $P \vee R$ er það líka.
Yrðingin $P \vee R$ er sönn og yrðingin Q sönn svo að $(P \vee R) \wedge Q$ er sönn.
(b)
Yrðingin P er sönn en R er ósönn, þess vegna er yrðingin $P \to R$ ósönn.
$P \to R$ er ósönn og S er ósönn, þess vegna er yrðingin $(P \to R) \to S$ sönn.
(c)
Yrðingin R er ósönn og yrðingin S er það líka svo $R \to S$ er sönn yrðing.
P er sönn yrðing og $R \to S$ er ósönn svo að $P \to (R \to S)$ er ósönn yrðing.
(d)
P er sönn yrðing, þess vegna verður $P \vee L$ sönn yrðing fyrir allar yrðingar L. Sér í lagi gildir þetta ef $L = ((Q \leftrightarrow S) \vee R)$. Þess vegna er $P \vee ((Q \leftrightarrow S) \vee R)$ sönn yrðing.

Yrðingar um óþekkt stök

Oft getur verið hentugt að setja fram yrðingu um einhverja tölu n án þess að þekkja töluna n fyrirfram. Þá leyfum við okkur að setja fram yrðingar um fyrirfram óþekktar stærðir.
Til dæmis getum við sett fram yrðingu $p(n)$:

$$p(n): \text{ „Náttúrulega talan } n \text{ er frumtala."}$$

Hér yrði $p(11)$ sönn yrðing en $p(12)$ yrði það ekki.
Þetta er ekki eingöngu hægt fyrir tölur heldur alls konar stök, til dæmis væri hægt að setja fram yrðinguna $k(a)$

$$k(a): \text{ „Íslenska orðið a er nafnorð"}$$

Hér yrði $k(\text{hús})$ sönn yrðing en $k(\text{hlaupa})$ er ósönn yrðing.

Þrepasannanir

Við látum $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ tákna mengi náttúrlegra talna auk 0. Á þessu mengi gildir eftirfarandi frumsenda, sem allir ættu að vera sammála um að sé rétt og nefnist *velröðunarregla*:

Sérhvert ekki tómt hlutmengi í $\mathbb{N}_0$ hefur minnsta stak.

Af velröðunarreglunni leiðir *þrepunarregla*:

Látum $a \in \mathbb{N}_0$, $p(n)$ vera yrðingu um $n \in \mathbb{N}_0$ og gerum ráð fyrir að eftirfarandi skilyrði gildi:

(1) Yrðingin $p(a)$ er sönn.

(2) Fyrir sérhvert $n \in \mathbb{N}_0$ sem uppfyllir $n \geq a$ þá er yrðingin $p(n) \to p(n+1)$ sönn.

Þá er yrðingin $p(n)$ er sönn fyrir öll $n \geq a$.

Tökum dæmi um þrepasannanir:

Dæmi:
Sýnum að fyrir allar náttúrulegar tölur n gildir

$$\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Athugasemd
Rifjum upp að gríski stafurinn stóra sigma sem er notaður hér táknar summu.
Hér er

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n$$

Lausn:
Látum $p(n)$ tákna yrðinguna

$$p(n): \ \sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

1. Auðvelt er að sýna að $p(1)$ er sönn.
   Ef við stingum inní jöfnuna $n = 1$ fæst vinstra megin jafnaðarmerkisins

   $$\sum_{k=1}^{1} k = 1$$

   og hægra megin jafnaðarmerkisins stendur

   $$\frac{1}{2} 1 \cdot (1+1) = 1$$

   svo

   $$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1}{2} 1 \cdot (1+1)$$

   og $p(1)$ er sönn.

2. Sýnum nú að fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ gildi $p(n) \to p(n+1)$.
   Við gerum ráð fyrir að $p(n)$ sé sönn, þ.e.a.s. við gerum ráð fyrir að

$$\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

   Við viljum sýna að $p(n+1)$ sé sönn, þ.e.a.s. við viljum sýna að

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \tfrac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)$$

   En það gerum við svona:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k = (n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= (\frac{1}{2}n+1)(n+1) = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$$

   Þar sem annað jafnaðarmerkið fékkst af þrepunarforsendunni.
   Við höfum sýnt að $p(n)$ hafi í för með sér $p(n+1)$.

Af liðum eitt og tvö sést að yrðingin $p(n)$ er sönn fyrir öll n.

Talningarlögmál og !-táknið

Gerum ráð fyrir að einhvers konar val fari fram í n skrefum þar sem möguleikarnir í i-ta skrefi eru k_i talsins, það er að segja í fyrsta skrefi veljum við einn af k_1 möguleikum, í næsta skrefi veljum við einn af k_2 möguleikum og svo framvegis. Þá er heildarfjöldi mögulegra ólíkra útkoma jafn

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n.$$

Þessi setning er jafnan nefnd *talningarlögmálið*.
Til að glöggva sig á talningarlögmálinu getur verið gott að líta á dæmi: Maður nokkur hyggst snæða á veitingahúsi þar sem í boði eru þrír mismunandi forréttir, fjórir mismunandi aðalréttir og tveir mismunandi eftirréttir. Talningarlögmálið segir þá að þessi maður getur valið sér þriggja rétta máltíð af matseðlinum á nákvæmlega $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ ólíka vegu.
Þegar verið er að velja marga hluti úr sama mengi koma oft fyrir runur af þáttum af gerðinni $p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot (p-q)$ fyrir einhverjar náttúrlegar tölur p og q. Til þess að auðvelda vinnu með slík margfeldi skilgreinum við fyrir náttúrlega tölu p stærðina

$$p! = p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

sem kallast p *hrópmerkt*. Til hægðarauka er aðgerðin líka skilgreind fyrir 0 þannig að $0! = 1$.
Ímyndum okkur að við höfum mengi með p ólík stök og viljum kanna á hve marga vegu sé hægt að raða þessum stökum upp. Fyrsta stakið má þá velja á p vegu, næsta stak á $p-1$ veg o.s.frv. Ólíkar uppraðanir stakanna eru þá $p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = p!$ talsins.

Umraðanir og samantektir

Oft er þörf á að velja nokkur stök úr sama mengi, segjum q stök úr p staka menginu A. Slíkt val á stökum er kallað *q-umröðun* úr A. Fyrsta stakið má velja á p vegu, næsta á $p-1$ veg, o.s.frv. þangað til komið er að síðasta stakinu, en það má velja á $p-q+1$ veg. Samkvæmt talningarlögmálinu gefur þetta að valið má framkvæma á $p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-q+1) = \frac{p!}{(p-q)!}$ vegu alls. Fjöldi q-umraðana á p stökum er stundum táknaður $(p)_q$ og við höfum þá $(p)_q = \frac{p!}{(p-q)!}$.

Ímyndum okkur nú að röð stakanna sem við höfum valið skipti ekki máli og að við höfum aðeins áhuga á að vita um hversu margar mismunandi samsetningar staka er að ræða. Ef við beitum ofangreindum reikningum þá erum við að oftelja fjölda möguleika. Ef við gerum ráð fyrir því að búið sé að velja stökin okkar q þá eru $q!$ möguleikar á því að raða þeim upp þannig að talningarlögmálið gefur okkur að oftalningin er $q!$-föld. Þar með er fjöldi möguleika á að velja q stök af p án tillits til raðar $\frac{p!}{(p-q)!q!}$, þ.e. $\frac{1}{q!}(p)_q$, sem er $1/q!$ sinnum fjöldi q-umraðana úr p.

Val af þessu tagi á q stökum þar sem röðin skiptir ekki máli kallast *q-samantekt*. Fjöldi slíkra q-samantekta úr p stökum er táknaður $\binom{p}{q}$ og kallast *tvíliðustuðull*.

Við getum ímyndað okkur að við ætlum okkur að skipa 7 manna handboltalið úr 10 manna hópi. Ef við byrjum á að velja þá sem í liðinu eru má gera það á $\binom{10}{7} = \frac{10!}{(10-7)!7!}$ vegu, þ.e. fjöldi 7-samantekta úr 10 stökum. Að því loknu þarf að raða í mismunandi stöður í liðinu. Það er hægt að gera á 7! vegu. Þegar upp er staðið verður því fjöldi mismunandi liða jafn $7!\binom{10}{7} = 7!\frac{10!}{(10-7)!7!} = \frac{10!}{(10-7)!} = (10)_7$, þ.e. fjöldi mögulegra 7-umraðana úr 10 stökum.

Dæmi:
a)
Að lokinni skemmtun spyr bílstjóri hóp manna hvort þá vanti far. Tíu manns vantar far en fjögur pláss eru laus, á hve marga vegu getur farþegahópurinn orðið ef öll sæti eru fyllt?
(b)
Eftir að farþegar hafa verið valdir, þá er enn óútkljáð hver situr í framsætinu. Ef við tökum ekki tillit til mismunandi umraðana í aftursæti, á hve marga vegu má velja farþega í sætin?
Lausn:
(a)
Við getum valið fjóra úr 10 manna hópi, en fjöldi slíkra samsetinga er

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 210.$$

Eftir að farþegar hafa verið valdir, þá er enn óútkljáð hver situr í framsætinu. Ef við tökum ekki tillit til mismunandi umraðana í aftursæti, á hve marga vegu má velja farþega í sætin?
(b)
Við getum valið farþegahóp á 210 vegu síðan má úr þeim velja farþega í framsæti á fjóra vegu svo að við fáum $4 \cdot 210 = 840$ möguleika.

Þríhyrningur Pascals og tvíliðureglan

Látum p og q vera náttúrlegar tölur þ.a. $1 < q < p$ og rifjum upp að tvíliðustuðullinn $\binom{p}{q} = \frac{p!}{(p-q)!q!}$ er jafn fjölda möguleika á að velja q staka hlutmengi úr p stökum. Látum nú X vera einhvert p staka mengi og a vera einhvert stak í menginu X. Ef við nú veljum q staka hlutmengi úr menginu X þá geta tvö tilfelli komið upp: Annað hvort tilheyrir a hlutmenginu okkar eða ekki. Ef a er í hlutmenginu þá þurfum við að velja $q-1$ stak til viðbótar af þeim $p-1$ sem eftir eru, en það má gera á $\binom{p-1}{q-1}$ vegu. Ef hins vegar a er ekki í hlutmenginu þá þurfum við að velja öll q stökin fyrir hlutmengið úr þeim $p-1$ sem eftir eru, en það má gera á $\binom{p-1}{q}$ vegu. Við höfum því sýnt að

$$\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-1}{q}.$$

Ef við setjum p í stað $p-1$ í þessari jöfnu fæst að $\binom{p+1}{q} = \binom{p}{q-1} + \binom{p}{q}$. Á þessu formi má nota jöfnuna til að setja upp svokallaðan *Pascal-þríhyrning*, en hann er uppröðun á tvíliðustuðlunum í þríhyrning þar sem hvert stak er summa næstu tveggja staka í línunni fyrir ofan:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & \underline{1} & & \underline{2} & & 1 & & \\
 & 1 & & \underline{3} & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Hér er p númer línunnar sem til skoðunar er og q númer staksins í línunni. Vakin skal athygli á því að þríhyrningurinn er samhverfur um miðlínuna. Það ætti ekki að koma svo mjög á óvart því

$$\binom{p}{p-q} = \frac{p!}{(p-(p-q))!(p-q)!} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \binom{p}{q}.$$

Út úr p-tu línu í Pascal-þríhyrningnum má svo lesa stuðlana í $(a+b)^p$ samkvæmt svokallaðri *tvíliðureglu*:

$$(a+b)^p = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} a^{p-q} b^q.$$

Ef i og j eru þannig að $i+j=p$ verður stuðullinn við liðinn $a^i b^j$ samkvæmt þessu $\binom{i+j}{j} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$. Úr Pascal-þríhyrningnum fáum við því að

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 5ab^3 + b^4
\end{aligned}
$$

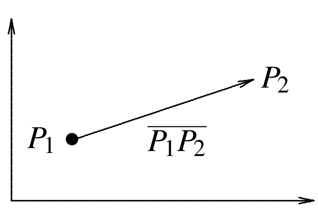
og svo framvegis.

Dæmi:
Liðið $(x^2-1)^4$.
Lausn: Við beitum tvíliðureglunni. Þá fæst:

$$
\begin{aligned}
(x^2-1)^4 &= \binom{4}{4}(x^2)^4 + \binom{4}{3}(x^2)^3(-1) + \binom{4}{2}(x^2)^2(-1)^2 + \binom{4}{1}x^2(-1)^3 + \binom{4}{0}(-1)^4 \\
&= x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1.
\end{aligned}
$$

Vigrar

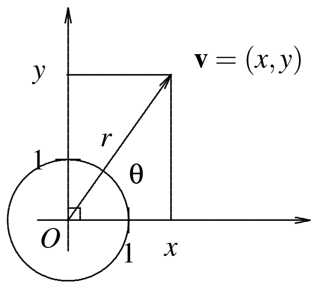
Látum $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$ vera tvo punkta í plani og drögum strik frá P_1 til P_2 og gefum því stefnu frá P_1 til P_2. Þetta stefnubundna strik nefnist *vigurinn frá* P_1 *til* P_2 og er táknað með $\overline{P_1P_2}$ og á mynd teiknum við hann sem ör frá



P_1 til P_2. Talan $x_2 - x_1$ nefnist *láhnit* eða *x-hnit* vigursins og talan $y_2 - y_1$ nefnist *lóðhnit* eða *y-hnit* hans. Raðtvenndin $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ nefnist hnit vigursins. Í sumum bókum eru hnit vigra aðgreind frá hnitum punkta með því að skrifa þau með annars konar svigum $[a,b]$ eða sem dálka $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Þetta skiptir litlu máli, því á samhenginu á alltaf að vera ljóst hvort raðtvennd er hnit punkts eða hnit vigurs.
Hugsum okkur nú að við tökum einhverja aðra punkta P_3 og P_4. Ef stefnubundna strikið frá P_3 til P_4 er þannig, að þegar P_3 er hliðrað yfir P_1, þá hliðrast P_4 í P_2, þá segjum við að $\overline{P_1P_2}$ og $\overline{P_3P_4}$ skilgreini sama *vigur*. Ef þetta gerist þá eru hnit $\overline{P_1P_2}$ þau sömu og hnit $\overline{P_3P_4}$. Vigur er því stefnubundið strik sem hefur engan fastan upphafs- eða lokapunkt. Ef hann er ritaður í planið sem vigur frá einum punkti til annars, þá eru hnit hans þau sömu hvar sem hann er teiknaður. Venja er að tákna vigra með feitu letri $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.... Núllvigurinn $\mathbf{0}$ er vigurinn sem hefur hnitin $(0,0)$.
Sérhver punktur P í planinu skilgreinir vigurinn $\overline{OP}$ frá upphafspunkti O til P. Hann nefnist *staðarvigur* punktsins P. Hnit hans eru þau sömu og hnit punktsins P.

Pólhnit vigra

Algengast er að tákna vigur með rétthyrndum hnitum (x,y) þar sem x táknar lárétta færslu og y táknar lóðrétta færslu sem vigurinn stendur fyrir eins og lýst er að ofan.
Stundum er þó hentugra að tákna vigurinn með svokölluðum *pólhnitum* af gerðinni $(r,\theta)_{\text{pól}}$.
Í pólhnitaframsetningu er fyrra hnitið, r, látið standa fyrir *lengd* vigursins.
Seinna hnitið, θ, er látið standa fyrir *stefnuhorn* vigursins, en stefnuhorn vigurs er skilgreint sem hornið sem vigurinn myndar miðað við jákvæða hluta x-ássins ef upphafspunktur hans er settur í upphafspunk hnitakerfisins O.



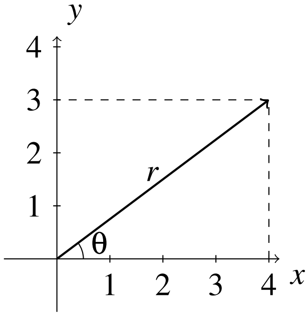
Með auðveldri þríhyrningafræði sést að vensl milli rétthyrndu hnita og pólhnita gefins vigurs eru gefin með

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta.$$

Dæmi:
(a) Finnið pólhnit vigursins $(4,3)$.
(b) Finnið pólhnit vigursins $(-4,3)$.
(c) Finnið rétthyrnd hnit fyrir vigur með pólhnit $(5,\pi/3)_{\text{pól}}$

Lausn:
(a)

Ef vigurinn er teiknaður upp sést að stefnuhorn hans, θ er á bilinu $[0,\pi/2]$ ef mælt er í bogaeiningum.
Með einfaldri þríhyrningafræði sést að $\tan(\theta) = \frac{3}{4}$ svo að $\theta = \text{Arctan}(\frac{3}{4}) \approx 0.643501108$.



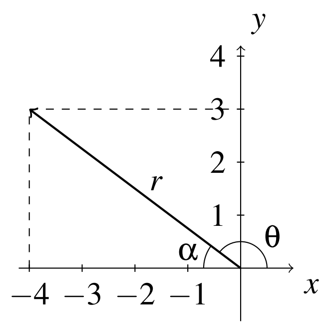
Lengd vigursins er $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Hnit vigursins í pólhnitum eru þess vegna

$$(5,\ 0.643501108)_{\text{pól}}$$

(b)

Hér sést á mynd að stefnuhornið (sem er merkt á mynd með θ) er á bilinu $[\pi/2, \pi]$.
Hornið sem er merkt með α inn á myndina er auðvelt að finna með þríhyrningafræði. Við höfum $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ svo að
$\alpha = \text{Arctan}(\frac{3}{4}) = 0.643501108$
En þá er $\theta = \pi - \alpha = 2.498091545$
Lengd vigursins fæst síðan með jöfnunni
$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ Pólhnit hans eru þess vegna

$$(5,\ 2.498091545)_{\text{pól}}$$



(c)
Mun einfaldara að skipta úr pólhnitum í rétthyrnd hnit en öfugt.
Hér setjum við einfaldlega inn í jöfnurnar

$$x = r\cos(\theta) = 5\cos(\frac{\pi}{3})5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y = r\sin(\theta) = 5\sin(\frac{\pi}{3}) = 5\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Svo rétthyrndu hnitin eru

$$(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$$

Vigrareikningur

Á mengi vigra í plani getum við skilgreinum við aðgerðirnar samlagningu og frádrátt. Við skilgreinum einnig margföldun vigurs við tölu.

Látum $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *og* $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ *vera vigra. Látum* $t \in \mathbb{R}$ *vera rauntölu. Summa og frádráttur vigranna eru skilgreind með*

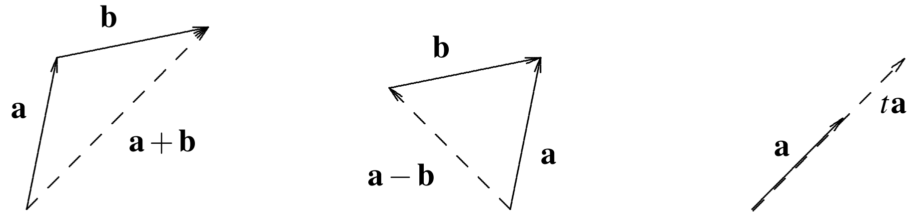
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

Margföldun við tölu er síðan skilgreind með

$$t \cdot \mathbf{a} = (ta_1, ta_2)$$

Þessar stærðir eiga sér rúmfræðilegar túlkanir.



Summmu tveggja vigranna **a** og **b** má túlka rúmfræðilega sem vigurinn sem nær frá upphafspunkti vigursins **a** til endapunkts vigursins **b** eftir að upphafspunktur **b** hefur verið staðsettur í endapunkti **a**

Vigurinn $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ má túlka rúmfræðilega sem vigurinn sem nær frá upphafspunkti **a** til upphafspunkts **b** ef þeir eru staðsettir þannig að þeir hafi sama lokapunkt.

Vigurinn $t\mathbf{a}$ má túlka rúmfræðilega sem vigurinn sem hefur sömu stefnu og vigurinn a en er t-sinnum lengri.

Nokkrar reiknireglur gilda um vigra sem eru sannaðar með því að beita tilsvarandi reiknireglur fyrir rauntölur:

Látum ***a,b*** *og* **c** *vera vigra og* $t,s\in\mathbb{R}$ *vera rauntölur. Þá gildir:*

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	*(tengiregla samlagningar),*
$(st)\mathbf{a}=s(t\mathbf{a})$	*(tengiregla margföldunar),*
$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	*(víxlregla samlagningar),*
$t(\mathbf{a}+\mathbf{b})=t\mathbf{a}+t\mathbf{b}$	*(dreifiregla),*
$(s+t)\mathbf{a}=s\mathbf{a}+t\mathbf{a}$	*(dreifiregla),*
$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$	*($\mathbf{0}$ er samlagningarhlutleysa),*
$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$	*(1 er margföldunarhlutleysa).*

Dæmi:
Reiknið $(1,2)+5(-2,5)$.
Lausn:
Við byrjum á að margfalda og leggjum síðan saman hnit fyrir hnit:

$$(1,2)+5(-2,5)=(1,2)+(-10,25)=(-9,27).$$

Innfeldi vigra og horn

Innfeldi vigra er aðgerð á vigrum sem úthlutar tveimur vigrum $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$ og $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ rauntölunni sem er gefin með formúlunni

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

Horn milli vigranna **a** og **b** er skilgreint þannig að þeim er hliðrað í sameiginlegan upphafspunkt og út frá hvorum fyrir sig er óendanleg hálflína dregin. Hornið milli hálflínanna er skilgreint sem hornið milli **a** og **b**.

Lengd vigursins **a** er svo eins og fyrr var sagt gefin með formúlunni

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

Við fyrstu sýn er ekki augljóst að innfeldi vigra hafi einhverja rúmfræðilega túlkun. Í ljós kemur þó að innfeldið er mjög nátengt lengd vigranna og horninu á milli þeirra. Í þessum kafla verður fjallað um þessi tengsl.

Byrjum á því að setja fram þrjár einfaldar reglur:

1. $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$

2. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

3. $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

Sönnum þær:

1. $|\mathbf{a}|^2 = (\sqrt{a_1^2+a_2^2})^2 = a_1^2 + a_2^2 = a_1a_1 + a_2a_2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$

2. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |(a_1+b_1, a_2+b_2)|^2 = (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2$
$= a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_2b_2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)$
$= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

3. $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |(a_1-b_1, a_2-b_2)|^2 = (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2$
$= a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$
$= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

Skoðum nú aðeins betur jöfnuna í reglu þrjú hér að ofan. Ef innfeldið $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ er einangrað útúr þessari jöfnu fæst jafnan

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2)$$

Hægra meginn jafnaðarmerkis í þessari jöfnu koma einungis fram lengdir á vigrum og ljóst er að þær breytast ekki þó svo að við snúum eða hliðrum hnitakerfinu. Því sjáum við að eftirfarandi regla gildir:

Innfeldi tveggja vigra er óbreytt þó svo að hnitakerfinu sé snúið í kringum þá.

Með þessa reglu sér til hjálpar er auðvelt að sanna aðalreglu þessa kafla. En hún segir einfaldlega

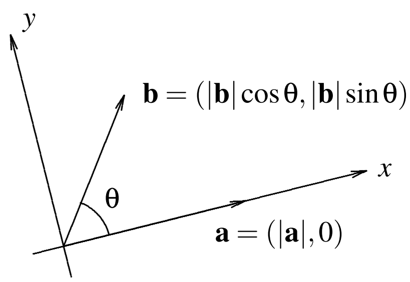
Látum θ vera hornið á milli vigranna $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.
Þá gildir:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta)$$

Sönnum þetta:

Látum $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ vera vigra og θ vera hornið á milli þeirra. Eftir að hnitakerfinu hefur verið hliðrað og snúið í kringum þá má gera ráð fyrir að vigurinn $\mathbf{a}$ sé samstefna x-ásnum. Þá verður θ stefnuhorn vigursins $\mathbf{b}$ og hnit þeirra verða þá gefin með

$$\mathbf{a} = (|\mathbf{a}|, 0) \qquad \textit{og} \qquad \mathbf{b} = (|\mathbf{b}|\cos(\theta), |\mathbf{b}|\sin(\theta))$$



En þá er innfeldi vigranna

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta)$$

Sértilvik af þessari reglu er oft notað í stærðfræði, það er sértilvikið þegar vigrarnir $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ eru hornréttir hvor á annan. Þekkt er að kósínus af réttu horni er núll og þess vegna getum við sett fram eftirfarandi aukasetningu:

Vigrar eru hornréttir þá og því aðeins að innfeldi þeirra sé núll.

Dæmi:
a) Reiknið innfeldi vigranna $(1,1)$ og $(2,1)$?
b) Reiknið $(1,2)\cdot((-2,1)-(12,0))$.
Lausn:
(a)
Við reiknum $(1,1)\cdot(2,1) = 2\cdot 1+1\cdot 1 = 2+1 = 3$.
(b)
Reiknum:

$$(1,2)\cdot((-2,1)-(12,0)) = (1,2)\cdot(-14,1) = 1\cdot(-14)+2\cdot 1 = -12$$

Dæmi
Finnið kósínusinn af horninu θ milli $(1,2)$ og $(2,1)$.
Lausn:
Við notum jöfnuna $(1,2)\cdot(2,1) = |(1,2)||(2,1)|\cos(\theta)$ og með því að einangra fáum við

$$\cos(\theta) = \frac{(1,2)\cdot(2,1)}{|(1,2)||(2,1)|} = \frac{2+2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

Þríhyrningsójafnan

Auðséð er að í þríhyrningi er sérhver hliðarlengd minni en eða jöfn summu hinna tveggja. Ein þekktasta ójafna stærðfræðinnar er þríhyrningsójafnan, en hún lýsir þessari staðreynd í búningi vigra:

Látum $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *vera vigra.*
Þá gildir:

1. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ *(þríhyrningsójafnan)*
2. $||\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$

Sönnum þetta.

1. *Það er þekkt staðreynd að* $|\cos(\theta)| \leq 1$.
   Með aðstoð reglunnar að ofan fáum við þess vegna:

   $$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta) \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

   Af þessu fæst svo:

   $$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = (|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|)^2$$

   Nú eru báðar stærðirnar $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ *og* $(|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|)$ *jákvæðar svo að*

   $$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$$

2. *Með því að nota liðinn á undan fæst*

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{b}| = |(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}-\mathbf{b}|+|\mathbf{b}|$$

færum yfir jafnaðarmerkið og fáum

$$|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \qquad (*)$$

Á sama hátt fæst

$$|\mathbf{b}|-|\mathbf{a}| \leq |\mathbf{b}-\mathbf{a}|$$

En sú jafna jafngidlir

$$-(|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|) \leq |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \qquad (**)$$

Nú fæst af $(*)$ *og* $(**)$ *að*

$$||\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$$

Vigrar og hornaföll

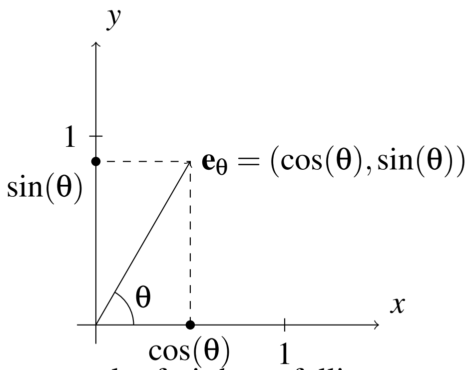
Látum θ vera eitthvað horn og skoðum vigurinn

$$\mathbf{e}_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

Þekkt hornafallaregla segir að $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1$ fyrir öll θ og þess vegna er auðvelt að finna lengd $\mathbf{e}_\theta$

$$|\mathbf{e}_\theta| = \sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

Skv. skilgreiningu á hornaföllunum sést líka að stefnuhorn vigursins $\mathbf{e}_\theta$ er θ (sjá mynd.)



Þesar upplýsingar munum við notfæra okkur til að sanna summureglur fyrir hornaföllin:

Fyrir öll $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gildir:*

1. $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$
3. $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$
4. $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$

Sönnum þetta:

1. *Skoðum vigranna*

$$\mathbf{e}_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \qquad og \qquad \mathbf{e}_\beta = (\cos(\beta), \sin(\beta))$$

Annar hefur stefnuhorn α *en hinn* β *svo hornið á milli þeirra er* $|\alpha-\beta|$.
Samkvæmt reglu að ofan fæst þess vegna

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = |\mathbf{e}_\alpha||\mathbf{e}_\beta|\cos(|\alpha-\beta|)$$

Nú vitum við að lengdir þeirra er einn og innfeldið reiknum við út frá hnitunum.
Við fáum:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(|\alpha-\beta|)$$

Nú er kósínus jafnstætt fall svo að af þessu fæst

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

2. *Stingum $-\beta$ inn fyrir β í regluna í liðnum á undan til þess að fá*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) + \sin(\alpha)\sin(-\beta)$$

Nú er kósínus jafnstætt fall og sínus er oddstætt fall svo að

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

3. *Í kaflanum um hornaföll voru settar fram reglurnar*

$$\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \qquad og \qquad \cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

Við munum nota þessa reglu í tvígang og við munum einnig nota liðinn á undan:

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)) = \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) + \beta)$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\cos(\beta) - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\sin(\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

4. *Stingum inn $-\beta$ í staðin fyrir β í regluna á undan*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)cos(-\beta) - \cos(\alpha)\sin(-\beta)$$

Nú er kósínus jafnstætt fall og sínus oddstætt fall svo að

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Nú er mjög auðvelt að sanna reglurnar um tvöföld og hálf horn:

Fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ gildir

1. $\cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - sin^2(x)$
2. $sin(2x) = 2\sin(x)cos(x)$
3. $\cos(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$
4. $\sin(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$

Sönnum þetta:

1. *Stingum inn $\alpha = x$ og $\beta = x$ í lið tvö í reglunni á undan og fáum*

$$\cos(2x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Nú notum við þekktu regluna $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
Af henni fæst annarsvegar:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = (1 - \sin^2(x)) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

og hinsvegar:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$$

2. *Stingum inn $\alpha = x$ og $\beta = x$ í lið fjögur í reglunni á undan og fáum*

$$\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

3. *Skiptum út x fyrir x/2 í reglunni*

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

og fáum

$$\cos(x) = 2\cos^2(x/2) - 1$$

einangrum $\cos(x/2)$ *og fáum*

$$\cos(x/2) = \pm\sqrt{\frac{\cos(x)+1}{2}}$$

4. *Skiptum út x fyrir x/2 í reglunni*

$$\sin(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

og fáum

$$\sin(x) = 1 - 2\sin^2(x/2)$$

einangrum $\sin(x/2)$ *og fáum*

$$\sin(x/2) = \pm\sqrt{\frac{\sin(x)-1}{2}}$$

Myndir og bakmyndir

Látum $f:\ X \to Y$ vera einhverja vörpun.
Rifjum upp að mengið X kallast formengi vörpunarinnar og að mengið Y kallast bakmengi hennar.

Látum nú A vera eitthvað hlutmengi í X, og B vera eitthvað hlutmengi í Y.
Þá getum við skilgreint mengin:

$$f(A) := \bigcup_{a\in A}\{f(a)\} = \{f(a);\ a \in A\}$$

og

$$f^{-1}(B) := \{x \in X;\ f(x) \in B\}$$

Mengið $f^{-1}(B)$ er í raun mengi allra þeirra staka sem vapast í mengið B.
Athugum að fyrir öll hlutmengi A oog B mun gilda:

$$f(A) \subset Y \qquad \text{og} \qquad f^{-1}(B) \subset X$$

Átækar og eintækar varpanir

Látum $f:\ X \to Y$ áfram vera einhverja vörpun.

Látum nú $y_0 \in Y$ vera eitthvað stak í bakmenginu. Oft er getur verið gagnlegt að vita hvort hægt sé að finna einhverja lausn á jöfnunni

$$f(x) = y_0$$

þ.e.a.s. hvort hægt sé að finna eitthvað $x_0 \in X$ þ.a. $f(x_0) = y_0$.
Ef að þessi jafna hefur lausn fyrir sérhvert $y_0 \in Y$ þá segjum við að vörpunin sé *átæk*.
Formlega:

Vörpun $f:\ X \to Y$ er sögð vera átæk ef fyrir sérhvert $y \in Y$ er til $x \in X$ þannig að $f(x) = y$.

Skoðum nú aftur jöfnuna

$$f(x) = y_0$$

Oft getur verið gagnlegt að vita hvort þessi jafna hafi margar lausnir. Stundum getur það nefnilega verið til vandræða ef til eru tvö ólík stök x_1 og x_2 í X þ.a. $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Við segjum að vörpunin sé *eintæk* ef að þessi jafna hefur í mesta legi eina lausn fyrir sérhvert $y_0 \in Y$.
Formlega:

Vörpun $f:\ X \to Y$ er sögð vera eintæk ef fyrir sérhvert $y \in Y$ er til í mesta lagi eitt $x \in X$ þannig að $f(x) = y$.

Skoðum nú jöfnuna einu sinni enn

$$f(x) = y_0$$

Ef að þessi jafna hefur nákvæmlega eina lausn fyrir sérhvert $y_0 \in Y$ þá segjum við að vörpunin sé gagntæk. Tökum eftir að það gerist bara ef vörpunin er bæði eintækt og átækt:

Vörpun $f:\ X \to Y$ er sögð vera gagntæk ef hún er bæði eintæk og átæk.

Skoðum þessi hugtök aðeins betur í mengjafræðilegum skilningi.

Látum $f:\ X \to Y$ vera vörpun.
Skilgreinum mengið $f^{-1}(\{y\})$ með:

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X;\ f(x) = y\}$$

Vörpunin f er sögð vera átæk ef að mengið $f^{-1}(\{y\})$ inniheldur a.m.k. eitt stak fyrir öll $y \in Y$.
Vörpunin f er sögð vera eintæk ef að mengið $f^{-1}(\{y\})$ inniheldur í mesta lagi eitt stak fyrir öll $y \in Y$.
Vörpunin f er sögð vera gagntæk ef að mengið $f^{-1}(\{y\})$ inniheldur nákvæmlega eitt stak fyrir öll $y \in Y$.

Nú er mælt með því að nemendur rifji upp skilgreininguna á andhverfu vörpunnar.
Andhverfa vörpunnar f var í vissum skilningi „fallið sem gerir akkúrat öfugt við það sem f gerir”.
Með mengjafræðilegu skilgreininguna á gagntæku falli er hægt að setja fram nýja skilgreiningu á andhverfu vörpunnar

Ef vörpun $f:\ X \to Y$ er gagntæk þá skilgreinum við andhverfu hennar $f^{-1}:\ Y \to X$ á eftirfarandi hátt:
Fyrir sérhvert $y \in Y$ látum við $f^{-1}(y)$ vera ótvírætt ákvarðaða stakið í menginu $f^{-1}(\{y\})$.

Dæmi:
Skerið úr um hvort eftirfarandi föll séu eintæk átæk eða gagntæk.
(a) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$
(b) $g:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$
(c) $h:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \qquad f(x) = x^2$
(d) $k:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \qquad f(x) = x^2$
Lausn:
(a)
Jafnan $x^2 = -1$ hefur enga lausn í rauntölunum. Þess vegna er f ekki átækt.
Jafnan $x^2 = 1$ hefur tvær lausnir $x = 1$ og $x = -1$ þess vegna er f ekki eintækt.
Sér í lagi er f ekki gagntækt.
(b)
Jafnan $x^2 = -1$ hefur enga lausn í rauntölunum. Þess vegna er g ekki átækt.
Jafnan $x^2 = a$ hefur enga lausn ef a er ekki jákvætt en í mesta lagi eina jákvæða lausn ef a er jákvætt. Fallið g er þess vegna eintækt.
Fallið g er ekki gagntækt.
(c)
Fyrir sérhvert jákvætt $a \in \mathbb{R}$ þá hefur jafnan $x^2 = a$ lausn, fallið h er þess vegna átækt.
Jafnan $x^2 = 1$ hefur tvær lausnir, nefnilega $x = 1$ og $x = -1$. Þess vegna er fallið h ekki eintækt.
Fallið h er ekki gagntækt.
(d)
Fyrir sérhvert jákvætt $a \in \mathbb{R}$ þá hefur jafnan $x^2 = a$ nákvæmlega eina jákvæða lausn. Fallið k er þess vegna gagntækt.
Sér í lagi er það átækt og eintækt.

Samskeyting varpanna

Í þessum kafla kynnum við til sögunnar nýja aðgerð á mengi varpanna. Nefnilega samskeytingu þeirra.
Skilgreiningin telst frekar auðveld

Látum $f:\ X \to Y$ og $g:\ Y \to Z$ vera varpanir.
Við skilgreinum þá vörpun $g \circ f:\ X \to Z$ með:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \qquad \textit{fyrir öll } x \in X$$

.

Tökum eftir að bakmengi f og formengi g þarf að vera það sama. Annars myndi þessi skilgreining ekki virka.
Skoðum til dæmis vörpunina k sem varpar íslenskum orðum í fyrsta bókstaf sinn og fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gefið með $f(x) = x^2$.
Hér myndi hvorki $f \circ g$ né $g \circ f$ vera skilgreint af augljósum ástæðum.
Við getum nú sett fram skilgreininguna á andhverfu falls enn einu sinni með aðstoð samskeytingu varpanna.

Látum $f:\ X \to Y$ vera vörpun. Vörpun $g:\ Y \to X$ kallast andhverfa vörpunarinnar f ef að:

$$g \circ f(x) = x \qquad \textit{fyrir öll} \qquad x \in X$$

og

$$f \circ g(y) = y \qquad \textit{fyrir öll} \qquad y \in Y$$

Andhverfa f er táknuð með f^{-1} ef hún er til.

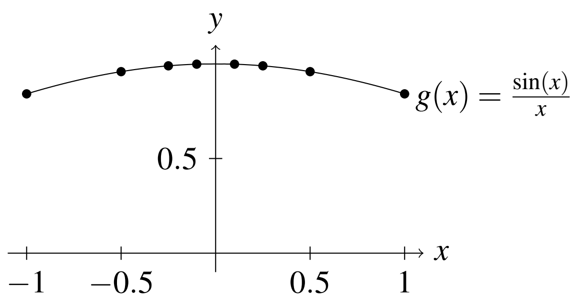
Dæmi:
Látum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera gefið með $f(x) = x^2 + x$
og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera gefið með $g(x) = x + 3$
Finnið $f \circ g$ og $g \circ f$
Lausn:
$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 + (x+3) = x^2 + 6x + 9 + x + 3 = x^2 + 7x + 12$
og
$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = (x^2 + x) + 3 = x^2 + x + 3$

Markgildi falls

Áður en að við skilgreinum markgildi falls formlega skulum við taka dæmi til að útskýra hver hugmyndin er.
Skilgreinum fall:

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Tökum eftir að við látum fallið g ekki vera skilgreint í punktinum $x = 0$ því að annars væri deilt með núlli.
Það getur hinsvegar verið áhugavert að skoða hvernig fallið hagar sér nálægt punktinum $x = 0$.
Teiknum mynd af fallinu g:



Við notum vasareikninn okkar til að reikna nokkur gildi á g og merkjum inná hnitakerfið punktana $(x, g(x))$.
Athugum að fallið er jafnstætt svo að $g(-x) = g(x)$ fyrir öll x.

$g(-1) = g(1) \approx 0,841470984$
$g(-0,5) = g(0,5) \approx 0,958851077$
$g(-0,25) = g(0,25) \approx 0,989615837$
$g(-0,1) = g(0,1) \approx 0,998334166$

Takið sérstaklega eftir því að fallið virðist ekki fara upp eða niður í óendanleikann þegar við nálgumst gildið $x = 0$.
Öllu heldur þá virðist fallið stefna á gildið 1!
Til staðfestingar skulum við reikna út eitt gildi á g í viðbót sem er mjög nálægt núlli:
$g(0,001) \approx 0,9999833$
Við höfum séð að ef x_0 er tala sem er mjög nálægt núlli þá verður fallgildið $g(x_0)$ mjög nálægt því að verða 1.
Munum að fallið g er ekki skilgreint í núlli, hins vegar höfum við sér orðalag fyrir svona tilvik.
Við segjum að *markgildi* fallsins g í núlli sé einn.
Einnig má segja að $g(x)$ stefni á einn þegar x stefnir á núll.
Á táknmáli er skrifað

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1$$

Þetta er hægt að gera almennt.
Látum nú $I \subset R$ vera eitthvað bil í $\mathbb{R}$ og $a \in I$.
Látum $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ vera eitthvað fall og $b \in \mathbb{R}$ vera tölu.
Við segjum að markgildi fallsins f í punktinum $x = a$ sé b ef að fyrir allar tölur x_0 sem eru nálægt tölunni a þá er talan $f(x_0)$ nálægt tölunni b.
Þá skrifum við
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Sumum þykir formlega skilgreiningin á markgildi heldur þung. Nemendur eru hvattir til að hugsa um hana í dálitla stund og reyna að átta sig á því hvað hún þýðir, meðal annars með því að bera hana saman við útskýringuna hér að framan:

G.r.f. að $I \subset R$ sé bil í $\mathbb{R}$ og að $a \in I$ sé punktur á bilinu sem er hvorugur endapunktur þess.
G.r.f. að $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ sé fall og að $b \in \mathbb{R}$ sé tala.
Við segjum að markgildi fallsins f í punktinum a sé b og ritum
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$
ef að eftirfarandi gildir:
Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $\delta > 0$ þannig að ef
$$|x - a| < \delta$$
þá er
$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Í þessari skilgreiningu má ímynda sér að ε og δ séu rosalega litlar tölur.
Ójafnan $|x - a| < \delta$ þýðir þá að x sé rosalega nálægt því að vera a og ójafnan $|f(x) - b| < \varepsilon$ þýðir að $f(x)$ er rosalega nálægt því að vera b.
Til að reyna skýra hugtakið betur munum við taka dæmi.

Dæmi:
(a)
Látum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera gefið með $f(x) = x$ og látum $\varepsilon = 0,01$.
Finnið δ þ.a. ef $|x - 1| < \delta$ þá er $|f(x) - 1| < 0,01$.
(b)
Látum $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera gefið með $g(x) = x^2$ og látum $\varepsilon = 0,01$.
Finnið δ þ.a. ef $|x - 2| < \delta$ þá er $|g(x) - 4| < 0,01$.
(c)
Látum $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vera gefið með $h(x) = \sqrt{x}$ og látum $\varepsilon = 0,01$.
Finnið δ þ.a. ef $|x - 2| < \delta$ þá er $|h(x) - 4| < 0,01$.
Lausn:
(a)
Við veljum $\delta = 0,01$.
Látum nú x vera einhverja tölu þ.a. $|x - 1| < 0,01$.
Þá fæst
$$|f(x) - 1| = |x - 1| < 0,01$$

svo slíkt δ dugar.
(b)
Látum $\delta = 0,001$.
Látum x vera einhverja tölu þ.a. $|x-2| < 0,001$.
Athugum að þá fæst með þríhyrningsójöfnu að
$|x+2| = |(x-2)+4| \leq |x-2| + |4| < 0,001+4 = 4,001$
Þess vegna fæst:

$$|g(x)-4| = |x^2-4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2| \cdot |x-2|$$
$$< 4,001 \cdot 0,001 = 0,004001 < 0,01$$

(c)
Látum $\delta = 0,01$
Látum x vera einhverja tölu þ.a. $|x-4| < 0,01$.
Þá fæst:

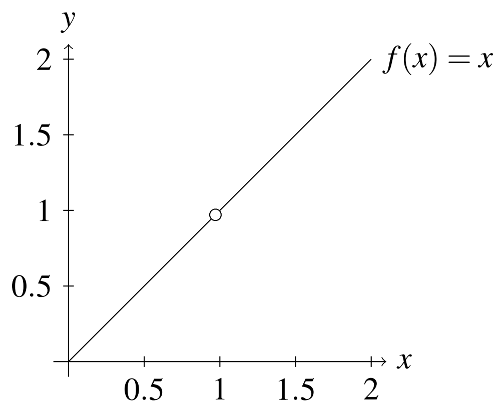
$$|h(x)-2| = |\sqrt{x}-2| = \frac{|\sqrt{x}-2||\sqrt{x}+2|}{|\sqrt{x}+2|} = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} \leq \frac{|x-4|}{2} \leq \frac{0,01}{2} \leq 0,01$$

Athugasemd:
Hér notaði höfundur enga sérstaka aðferð til að velja δ. Í raun dugar að velja það bara andskoti nógu lítið og sýna svo að það dugi.

Dæmi
Látum $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x$.
Sýnið að

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

Lausn:



Þetta verður nánast augljóst ef fallið er teiknað upp eins og á mynd til hliðar. Hér setjum við lítinn hring í punktinn $(1,1)$ því að við létum fallið ekki vera skilgreint þar. En ljóst er að ferillinn stefnir á punktinn $(1,1)$ frá báðum áttum.

Þó svo að það virðist augljóst að markgildið sé einn þá er mikilvægt að geta sýnt fram á það útfrá formlegri skilgreiningu.
Mikilvægt er að geta skilið einföldu dæmin áður en kafað er dýpra í fræðina og reynt er að gera eitthvað flóknara.

Látum $\varepsilon > 0$ vera einhverja gefna tölu.
Til þess að sýna að markgildið sé einn þurfum við að sýna að til sé $\delta > 0$ sem við getum fundið út frá tölunni ε þ.a. ef $|x-1| < \delta$ þá er $|f(x)-1| < \varepsilon$.
Í þetta skipti er það auðvelt. Við einfaldlega veljum $\delta = \varepsilon$.
Því þá fæst fyrir öll x þ.a. $|x-1| \leq \delta = \varepsilon$ að

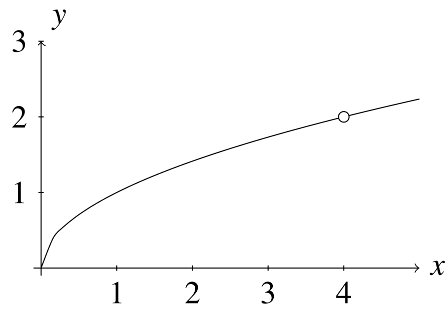
$$|f(x)-1| = |x-1| \leq \delta = \varepsilon$$

sem er það sem sýna átti.

Dæmi
Látum $f:\ \mathbb{R}\setminus\{4\}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=\sqrt{x}$.
Sýnið að

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 2$$

Lausn:



Aftur er nánast augljóst hvert markgildið er. Ef ferill fallsins f er teiknaðu upp sést greinilega að hann stefnit á punktinn $(4,2)$. Þ.e.a.s. það sést að markgildi fallsins er tveir.

Við skulum sýna þetta formlega.
Látum $\varepsilon > 0$ vera einhverja gefna tölu.
Sýna þarf að til sé $\delta > 0$ þannig að $|x-4| < \delta$ hafi í för með sér að $|\sqrt{x}-2| < \varepsilon$.
Látum $\delta = 2\cdot\varepsilon$.
Þá fæst ef að $|x-4| < \delta$ að

$$|f(x)-2| = |\sqrt{x}-2| = \frac{|\sqrt{x}-2||\sqrt{x}+2|}{|\sqrt{x}+2|} = \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} \leq \frac{|x-4|}{|2|} \leq \frac{\delta}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

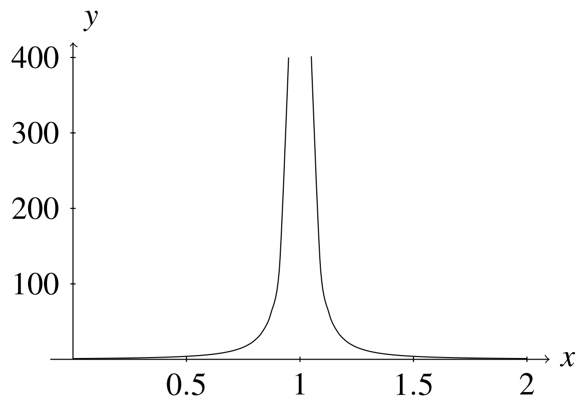
Sem er það sem sýna átti.

Fleiri gerðir af markgildum

Skoðum nú nýtt fall

$$r:\ \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R} \qquad r(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Teiknum mynd af fallinu til að sjá hvernig það hagar sér í grennd við punktinn $x=1$.



$f(0,5) = f(1,25) = 4$
$f(0,75) = f(1,25) = 16$
$f(0,9) = f(1,1) = 100$
$f(0,95) = f(1,05) = 400$

Við sjáum að fallið $r(x)$ stefnir hratt upp í óendanleikann þegar x stefnir á einn.
Þess vegna segjum við að markgildi fallsins r í einum sé óendanlegt og skrifum

$$\lim_{x\to 1} r(x) = \infty$$

Formlega skilgreiningin er:

G.r.f. að $I\subset R$ sé bil í $\mathbb{R}$ og að $a\in I$ sé punktur á bilinu sem er hvorugur endapunktur þess.
G.r.f. að $f:\ I\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ sé fall.
Við segjum að markgildi fallsins f í punktinum a sé óendanlegt og ritum

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

ef að eftirfarandi gildir:

$$\textit{Fyrir sérhvert } N > 0 \textit{ er til } \delta > 0 \textit{ þannig að ef}$$

$$|x - a| < \delta$$

$$\textit{þá er}$$

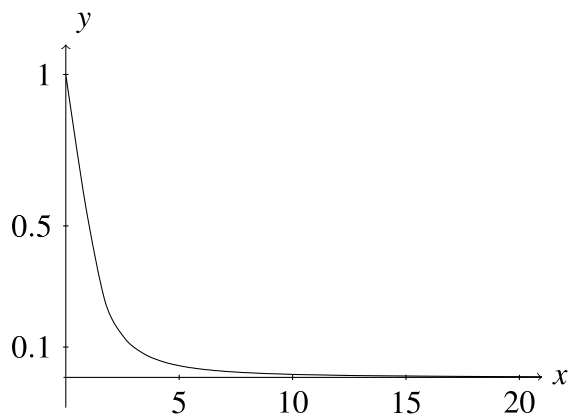
$$f(x) > N$$

Nú getum við líka hugsað okkur fall sem hefur markgildið mínus óendanlegt. Skilgreiningin er mjög svipuð og sú sem er hér á undan. Nemendur eru hvattir til að reyna láta sér detta í hug hvernig hún lítur út.

Skoðum nýtt fall

$$p:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad p(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Þetta fall er skilgreint á öllu $\mathbb{R}$.
Stundum getur verið gagnlegt að skoða hvað gerist þegar við fallið í óendanleikanum.
Við skulum skoða $p(x)$ fyrir stór gildi á x:



$p(5) \approx 0,038461538$
$p(10) \approx 0,009900990099$
$p(50) \approx 0,000399840064$
$p(100) \approx 0,000099990001$

Við sjáum að fallið p stefnir á núll þegar x stefnir á óendanleikann.
Þess vegna skrifum við

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$$

Formlega er þetta skilgreint:

G.r.f. að $I \subset R$ sé bil í $\mathbb{R}$ sem er ótakmarkað að ofan.
G.r.f. að $f:\ I \to \mathbb{R}$ sé fall og að $b \in \mathbb{R}$ sé tala.
Við segjum að markgildi fallsins f í óendanleikanum sé b og ritum

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

ef að eftirfarandi gildir:
Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $N > 0$ þannig að ef

$$x > N$$

þá er

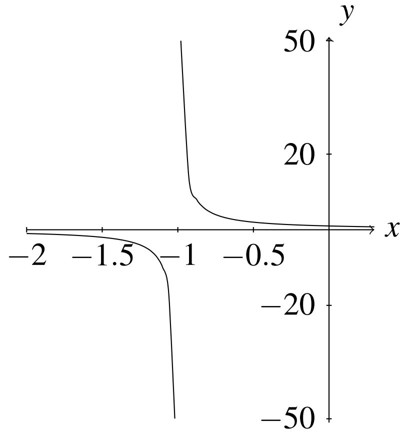
$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Skilgreiningin fyrir markgildi í mínus óendanlegu er mjög svipuð. Nemendur eru hvattir til að reyna að láta sér detta í hug hvernig hún lítur út.

Skoðum eitt fall að lokum.

$$q: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \qquad q(x) = \frac{1}{x+1}$$

Teiknum upp mynd til að sjá hvernig þetta fall lítur út nálægt punktinun $x = -1$.



$q(-0,5) = 2 \qquad q(-1,5) = -2$
$q(-0,9) = 10 \qquad q(-1,1) = -10$
$q(-0,99) = 100 \qquad q(-1,01) = -100$

Hér sjáum við að fallið q stefnir annað hvort á óendanlegt eða mínus óendanlegt, eftir þvi hvoru megin frá við nálgumst það.
Við segjum að markgildi fallsins q frá hægri í punktinum -1 sé óendanlegt en að markgildi fallsins q frá vinstri í punktinum -1 sé mínus óendanlegt og við skrifum:

$$\lim_{x \to -1^+} q(x) = \infty \qquad \lim_{x \to -1^-} q(x) = -\infty$$

Formlega skilgreiningin á því að markgildi frá hægri sé óendanlegt er svohljóðandi:

G.r.f. að $I \subset R$ sé bil í $\mathbb{R}$ og að $a \in I$ sé vinstri endapunktur þess.
G.r.f. að $f: I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ sé fall.
Við segjum að markgildi fallsins f frá hægri í punktinum a sé óendanlegt og ritum

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

ef að eftirfarandi gildir:
Fyrir sérhvert $N > 0$ er til $\delta > 0$ þannig að ef

$$0 < x - a < \delta$$

þá er

$$f(x) > N$$

Skilgreiningin á markgildi frá vinstri er mjög svipuð. Nemendur eru hvattir til að reyna láta sér detta í hug hvernig hún lítur út.

Nú skulum við taka saman í lokin helstu gerðir af markgildum:

1) $\lim_{x \to a} f(x)$ *markgildið af $f(x)$ þegar x stefnir á a*
2) $\lim_{x \to a+} f(x)$ *markgildið af $f(x)$ þegar x stefnir á a frá hægri*
3) $\lim_{x \to a-} f(x)$ *markgildið af $f(x)$ þegar x stefnir á a frá vinstri*
4) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *markgildið af $f(x)$ þegar x stefnir á plús óendanlegt*
5) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *markgildið af $f(x)$ þegar x stefnir á mínus óendanlegt*

Dæmi:
Finnið eftirfarandi markgild:
(Hér skulum við láta rökstuðning duga í staðin fyrir að nota formlegu skilgreiningarnar.)
(a)

$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sin(x))^2}{x}$
(b)
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(2^x-1)^2}$
(c)
$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos(x)}$
Lausn:
(a)
Auðvelt er að sjá að fallið $\frac{1}{x}$ stefnir á núll þegar x stefnir á óendanlegt.
Þekkt er að $|\sin(x)| < 1$ fyrir öll x og því fæst að $0 < (\sin(x))^2 < 1$ fyrir öll x.
Þegar x er stórt er því $\frac{1}{x}$ nálægt núlli og $(\sin(x))^2$ er á milli núll og einn.
En þá er auðvelt að sjá að

$$\frac{(\sin(x))^2}{x} = (\sin(x))^2 \frac{1}{x}$$

er nálægt núlli svo að markgildið er núll.
Við skrifum:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sin(x))^2}{x} = 0$$

(b)
Þegar x stefnir á einn þá stefnir $(2^x-1)^2$ á núll svo að $\frac{1}{(2^x-1)^2}$ stefnir annaðhvort á plús eða mínus óendanlegt. Þarsem $\frac{1}{(2^x-1)^2} = \left(\frac{1}{2^x-1}\right)^2$ er stæða í öðru veldi þá er hún alltaf jákvæð. Hún hlýtur því að stefna á plús óendanlegt, við skrifum

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(2^x-1)^2} = \infty$$

(c)
Þegar x stefnir á $\pi/2$ þá stefnir $\cos(x)$ á núll svo $\frac{1}{\cos(x)}$ stefnir á plús eða mínus óendanlegt. Þekkt er að $\cos(x)$ er jákvætt ef $0 < x < \pi/2$. Stæðan $\frac{1}{\cos(x)}$ er þess vegna jákvæð á sama bili og þess vegna stefnir hún á plús óendanlegt ef að nálgast er $\pi/2$ frá vinstri.
Við skrifum

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos(x)} = \infty$$

Reikniaðgerðir á markgildum

Þegar markgildi eru reiknuð gilda reiknireglur sem ættu ekki að koma á óvart.

Gerum ráð fyrir að f og g séu föll og að $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
Gerum ráð fyrir að bæði markgildin

$$\lim_{x\to c} f(x) \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to c} g(x)$$

séu skilgreind og að hvorugt þeirra sé jafnt plús eða mínus óendanlegu.
Gerum ráð fyrir að $k \in \mathbb{R}$ sé fasti.
Þá gildir:

1. $\lim_{x\to c} k = k$
2. $\lim_{x\to c}(kf(x)) = k(\lim_{x\to c} f(x))$
3. $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
4. $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$

5. $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = (\lim_{x\to c} f(x))\cdot(\lim_{x\to c} g(x))$

   Ef að $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$ *þá gildir líka*

6. $\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$

Tökum sérstaklega eftir því að í reglunni er tekið fram að markgildið megi ekki vera plús eða mínus óendanlegt. Það er af því að óendanlegt er ekki tala og það er ekki til nein skynsamleg leið til að túlka stærðir eins og $\infty - \infty$.
Við skulum sanna þessa reglu:
Við skulum bara sanna tilfellið þegar $c \in \mathbb{R}$, en ekki tilfellin $c = \infty$ eða $c = -\infty$. Það er gert á mjög svipaðan hátt.

$$\textit{Látum } \lim_{x\to c} f(x) = a \textit{ og } \lim_{x\to c} g(x) = b$$

1. *Látum* $\varepsilon > 0$ *vera gefið.*
   Sýna þarf að til sé $\delta > 0$ *þ.a. ef* $|x-c| < \delta$ *þá er* $|k-k| < \varepsilon$.
   En þetta eru algjörlega ótengdir hlutir. $|k-k| = 0 < \varepsilon$ *sama hvað* x *eða* δ *er.*
   Við megum því velja hvaða δ *sem við viljum og fullyrðingin er sjálfkrafa rétt.*

2. *Sýna þarf að* $\lim_{x\to c}(kf(x)) = ka$.
   Athugum að ef $k = 0$ *þá er* $kf(x) = 0$ *og eftir stendur* $\lim_{x\to c} 0 = 0$.
   Það var einmitt sýnt í lið eitt svo við getum gert ráð fyrir að $k \neq 0$.
   Látum $\varepsilon > 0$ *vera gefið.*
   Finna þarf $\delta > 0$ *þ.a. ef* $|x-c| < \delta$ *þá er* $|kf(x) - ka| < \varepsilon$.

   Þar sem $\lim_{x\to c} f(x) = a$ *þá vitum við að til er* δ_0 *þannig að ef* $|x-c| < \delta_0$ *þá er* $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{|k|}$.

   Setjum $\delta = \delta_0$ *og þá fæst:*
   Ef $|x-c| < \delta$ *þá:*

$$|kf(x) - ka| = |k||f(x) - a| \leq |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

   sem er einmitt það sem sýna þurfti.

3. *Sýna þarf að* $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = a + b$.
   Látum $\varepsilon > 0$ *vera gefið.*
   Finna þarf δ *þannig að ef* $|x-c| < \delta$ *þá er*
   $|(f(x) + g(x)) - (a+b)| < \varepsilon$

   Þar sem $\lim_{x\to c} f(x) = a$ *þá vitum við að til er* δ_1 *þannig að ef* $|x-c| < \delta_1$ *þá er* $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Þar sem $\lim_{x\to c} g(x) = b$ *þá vitum við að til er* δ_2 *þannig að ef* $|x-c| < \delta_2$ *þá er* $|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Látum nú δ *vera minni töluna af* δ_1 *og* δ_2, *með öðrum orðum setjum* $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
   Þá fæst að ef $|x-c| < \delta$ *þá er sér í lagi* $|x-c| < \delta_1$ *og* $|x-c| < \delta_2$ *og því fæst*

$$|(f(x)+g(x)) - (a+b)| = |(f(x)-a) + (g(x)-b)| \leq |f(x)-a| + |g(x)-b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   Við höfum sýnt að

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = a + b$$

4. *Hér þarf ekkert að gera nema nota liði tvö og þrjú nefnilega:*

$$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c}(f(x)+(-1)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c}((-1)g(x))$$

$$= \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = a - b$$

5. *Sýnum fyrst að*

$$\lim_{x\to c}((f(x)-a)(g(x)-b)) = 0$$

Látum $\varepsilon > 0$.
Frá fyrri liðum fæst að

$$\lim_{x\to c}(f(x)-a) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} = a - a = 0$$

svo að til er δ_1 *þannig að ef* $|x-c| < \delta_1$ *þá er* $|(f(x)-a)-0| < \sqrt{\varepsilon}$*, einfaldað stendur* $|f(x)-a| < \sqrt{\varepsilon}$.
Á sama hátt er hægt að finna δ_2 *þannig að ef* $|x-c| < \delta_2$ *þá er* $|g(x)-b| < \varepsilon$.
Setjum nú $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$*, þá fæst*

$$|(f(x)-a)(g(x)-b)-0| = |f(x)-a||g(x)-b| \leq \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

Við höfum sýnt að

$$\lim_{x\to c}((f(x)-a)(g(x)-b)) = 0$$

.

Nú fæst með því að nota allt sem á undan hefur komið:

$$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to c}((f(x)-a)(g(x)-b) + bf(x) + ag(x) - ab)$$

$$= \lim_{x\to c}(f(x)-a)(g(x)-b) + \lim_{x\to c} bf(x) + \lim_{x\to c} ag(x) - \lim_{x\to c} ab$$

$$= 0 + ba + ab - ab = ab$$

6. *Sýnum fyrst að*

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$$

Látum $\varepsilon > 0$.
Veljum fyrst δ_1 *þannig að* $|g(x)-b| < \frac{|b|}{2}$ *ef* $|x-c| < \delta$.
Þá fæst fyrir slíkt x að

$$|b| = |b - g(x) + g(x)| \leq |b - g(x)| + |g(x)| < \frac{|b|}{2} + |g(x)|$$

Færum yfir jafnaðarmerkið og fáum

$$\frac{|b|}{2} < |g(x)| \qquad \textit{sem jafngildir} \qquad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|b|}$$

Veljum næst δ_2 *þannig að* $|g(x)-b| < \frac{b^2}{2}\varepsilon$.

Setjum nú $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
Þá fæst:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b-g(x)|}{|g(x)b|} = |b - g(x)| \cdot \frac{1}{|g(x)|}\frac{1}{|b|}$$

$$< \frac{b^2}{2}\varepsilon\frac{2}{|b|}\frac{1}{|b|} = \varepsilon$$

Við höfum sýnt að

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$$

Afgangurinn er auðveldur, við notum liðina að framan:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}) = (\lim_{x\to c}f(x))(\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)}) = a\cdot\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

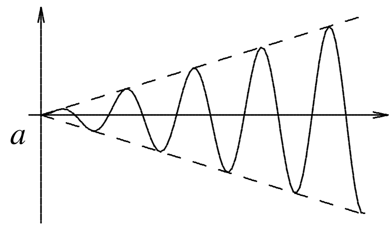
Dæmi:
Finnið markgildið $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+5x+1}$ ef það er til.
Lausn:
Við byrjum á því að deila með x^2 fyrir ofan og neðan strik. Við notum svo reiknireglurnar fyrir afganginn og þá staðreynd að $1/x^n$ stefnir á núll þegar x stefnir á ∞ fyrir allar náttúrulegar tölur n.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+5x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x^2}{2+5/x+1/x^2} = \frac{\lim_{x\to\infty}(1+1/x^2)}{\lim_{x\to\infty}(2+5/x+1/x^2)}.$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}1/x^2}{\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}5/x+\lim_{x\to\infty}1/x^2} = \frac{1+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}$$

Klemmureglan

Klemmureglan er mikilvægt tól sem hjálpar okkur að reikna markgildi:



Gerum ráð fyrir að f, g og h séu þrjú föll með sama skilgreiningarmengi I og að $f(x) \le g(x) \le h(x)$ fyrir öll $x \in I$
Gerum einnig ráð fyrir að $c \in I$ og að

$$\lim_{x\to c}f(x) = \lim_{x\to c}h(x) = L$$

Þá er

$$\lim_{x\to c}g(x) = L$$

Myndrænt er auðvelt að sjá fyrir sér þessa reglu. Á mynd til hliðar má ímynda sér að hallandi punktalínurnar séu föllin f og h. Þau hafa bæði markgildi a. Fallið g er svo fallið sem klemmist þarna á milli og getur ekkert farið nema í gegnum punktinn a. Við skulum sanna þetta formlega.

Látum $\varepsilon > 0$.
Þar sem $\lim_{x\to c}f(x) = \lim_{x\to c}h(x) = L$ *þá eru til* $\delta_1 > 0$ *og* $\delta_2 > 0$ *þannig að*
ef $|x-c| < \delta_1$ *þá er* $|f(x)-L| < \varepsilon$
og ef $|x-c| < \delta_2$ *þá er* $|h(x)-L| < \varepsilon$.
Setjum nú $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Gerum ráð fyrir að $|x-c| < \delta$.

Nú er gefið að $g(x) \leq h(x)$ *af því fæst*

$$g(x) - L \leq h(x) - L \leq |h(x) - L| < \varepsilon$$

Einnig er gefið að $g(x) \geq f(x)$ *en þá er* $-g(x) \leq -f(x)$ *og því fæst*

$$L - g(x) \leq L - f(x) \leq |L - f(x)| < \varepsilon$$

Við höfum því fengið

$$g(x) - L < \varepsilon \qquad og \qquad L - g(x) < \varepsilon$$

svo að

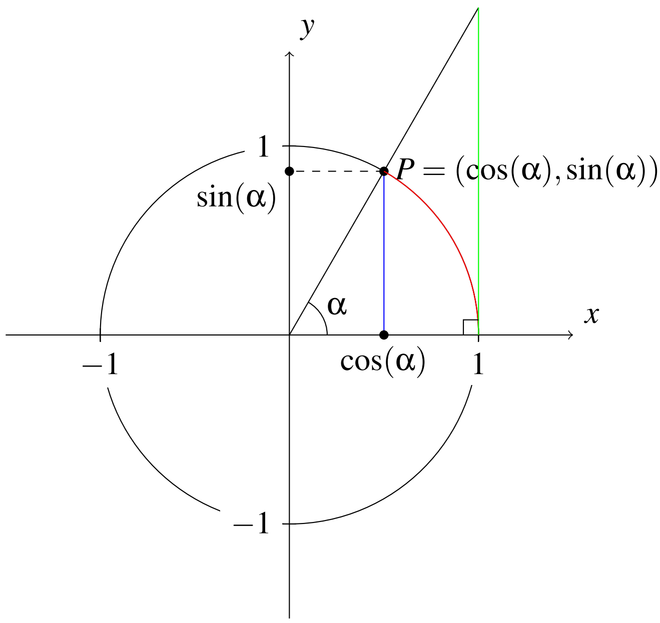
$$|g(x) - L| < \varepsilon$$

sem er það sem sýna þurfti.

Í upphafi kaflans um markgildi rökstuddum við að

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Þetta er mikilvæg niðurstaða sem verður notuð aftur í næstu köflum. Við skulum þess vegna sýna fram á þetta



Látum α *vera einhverja tölu á bilinu* $[0, \pi/2[$.
Teiknum einingahringinn
og skoðum stærðirnar α, $\sin(\alpha)$ *og* $\tan(\alpha)$ *á honum.*

- *Rúmfræðilega má túlka stærðina* α *sem lengdina á rauða boganum á mynd til hliðar, það fæst beint af skilgreiningu á bogaeiningum.*

- *Stærðina* $\sin(\alpha)$ *má túlka sem lengdina á bláa línustrikinu, það fæst beint af skilgreiningu af sínus.*

- *Stærðina* $\tan(\alpha)$ *má túlka sem lengdina á græna línustrikinu. Það sést af því að það er mótlæg hlið hornsins* α *í rétthyrndum þríhyrningi sem myndast og það hefur aðlæga hlið með lengd* 1.

Af myndinni sést að bláa strikið er styttra
en rauði boginn sem er styttri en græna strikið svo að:

$$\sin(\alpha) \leq \alpha \leq \tan(\alpha)$$

Með því að deila í gegnum ójöfnuna $\sin(\alpha) \leq \alpha$ *með* α *fæst:*

$$\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \leq 1 \qquad (*)$$

Með því að margfalda í gegnum ójöfnuna $\alpha \leq \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ *með stærðinni* $\frac{\cos(\alpha)}{\alpha}$ *fæst*

$$\cos(\alpha) \leq \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \qquad (**)$$

Af $(*)$ *og* $(**)$ *fæst:*

$$\cos(\alpha) \leq \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \leq 1$$

Nú sést að

$$\lim_{\alpha \to 0} 1 = 1 \qquad og \qquad \lim_{\alpha \to 0} \cos(\alpha) = \cos(0) = 1$$

en þá fæst af klemmureglu að

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$$

En það er það sem sýna átti.

Athugasemd:
Í útleiðslunni hér að ofan er gert ráð fyrir að $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$. Þetta þykir stærðfræðingum ekki vera augljós hlutur og krefjast sönnunnar. Þetta gildir í raun af því að kósínus er það sem er kallað samfellt fall. Farið verður sérstaklega í það í kaflanum um samfelld föll.

Dæmi:
Reiknið markgildið $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ ef það er til.
Lausn:
Við vitum að $|\sin(x)| \leq 1,$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ svo að

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

svo að skv. klemmureglu sjáum við að $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

Markgildi ræðra falla

Rifjum upp að fall R kallast rætt fall ef hægt er að tákna það með formúlu af gerðinni

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Þar sem

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad \text{og} \qquad q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

eru margliður.
Stig margliðunnar p er n og stig margliðunnar q er m.

Nú skulum við skoða nokkrar aðferðir til að reikna út markgildi ræða fallsins $R(x)$. Þ.e.a.s. aðferðir til að reikna út

$$\lim_{x\to c} R(x)$$

Hér þarf að skipta í tilvik eftir því hvað c er.

1. *Gerum fyrst ráð fyrir að $c \in \mathbb{R}$ sé einhver tala (ekki plús eða mínus óendanlegt) þannig að $q(c) \neq 0$.*
   Þá fæst
   $$\lim_{x\to c} R(x) = R(c)$$
   Þetta gildir af því að fallið R er samfellt í þeim punktum sem það er skilgreint. Fjallað verður um það betur í næsta kafla.

2. *Gerum ráð fyrir að $c = \infty$ eða $c = -\infty$. Þá þarf að skipta í tilvik*

   (a) *Ef stig margliðunnar p er hærra en stig margliðunnar q þá er*
   $$\lim_{x\to c} R(x) = \infty \qquad \text{eða} \qquad \lim_{x\to c} R(x) = -\infty$$
   Það fer í raun eftir stigum margliðanna p og q, og formerki forystustuðlanna a_n og b_m hvort útkoman verður plús eða mínus óendanlegt. Yfirleitt er auðvelt að sjá hvor útkman er rétt.

   (b) *Ef stig margliðunnar p er minna en stig margliðunnar q þá er*
   $$\lim_{x\to c} R(x) = 0$$

   (c) *Ef stig margliðunnar p er jafnt stigi margliðunnar q þá er*
   $$\lim_{x\to c} R(x) = \frac{a_n}{b_m}$$

3. *Gerum ráð fyrir að $c \in \mathbb{R}$ sé tala þannig að $q(c) = 0$. Þá þarf að skipta í tilvik*

   (a) *Ef $p(c) \neq 0$ þá getur eitt af þrennu gerst.*
   $$\text{Markgildið } \lim_{x\to c} R(x) \text{ er ekki skilgreint},$$
   $$\lim_{x\to c} R(x) = \infty \qquad \text{eða} \qquad \lim_{x\to c} R(x) = -\infty$$
   Yfirleitt er auðvelt að sjá hvort af þessu þrennu gildir.
   Ef að ferll fallsins fer bæði upp og niður í óendanlegt eftir því hvoru megin maður kemur að punktinum þá er markgildið ekki skilgreint.
   Annars er það annað hvort plús eða mínus óendanlegt.

   (b) *Tilfellið $p(c) = 0$ er erfiðast. Það þarf að nota séraðferð fyrir þetta tilvik sem verður útskýrð á næstu blaðsíðum.*

Áður en að við segjum frá aðferðinni fyrir tilfelli $3(c)$ skulum við rökstyðja jöfnurnar í hinum tilfellunum.

Í þessum rökstuðningi verður gert ráð fyrir að þekkt sé að
$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to\infty} x^{-n} = 0$$
Fyrir allar náttúrulegar tölur n. Þetta er staðreynd sem mjög auðvelt er að sannfæra sig um.

1. *Ef að c er rauntala og $q(c) \neq 0$ þá er fallið R skilgreint í punktinum c. Þessi niðurstaða fæst af samfelldni ræðra falla sem verður rædd í næsta kafla.*

2. *Hér var $c = \pm\infty$. Munum að stig margliðanna var n og m.*

   (a) *Hér var $n > m$.*
   Með því að deila í gegnum ræða fallið $R(x)$ með x^n fæst:

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_m x^{m-n} + b_{m-1}x^{m-1-n} + \ldots + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}}$$

   Nú er $n > m$ svo $m - n$ er neikvæð tala. Þess vegna er $\lim_{x\to\infty} b_m x^{m-n} = 0$ og eins er markgildi allra hinna liðanna í nefnaranum núll. Nefnari brotsins stefnir þess vegna á núll.
   Allir liðir í teljaranum stefna líka á núll, nema fyrsti liðurinn, a_n. Teljarninn stefnir þess vegna á töluna a_n.
   Nefnarinn stefnir á núll en teljarinn ekki svo markgildið hlýtur að vera plús eða mínus óendanlegt.

   (b) *Sambærileg rök og í (a)-lið nema nú mun teljari stefna á núll en nefnari á töluna b_m. Þess vegna fæst markgildið núll.*

   (c) *Nú er $n = m$.*
   Með því að deila í gegnum ræða fallið $R(x)$ með x^n fæst:

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_n + b_{m-1}x^{m-1-n} + \ldots + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} a_n + \lim_{x\to\infty} a_{n-1}x^{-1} + \ldots + \lim_{x\to\infty} a_1 x^{1-n} + \lim_{x\to\infty} a_0 x^{-n}}{\lim_{x\to\infty} b_n + \lim_{x\to\infty} b_{n-1}x^{-1} + \ldots + \lim_{x\to\infty} b_1 x^{1-n} + \lim_{x\to\infty} b_0 x^{-n}}$$

$$= \frac{a_n + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0}{b_n + 0 + 0\ldots + 0 + 0} = \frac{a_n}{b_n}$$

3. *Hér er verið að gera ráð fyrir að nefnari ræða brotsins stefni á núll en teljarinn ekki. Þá er ljóst að markgildið verður plús eða mínus óendanlegt.*

Nú skulum við fara í gegnum aðferðina fyrir tilfellið 3(c) sérstaklega
Finna skal markgildið

$$\lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)}$$

ef gefið er að $p(c) = q(c) = 0$.

1. *Fullþáttum margliðurnar $p(x)$ og $q(x)$, þ.e.a.s. skrifum*

$$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_k(x) \qquad og \qquad q(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_k(x)$$

   Þar sem p_i og q_j eru óþáttanlegar margliður fyrir öll i, j.

2. *Skrifum*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_k(x)}{q_1(x) \cdot q_2(x) \cdots q_k(x)}$$

   og styttum út alla liði sem hægt er, þegar það er búið stendur eftir nýtt rætt fall $L(x)$.

3. *Þar sem L er rætt fall þá eru til margliður f og g þannig að*

$$L(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ef fyrri skref hafa verið framkvæmt rétt getur ekki verið að bæði $f(c) = 0$ og $g(c) = 0$. Við getum þess vegna notað fyrri leiðbeiningar til þess að finna markgildið

$$\lim_{x \to c} L(x)$$

4. *Nú er hægt að fullyrða að*

$$\lim_{x \to c} R(x) = \lim_{x \to c} L(x)$$

Athugasemd:
Í aðferðinni hér að er varla hægt að segja að $L(x)$ sé „nýtt fall". Það er af því að í raun gildir $L(x) = R(x)$ fyrir öll x þar sem föllin eru skilgreind. Eini munurinn er sá að fallið R hefur fleiri óskilgreinda punkta, því að nefnari þess hefur fleiri núllstöðvar en fallið L.
Þar sem $L(x) = R(x)$ „næstum alls staðar" ætti að vera ljóst að markgildi fallanna eru þau sömu.

Dæmi:
Finnið markgildið

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 - 2x + 3}$$

Lausn:
Hér er $p(x) = x^2 + 1$ og $q(x) = x^4 - 2x + 3$.
Stig q er hærra en stig p svo að markgildið er núll.
Við skrifum:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 - 2x + 3} = 0$$

Dæmi:
Finnið markgildið

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 2x + 3}{x^2 + 1}$$

Lausn:
Nú er margliðan í teljaranum af hærra stigi.
Markgildið er þess vegna annaðhvort plús eða mínus óendanlegt.
Við tökum eftir að nefnarinn, $x^2 + 1$ er alltaf jákvæður, (annað veldi er alltaf jákvætt).
Þegar x stefnir á mínus óendanlegt þá verður teljarinn, $x^4 - 2x + 3$, jákvæður. Það er af því að fremsti liðurinn x^4 verður jákvæður og hann mun verða ráðandi í óendanleikanum.
Telljarinn og nefnarinn verða þá báðir jákvæðir þegar x stefnir á mínus óendanlegt svo markgildið verður plús óendanlegt. Við skrifum

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \infty$$

Dæmi:
Finnið markgildið

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x^2}{x^3 - x^2 + 1}$$

Lausn:
Hér er $q(x) = x^3 - x^2 + 1$.
Nú er $q(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 5 \neq 0$ svo að markgildið er

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2}{x^3-x^2+1}=\frac{2^3+2\cdot 2^2}{2^3-2^2+1}=\frac{16}{5}$$

Dæmi:
Finnið markgildið

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-4x^2-4x+16}{x^2-16}$$

Lausn:
Hér er $q(x)=x^2-16$ og $p(x)=x^3-4x^2-4x+16$
Við tökum eftir að $q(4)=0$ og $p(4)=0$. Við þurfum þess vegna að nota síðustu aðferðina sem lýst var í kaflanum.

1. Notum aðferðirnar sem fjallað var um í kaflanum um margliður til þess að fullþátta p og q.

$$p(x)=(x-2)(x+2)(x-4) \qquad \text{og} \qquad q(x)=(x-4)(x+4)$$

2. Styttum út liði:

$$\frac{x^3-4x^2-4x+16}{x^2-16}=\frac{(x-2)(x+2)(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+4)}$$

og setjum $L(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+4)}$

3. Skv. aðferðum að ofan er

$$\lim_{x\to 4}L(x)=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+4)}=\frac{(4-2)(4+2)}{4+4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

4. Við fullyrðum að

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-4x^2-4x+16}{x^2-16}=\frac{3}{2}$$

Athugasemd:
Hér er miklu púðri eytt í að fara í gegnum reikningana skref fyrir skref. Sá sem er vanur reikningi gæti einfaldlega skrifað

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-4x^2-4x+16}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x+2)(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+4)}=\frac{(4-2)(4+2)}{4+4}=\frac{3}{2}$$

Dæmi:
Reiknið markgildið

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$$

Lausn:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+3x^2+3x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)^3}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}=\infty$$

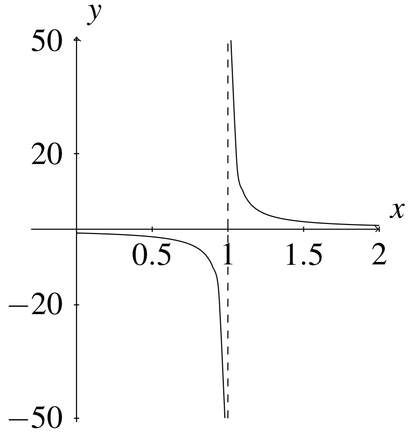
Aðfellur

Látum f vera eitthvað fall á rauntölunum.
Aðfella fallsins f er bein lína sem að í vissum skilningi liggur upp að ferli fallsins.

Áður en við setjum fram formlega skilgreiningu þá skulum við taka dæmi um þrjár mismunandi gerðir af aðfellum.

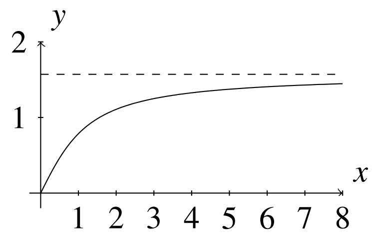
(1)
Skoðum fyrst fallið

$$f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=\frac{1}{x-1}$$



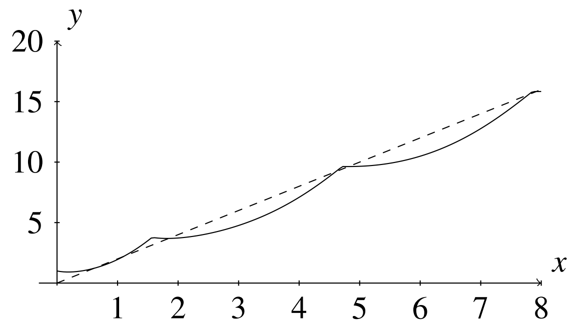
Á mynd til hliðar er búið að teikna upp fallið. Á myndinni er einnig punktalína sem er gefin með jöfnunni $x=1$.
Þessi punktalína liggur vel uppað ferlinum, það er af því að þessi lína er aðfella fallsins f.
Þessi lína er lóðrétt, þess vegna er hún stundum kölluð *lóðfellu* fallsins f í staðin fyrir aðfellu.
(2)
Skoðum næst fallið

$$g:\mathbb{R}\to[-\pi/2,\pi/2] \qquad g(x)=\text{Arctan}(x)$$



Þetta fall var kynnt til sögunnar í kaflanum um hornaföll og einingarhringinn. Til hliðar er búið að teikna upp fallið ásamt punktalínunni sem er gefin með jörnunni $y=\pi/2$.
Það sést að þessi lína liggur vel uppað ferlinum, það er af því að þessi lína er aðfalla fallsins g.
Þessi lína er lárétt, þess vegna er hún stundum frekar kölluð *láfella* fallsins g í staðin fyrir aðfella.
(3)
Skoðum að lokum fallið

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad h(x)=\frac{2x^2+1}{|x|+|\cos(x)|}$$



Til hliðar er búið að teikna upp falluð ásamt punktalínunni sem hefur jöfnu $y=2x$.
Hér liggur línan upp að fallinu af því að hún er aðfella þess.
Þessi lína liggur á ská og þess vegna er hún stundum kölluð *skáfella* fallsins frekar en aðfella þess.
Takið eftir að línan sker feril fallsins reglulega, það stoppar okkur ekki í því að kalla hana aðfellu. Það eina sem skiptir máli er að línan mun liggja nær og nær ferli fallsins ef farið er út í óendanleikann.

Nú skulum við setja fram formlega skilgreiningu á aðfellum.

Látum $X\subset\mathbb{R}$ vera hlutmengi í rauntölunum og $f: X\to\mathbb{R}$ vera fall.

- *Látum $a\in\mathbb{R}$.*
  Ef að annaðhvort markgildið

  $$\lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \textit{eða} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

  er skilgreint og jafnt plús eða mínus óendanlegu þá er línan sem er gefin með jöfnunni $x=a$ kölluð lóðfella fallsins f.

- *Ef að annað hvort markgildið*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \qquad \textit{eða} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

er skilgreint, og það er jafnt einhverjum fasta $k \in \mathbb{R}$ þá er línan sem er gefin með jöfnunni $y = k$ kölluð láfella fallsins f.

- *Línan sem er gefin með jöfnunni $y = hx + s$ með $h \neq 0$ kallast skáfella fallsins f ef að annaðhvort markgildið*

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (hx+s)) \qquad \textit{eða} \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (hx+s))$$

er skilgreint og jafnt núlli.

Ef að l er lína sem er lóðfella, láfella eða skáfella fallsins f þá segjum við að hún sé aðfella fallsins f.

Aðfellur ræðra falla

Nú skal fara skipulega í gegnum aðferð til þess að finna aðfellur ræðra falla.

Finna skal allar aðfellur ræða fallsins

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

.

1. *Finnið markgildið*

$$\lim_{x\to\infty} R(x)$$

   Ef það er til og jafnt einhverri rauntölu $k \in \mathbb{R}$ þá er línan sem er gefin með jöfnunni $y = k$ láfella fallsins.

2. *Finnið allar núllstöðvar margliðunnar q. Látum þær heita $c_1, c_2, \ldots, c_l$.*
   Línan sem er gefin með jöfnunni $x = c_i$ er lóðfella R fyrir öll i <u>nema</u> ef að markgildið

$$\lim_{x\to c_i} R(x)$$

   er skilgreint og jafnt einhverri rauntölu $k \in \mathbb{R}$.

3. *Ræða fallið R hefur skáfellu ef og aðeins ef að stig margliðunnar p er nákvæmlega einu stigi hærra en stig margliðunnar q.*
   Ef svo er þá er skáfellan gefin með jöfnunni $y = hx + s$ þar sem stuðlarnir h og s fást með jöfnunum

$$h = \frac{a_n}{b_m} \qquad \textit{og} \qquad s = \frac{a_{n-1} - hb_{m-1}}{b_m}$$

Við skulum sanna að þessi aðferð virki

1. *Það fæst beint af skilgreiningunni á láfellu að línan gefin með $y = k$ er láfella ef að*

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = k$$

. Það eina sem þarf að rökstyðja er af hverju markgildið

$$\lim_{x\to-\infty} R(x)$$

er ekki skoðað líka, en það er af því að ef annað hvort þessara markgilda er skilgreint og jafnt einhverri rauntölu k þá er hitt einnig skilgreint og líka jafnt sömu tölu k. Markgildin semsagt munu gefa sömu láfelluna. Þetta sést ef aðferðin til að finna markgildi R í óendanleikanum er skoðuð.

2. *Ljóst er að sérhver lóðfella ræða fallsins R er gefin með jöfnu $x = c_i$ þar sem c_i er einhver núllstöð margliðunnar q.*
Það eina sem þarf að athuga er að ef að markgildið

$$\lim_{x\to c_i} R(x)$$

er ekki skilgreint þá mun annað hvort gilda

$$\lim_{x\to c_i^+} R(x) = \infty \qquad \textit{eða} \qquad \lim_{x\to c_i^+} R(x) = -\infty$$

sem hefur í för með sér að línan $x = c_i$ er lóðfella skv. skilgreiningu.
Þetta tengist þeirri staðreynd að núllstöðvamengi margliða hefur aðeins endanlega mörg stök svo að þær geta ekki skipt um formerki nema endanlega oft. Sönnunin er of tæknileg til að fara í gegnum hér.

3. *Munum að n og m er látið standa fyrir stig p og q.*
Skoðum markgildið

$$\lim_{x\to\infty}(R(x)-(hx+s)) = \lim_{x\to\infty}(R(x)-(hx+s)) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{p(x)}{q(x)}-(hx+s)\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{p(x)-q(x)(hx+s)}{q(x)}\right)$$

Athugum að margfeldið $q(x)(hx+s)$ margliða af stigi $m+1$.
Skiptum nú í tilfelli eftir stigi p.

   (a) *Ef að maragliðan p er af stigi $m+2$ eða hærra mun margliðan $p(x)-q(x)(hx+s)$ einnig vera margliða af stigi $m+2$ eða hærra. Teljarinn í brotinu verður því af hærra stigi en nefnarinn og markgildið verður plús eða mínus óendanlegt.*

   (b) *Ef að margliðan p er af stigi m eða lægra mun margliðan $p(x)-q(x)(hx+s)$ vera af stigi $m+1$ eins og margliðan $q(x)(hx+s)$.*
   Teljarinn í brotinu verður því af hærra stigi en nefnarinn og markgildið verður plús eða mínus óendanlegt.

   (c) *Gerum nú ráð fyrir að margliðan p sé af stigi $m+1$.*
   Látum $t(x) = p(x)-q(x)(hx+s)$.
   Þá er $t(x)$ margliða sem er í mesta lagi af stigi $m+1$ svo hægt er að skrifa

$$t(x) = c_{m+1}x^{m+1} + c_m x^m + c_{m-1}x^{m-2} \ldots + c_1 x + c_0$$

Þar sem c_i er fasti einhver fasti fyrir öll i.
Skoðum aftur markgildið

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{p(x)-q(x)(hx+s)}{q(x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{t(x)}{q(x)}$$

Við viljum finna h og s þannig að þetta markgildi verði jafnt núlli.
Ef að $c_{m+1}\neq 0$ þá er t af hærra stigi en q og markgildið verður óendanlegt, þess vegna verður c_{m+1} að vera jafnt núlli.
Ef að $c_{m+1}=0$ þá verður

$$\lim_{x\to\infty}\frac{t(x)}{q(x)}=\frac{c_m}{b_m}$$

Við viljum að markgildið verði núll svo að stuðullinn c_m verður einnig að vera núll.
Markmiðið okkar er nú að velja h og s þannig að $c_{m+1}=c_m=0$.

Reiknum upp úr margfeldinu

$$t(x)=p(x)-q(x)(hx+s)$$

$$=(a_{m+1}x^{m+1}+a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0)-(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0)(hx+s)$$
$$=(a_{m+1}-b_mh)x^{m+1}+(a_m-b_ms-b_{m-1}h)x^m+\ldots+(a_1-b_0h-b_1s)x+(a_0-b_0s)$$

Þá sjáum við að $c_{m+1}=a_{m+1}-b_mh$ og $c_m=a_m-b_ms-b_{m-1}h$ Við viljum að $c_{m+1}=c_m=0$ svo að leysa þarf úr h og s úr jöfnunum

$$0=a_{m+1}-b_mh \qquad og \qquad 0=a_m-b_ms-b_{m-1}h$$

En þá fæst

$$h=\frac{a_{m+1}}{b_m} \qquad og \qquad s=\frac{a_m-b_{m-1}h}{b_m}$$

sem er það sem sýna átti.

Dæmi:
Finnið allar aðfellur ræða fallsins

$$R(x)=\frac{5x^2}{x^2+4x+5}$$

Lausn:
Hér er $q(x)=x^2+4x+1$ og $p(x)=5x^2$.

1. Auðvelt er að sjá að

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{x^2+4x+5}=\frac{5}{1}=5$$

   Línan sem er gefin með jöfnunni $y=5$ er þess vegna láfella.

2. Aðgreinir margliðunnar q talan $4^2-4\cdot1\cdot5=16-20=-4<0$, svo að hún hefur engar núllstöðvar. Ræða fallið hefur þess vegna engar lóðfellur.

3. Stig margliðunnar p er jafnt stigi margliðunnar q svo að ræða fallið hefur engar skáfellur.

Niðurstaðan er þess vegna sú að ræða fallið hefur aðeins eina láfellu sem er gefin með jöfnunni $y = 5$

Dæmi:
Finnið allar aðfellur ræða fallsins

$$R(x) = \frac{x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 5x - 6}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}$$

Gefið er að
$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 5x - 6 = (x-1)^2(x+2)(x-3)(x+1)$ og
$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^3(x+3)$.
Lausn:
Hér er $p(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 5x - 6 = (x-1)^2(x+2)(x-3)(x+1)$ og
$q(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^3(x+3)$.

1. Stig p er hærra en stig q. Þess vegna er markgildið

   $$\lim_{x\to\infty} R(x)$$

   Annað hvort plús eða mínus óendanlegt.
   Fallið hefur þess vegna engar láfellur.

2. Margliðan $q(x)$ hefur tvær núlsstövar, í punktunum $x = -3$ og $x = 1$.
   $p(-3) = -192 \neq 0$ svo að markgildið

   $$\lim_{x\to -3} R(x)$$

   Er jafnt plús eða mínus óendnanlegu eða það er ekki skilgreint. Við sjáum þá að línan sem er gefin með jöfnunni $x = -3$ er lóðfella.
   $p(1) = 0$ svo að við þurfum að finna markgildið í þeim punkti sérstaklega:

   $$\lim_{x\to 1} R(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 5x - 6}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)(x-3)(x+1)}{(x-1)^3(x+3)}$$

   $$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-3)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

   Nú er hægt að sjá að nefnarinn í síðasta brotinu stefnir á núll í $x = 1$ en teljarinn ekki, markgildið er því plús eða mínus óendanlegt, eða þá að það er ekki skilgreint, en það nægir til að rökstyðja að línan sem er gefin með jöfnunni $x = 1$ er lóðfella.

3. Nú er stig p nákvæmlega einu stigi hærra en q.
   Hér er $a_{m+1} = a_5 = 1$, $a_m = a_4 = -2$, $b_m = b_4 = 1$ og $b_{m-1} = b_3 = -6$.
   Við fáum

   $$h = \frac{a_{m+1}}{b_m} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{og} \qquad s = \frac{a_m - b_{m-1}h}{b_m} = \frac{1 + 6\cdot 1}{1} = 7$$

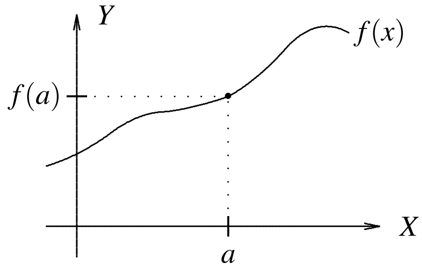
   Skáfellan er þessvegna gefin með jöfnunni

   $$y = x + 7$$

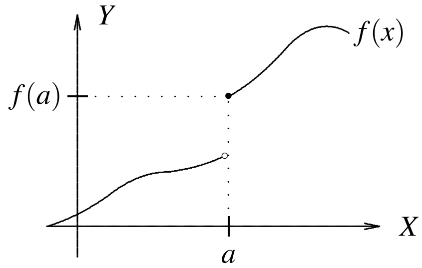
Niðurstaðan okkar er að fallið R hefur þrjár aðfellur:
$l_1 : x = -3$
$l_2 : x = 1$
$l_3 : y = x + 7$
.

Samfelld föll

Óformlega má segja að fall f sé *samfellt* ef að hægt er að teikna feril þess á blað með blýanti án þess að þurfa að lyfta blýantnum. Ef að fall er ekki samfellt segjum við að það sé *ósamfellt*.
Ef að fall f er ósamfellt þá segjum við að það sé ósamfellt í þeim punktum þar sem lyfta þarf blýantinum af blaðinu.



f er samfellt í punktinum a



f er ósamfellt í punktinum a

Formleg skilgreining:

- *Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil og látum $f:\ I \to \mathbb{R}$ vera fall.*
  Ef að $a \in I$ er punktur á bilinu sem er ekki endapunktur þess og

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

  þá segjum við að f sé samfellt í punktinum a.

- *Ef að $a \in I$ er punktur á bilinu sem er ekki hægri endapunktur þess og*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

  þá segjum við að f sé samfellt frá vinstri í punktinum a.

- *Ef að $a \in I$ er punktur á bilinu sem er ekki vinstri endapunktur þess og*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

  þá segjum við að f sé samfellt frá hægri í punktinum a.

- *Fallið f er sagt vera samfellt á I ef það er samfellt í öllum punktum á bilinu I sem eru ekki endapunktar þess, samfellt frá hægri í vinstri endapunkti þess ef hann er til og samfellt frá vinstri í hægri endapunkti þess ef hann er til.*

Reglur um samfelldni

Við þekkjum mörg samfelld föll. Áður en við kynnum nokkur þeirra til sögunnar skulum við setja fram nokkrar reglur

Gerum ráð fyrir að I sé bil og að f og g séu föll á I.
Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu samfelld á I og að $a \in I$
Þá eru föllin $a \cdot f$, $f+g$, $f-g$ og $f \cdot g$ líka samfelld á I.
Ef að g er ekki jafnt núlli í neinum punkti bilsins þá er fallið f/g líka samfellt á I.

Athugasemd:
Sér í lagi gildir að ef föllin f og g eru samfelld í einhverjum punkti a á bilinu þá eru föllin $f+g$, $f-g$ og $f \cdot g$ lika samfelld í punktinum a.
Ef $g(a) \neq 0$ þá er f/g líka samfellt í a.

Þessi regla fæst beint af reglunum sem segja að summa af markgildum sé jöfn markgildi af summu, mismunur af markgildum sé jafnt markgildi af mismuni o.s.fr.

Eina reiknireglu skal þó taka fram sérstaklega

Gerum ráð fyrir að $I, J \subset \mathbb{R}$ séu bil og að föllin $f: J \to \mathbb{R}$ og $g: I \to J$ séu samfelld.
Þá er fallið $f \circ g$ samfellt á I.

Sönnum það.

Við látum duga að sanna þessa setningu ef að $I = J = \mathbb{R}$. Ef slíkt gildir ekki þarf að taka fram mörg sértilvik eftir því hvort við lendum í endapunktum bilanna eða ekki. Öll þessi sértilvik eru gerð nokkurn vegin eins og sönnunin sem hér kemur.

Við þurfum að sanna að $f \circ g$ sé samfellt í sérhverjum punkti í $\mathbb{R}$.
Látum $a \in \mathbb{R}$ og $\varepsilon > 0$.
Sýna þarf að til sé $\delta > 0$ þannig að $|x-a| < \delta$ hafi í för með sér að $|f \circ g(x) - f \circ g(a)| < \varepsilon$

1. *Þar sem f er samfellt þá er það sér í lagi samfellt í punktinum $x = g(a)$. Þess vegna vitum við að til er δ_1 þannig að $|x - g(a)| < \delta_1$ hefur í för með sér að $|f(x) - f(g(a))| < \varepsilon$.*
2. *Þar sem g er samfellt þá er það sér í lagi samfellt í punktinum $x = a$. Þess vegna vitum við að til er δ_2 þannig að $|x-a| < \delta_2$ hefur í för með sér að $|g(x) - g(a)| < \delta_1$.*

Setjum nú $\delta = \delta_2$ og gerum ráð fyrir að $|x-a| < \delta$.
Af 2. fæst að $|g(x) - g(a)| < \delta_1$ en þá fæst beint af 1. (með því að skipta út x fyrir $g(x)$) að $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$ en það er það sem sýna átti.

Í upphafi kaflans var útskýrður einn af megineiginleikum samfelldra falla. Nefnilega sá eiginleiki að ef ferlill samfellds falls er teiknaður á blað með blýanti þá þarf ekki að lifta honum. Í raun er þetta setning sem hægt er að setja fram formlega.
Þessi setning er kölluð milligildissetningin.

Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil og $f: I \to \mathbb{R}$ vera samfellt fall.
Látum $x_1, x_2 \in I$ vera tvö stök á bilinu þannig að $x_1 < x_2$ og $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Þá gildir um sérhverja tölu y_0 sem er á milli talnanna $f(x_1)$ og $f(x_2)$ að til er $x_0 \in [x_1, x_2]$ þannig að $f(x_0) = y_0$

Til að sanna þessa reglu þarf að nýta sér eiginleika rauntalna um efra og neðra mark. Sagt er frá þessum eiginleika í kaflanum um talnakerfin og nemendur eru hvattir til þess að rifja hann upp.

Við sönnum bara tilfellið ef að $f(x_1) < f(x_2)$. Hitt tilfellið þegar $f(x_1) > f(x_2)$ er mjög svipað.
Þar sem y_0 er á milli $f(x_1)$ og $f(x_2)$ þá getum við skrifað $y_0 \in]f(x_1), f(x_2)[$.
Skilgreinum mengið $L = \{x \in \mathbb{R};\ x < x_2 \text{ og } f(x) < y_0\}$.
Köllum efra mark þessa mengis x_0. Með öðrum orðum setjum $x_0 = \sup L$.

- *Sýnum fyrst að $x_0 \in [x_1, x_2]$.*
  Þar sem $f(x_1) < y_0$ þá er $x_1 \in L$ og þess vegna er $x_1 \leq \sup L = x_0$.
  Miðað við skilgreininguna á menginu L þá er $x_0 = \sup L \leq x_2$.
  Við höfum því séð að $x_0 \in [x_1, x_2]$.

- *Sýnum næst að $f(x_0)$ er ekki minna en y_0, það verður gert með mótsögn.*
  Gerum ráð fyrir að $f(x_0) < y_0$.
  Setjum $\varepsilon = y_0 - f(x_0)$, þá er $\varepsilon > 0$.
  Samkvæmt skilgreiningu á samfelldu falli þá er til $\delta > 0$ þannig að ef $|x_0 - x| < \delta$ þá er $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.
  Sér í lagi gildir þetta fyrir $x = x_0 + \delta/2$.
  Við fáum þá

  $$f(x_0 + \delta/2) = f(x_0 + \delta/2) - f(x_0) + f(x_0) \leq |f(x_0 + \delta/2) - f(x_0)| + f(x_0)$$

  $$< \varepsilon + f(x_0) = (y_0 - f(x_0)) + f(x_0) = y_0$$

  Við sjáum þá að $x_0 + \delta/2$ er í menginu L en það er mótsögn við að x_0 sé efra mark L því að $x_0 < x_0 + \delta/2$.
  Af þessu sést að $f(x_0)$ er ekki minna en y_0.

- *Sýnum næst að $f(x_0)$ er ekki stærra en y_0, það verður gert með mótsögn.*
  Gerum ráð fyrir að $f(x_0) > y_0$.
  Setjum $\varepsilon = f(x_0) - y_0$, þá er $\varepsilon > 0$.
  Samkvæmt skilgreiningu á samfelldu falli þá er til $\delta > 0$ þannig að ef $|x - x_0| < \delta$ þá er $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, en það hefur í för með sér að $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.
  Fyrir sérhvert x þannig að $|x - x_0| < \delta$ gildir þess vegna

  $$f(x) > f(x) - \varepsilon = f(x_0) - (f(x_0) - y_0) = y_0$$

  Þá sést að $x_0 - \delta$ er stærra en sérhvert stak í L.
  Það er í mótsögn við að x_0 sé efra mark mengisins L, því að $x_0 > x_0 - \delta$.
  $f(x_0)$ er þvi ekki stærra en y_0.

Við höfum séð að $f(x_0)$ er hvorki stærra en eða minna en y_0 það hlýtur því að vera jafnt og y_0.

Næsta setning

Látum $I \in \mathbb{R}$ vera bil og $f:\ I \to \mathbb{R}$ vera fall.
Ef f er eintækt og samfellt þá er það stranglega einhalla.

Sönnun:

Gerum ráð fyrir að f sé eintækt og samfellt.
Gerum ráð fyrir að það sé ekki stranglega minnkandi, við viljum sýna að þá hljóti það að vera stranglega vaxandi.
Látum x_1, x_2 vera einhverjar tölur á I þannig að $x_1 < x_2$. Við viljum sýna að þá gildi $f(x_1) < f(x_2)$.
Þar sem að f er ekki stranglega minnkandi þá vitum við að til eru einhverjar aðrar tölur a_1, a_2 þannig að $f(a_1) \leq f(a_2)$.
Nú er f eintækt svo að $f(a_1) \neq f(a_2)$ en þá er $f(a_1) < f(a_2)$. Nú þarf að skipta í nokkur tilvik eftir því hvar x_1 og x_2 eru staðsett á talnalínunni miðað við a_1 og a_2.

- *Tilfellið $x_2 > x_1 \geq a_2 > a_1$:*
  Sýnum fyrst að $f(x_1) \geq f(a_2)$.
  Athugum að $f(x_1)$ getur ekki verið á milli talnanna $f(a_1)$ og $f(a_2)$ því að ef svo væri þá væri skv. milligildissetningu til tala á milli $a_0 \in [a_1, a_2]$ þannig að $f(a_0) = f(x_1)$ í mótsögn við eintækni fallsins f.
  Athugum að $f(x_1)$ getur heldur ekki verið minni en $f(a_1)$ því að ef svo væri þá væri $f(x_1) < f(a_1) < f(a_2)$ og því væri skv. milligildissetningu til $a_0 \in [a_2, x_1]$ þannig að $f(a_0) = f(a_1)$ sem er í mótsögn við eintækni f.
  Við sjáum þess vegna að $f(x_1) \geq f(a_2)$.
  Á sama hátt má nú sjá að $f(x_2) > f(x_1)$.

- *Hin tilfellin eru:*
  $x_2 \geq a_2 > x_1 \geq a_1$
  $x_2 \geq a_2 > a_1 > x_1$
  $a_2 > x_2 > x_1 \geq a_1$
  $a_2 > x_2 \geq a_1 > x_1$
  $a_2 > a_1 > x_2 > x_1$.
  Öll tilfellin eru gerð á svipaðan hátt og það fyrsta.

Með þessa reglu getum við loks sett fram mikilvæga reglu.

Látum $I, J \subset \mathbb{R}$ vera bil.
Gerum ráð fyrir að $f : I \to J$ sé samfellt og gagntækt.
Þá er andhverfa fallsins f einnig samfelld.

Sönnum þetta

Látum $f^{-1} : J \to I$ vera andhverfu fallsins f.
Sýna þarf að f^{-1} sé samfellt í sérhverjum punkti mengisins J.
Við latum duga að sanna að f^{-1} sé samfellt í öllum punktum y_0 í J sem eru ekki endapunktar J. Endapunktarnir eru gerðir á mjög svipaðan hátt.
Skv. reglunni á undan þá er f annaðhvort stranglega vaxandi eða stranglega minnkandi.
Við skulum gera ráð fyrir að það sé stranglega vaxandi en hitt tilfellið er gert á mjög svipaðan hátt.
Þar sem f er stranglega vaxandi þá er andhverfan f^{-1} einnig stranglega vaxandi.
Látum $y_0 \in J$ vera punkt sem er ekki endapunktur bilsins J.
Þar sem f er gagntækt þá er til stak $x_0 \in I$ þannig að $f(x_0) = y_0$. En þá er skv. skilgreiningunni á andhverfu $f^{-1}(y_0) = x_0$.
Látum $\varepsilon > 0$.
Við þurfum að sýna að til sé $\delta > 0$ þannig að $|y - y_0| < \delta$ hafi í för með sér að $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$.
Þar sem f er stranglega vaxandi þá vitum við að $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$.
Setjum $\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\}$.

Þá er $f(x_0-\varepsilon)\leq f(x_0)-\delta$ *og* $f(x_0)+\delta\leq f(x_0+\varepsilon)$.
Því fæst ef $f(x_0)-\delta<y<f(x_0)+\delta$ *að* $f(x_0-\varepsilon)<y<f(x_0+\varepsilon)$.
Nú er f^{-1} *stranglega vaxandi og munnum að* $f(x_0)=y_0$ *svo að þetta gefur að ef*
$y_0-\delta<y<y_0+\delta$ *þá er* $x_0-\varepsilon<f^{-1}(y)<x_0+\varepsilon$.
Munum einnig að $x_0=f^{-1}(y_0)$ *svo að ef*
$y_0-\delta<y<y_0+\delta$ *þá er* $f^{-1}(y_0)-\varepsilon<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0)+\varepsilon$.
En þetta jafngildir að
$|y-y_0|<\delta$ *hafi í för með sér að* $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$

Þekkt samfelld föll

Nú skulum við telja upp föll nokkur föll sem við þekkjum og eru samfelld.

1. *Fallið* $f(x)=x$ *er samfellt.*
2. *Sérhver margliða er samfelld.*
3. *Sérhvert rætt fall er samfellt á skilgreiningarmengi sínu.*
4. *Fyrir allar náttúrulegar tölur n þá er fallið* $f(x)=\sqrt[n]{x}$ *samfellt.*
5. *Ef að* $r\in\mathbb{Q}$ *er ræð tala þá er fallið* $f(x)=x^r$ *samfellt.*
6. *Ef að* $s\in\mathbb{R}$ *er rauntala þá er fallið* $f(x)=x^s$ *samfellt.*
7. *Vísisföll eru samfelld.*
8. *Lograr eru samfelldir.*
9. *Hornaföllin eru samfelld.*
10. *Andhverfur hornafallana eru samfelld.*
11. *fallið* $f(x)=|x|$ *er samfellt.*

Sönnum þetta eftir bestu getu

1. *Látum* $c\in\mathbb{R}$ *vera einhverja rauntölu.*
   Látum $\varepsilon>0$.
   Látum $\delta=\varepsilon$.
   Þá fæst ef að $|x-c|<\delta$ *að* $|f(x)-f(c)|<|x-c|<\delta=\varepsilon$.
2. *Skv. kaflanum á undan þá er summa og margfeldi samfelldra falla samfellt. Margliða er ekkert nema fallið x margfaldað við fasta og sjálft sig endanlega oft, því sést að sérhver margliða er samfelld.*
3. *Skv. kaflanum á undan þá er* f/g *samfellt ef að* f *og* g *eru samfelld og* $g(x)\neq 0$ *fyrir sérhvert x. Við getum því sagt að* f/g *sé samellt alls staðar sem að það er skilgreint. Rætt fall er ekkert nema kvóti margliða svo að við getum sagt að rætt fall sé samfellt þar sem það er skilgreint.*
4. *Fallið* x^n *er samfellt fyrir allar náttúrulegar tölur n skv. lið númer tvö. Skv. kaflanum á undan er andhverfa þessa falls þá einnig samfelld, það er að segja fallið* $\sqrt[n]{x}$ *er samfellt.*

5. *Þar sem r er ræð tala þá eru til heilar tölur p og q þannig að* $r = p/q$.
   Skv. liðum tvö og fjögur þá eru föllin $f(x) = x^p$ *og* $g(x) = \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$ *samfelld.*
   Skv. kaflanum á undan er þess vegna fallið $f \circ g(x) = x^{\frac{p}{q}} = x^r$ *samfellt*

6. *Í þessari bók er ekki búið að leggja nógu góðan grunn til þess að sýna þessa reglu.*

7. *heldur ekki þessa reglu.*

8. *Lograr eru andhver vísisfalla og eru því samfelldir skv. lið númer sjö og reglu í kaflanum á undan.*

9. **MUNA AÐ GERA SEINNA**

10. *Fæst af lið númer níu.*

11. *Látum* $\varepsilon > 0$.
    Látum $\delta = \varepsilon$, *þá fæst ef að* $|x - c| < \delta$ *að* $|f(x) - f(c)| = ||x| - |c|| < |x - c| < \delta = \varepsilon$.
    Hér var tilvik af þríhyrningsjöfnunni notað.

Nokkur dæmi

Dæmi:
Notið milligildissetningu til þess að sýna að margliðan

$$p(x) = x^7 + 3x + 1$$

hafi núllstöð á bilinu $]-1,0[$.
Lausn:
Við sjáum að $p(0) = 1 > 0$ og $p(-1) = -3 < 0$.
Nú eru margliður samfelld föll svo að hér er hægt að nota milligildissetningu sem segjir að þar sem $p(0) > 0$ og $p(-1) < 0$ þá er til tala $c \in]-1,0[$ sem er þannig að $p(c) = 0$.

Dæmi:
Palli er að rannsaka fallið

$$R(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Hann reiknar út að $R(\frac{1}{2}) = \frac{-2}{3} < 0$ og að $R(2) = \frac{2}{3} > 0$.
Palli beitir næst milligildissetningunni og kemst að þeirri niðurstöðu að fallið R hafi einhverja núllstöð á bilinu $]1/2, 2[$.
Í raun hefur Palli rangt fyrir sér. Hver er villan í rökstuðningi Palla.
Lausn:
Fallið $R(x)$ er ekki skilgreint í punktinum $x = 1$. Sér í lagi er það ekki samfellt í þessum punkti. Hér er því ekki hægt að nota milligildissetningu sem krefst þess að fallið sé samfellt.

Dæmi:
Útskýrið í stuttu máli með orðum hvort eftirfarandi föll eru samfelld eða ekki.
(a)

$$f(x) = |x| + \cos(x^3)$$

(b)

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{ef } x \leq 0 \\ 1 & \text{ef } x > 0 \end{cases}$$

(c)

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{ef } x \leq 0 \\ x^2 & \text{ef } x > 0 \end{cases}$$

Lausn:
(a)
Fallið f er samsett úr föllunum $|x|$, $\cos(x)$ og x^3 sem eru öll samfelld föll. Þess vegna er f samfellt.
(b)
Í punktinum $x = 0$ tekur fallið g stökk frá því að vera jafnt mínus einum í það að vera jafnt einum. Fallið er þess vegna ósamfellt í þeim punkti.
(c)
Föllin $\sin(x)$ og x^2 eru bæði samfelld. Fallið h er því samfellt í öllum punktum nema kannski núllpunktinum.
Nú er þekkt að $0^2 = 0$ og $\sin(0) = 0$.
Fallið h stefnir þá á töluna núll í $x = 0$ hvort sem að við nálgumst punktinn hægra eða vinstra megin frá. Fallið h er þvi samfellt í núllpunktinum, og við höfum þá rökstutt að það er samfellt allstaðar.

Dæmi:
Fyrir einhverja tölu $x \in]0,1[$ látum þá $x = 0,x_1x_2x_3x_4...$ tákna venjulega tugakerfisframsetningu hennar.
(Hér er krafist þess að tugaframsetning tölunnar endi ekki á óendanlega mörgum níum þ.e.a.s. að ekki sé til N þannig að $x_n = 9$ fyrir öll $n > N$)
Til dæmis ef $x = 1/7 = 0,142857...$ þá er $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 8$ og svo framvegis.
Við skulum nú skilgreina fall $C :]0,1[\to \mathbb{R}$ með

$$C(x) = \begin{cases} 1 & \text{ef tölustafurinn 3 kemur fram í tugakerfisframsetningunni á töllunni } x \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Til að skýra þetta fall betur skulum við taka dæmi um hvernig skal reikna úr því.
Skoðum til dæmis töluna $3/\pi = 0,9549296585513....$
Hér kemur tölustafurinn þrír fyrir í þrettánda aukastaf tölunnar svo að $C(3/\pi) = 1$.
Skoðum næst töluna $1/9 = 0,111111111....$
Hér kemur tölustafurinn þrír aldrei fram sem aukastafur heldur munu bara koma endalaust margir ásar. Þess vegna er $C(1/9) = 0$.
(a)
Sýnið að fallið C er samfellt í punktinum $x = 7/11$.
(b)
Sýnið að fallið C er ósamfellt í punktinum $x = 1/9$.
(c)
Sýnið að fallið C er ósamfellt í punktinum $x = 3/10$.
Lausn:
(a)
Athugum fyrst að $C(7/11) = C(0,63636363...) = 1$ því að þrír kemur til dæmis fyrir í öðrum aukastaf tölunnar.
Látum $\varepsilon > 0$. Við þurfum að sýna að til sé δ þannig að $|x - 7/11| < \delta$ hafi í för með sér að $|C(x) - 1| < \varepsilon$.
Setjum $\delta = 0,001$.

Tökum eftir því að $7/11-\delta = 0,63536363...$ og $7/11+\delta = 0,63736363....$
Við sjáum að ef $7/11-\delta =< x < 7/11+\delta$ þá mun annar aukastafur tölunnar x vera þrír svo að $C(x) = 1$.
Með öðrum orðum ef $|x-7/11| < 0,001$ þá fæst $|C(x)-1| = |1-1| = 0 < \varepsilon$.
Svo að C er samfellt í punktinum $7/11$.
(b)
Athugum fyrst að $C(1/9) = C(0,11111...) = 0$ því að þrír kemur hvergi fyrir sem aukastafur tölunnar.
Skoðum fallgildin í nokkrum vel völdnum tölum sem eru nálægt tölunni $1/9$.
$C(1/9+0,2) = C(0,311111...) = 1$
$C(1/9+0,02) = C(0,131111...) = 1$
$C(1/9+0,002) = C(0,113111...) = 1.$
$C(1/9+0,0002) = C(0,111311...) = 1$ o.s.fr.
Við tökum eftir að fyrir allar náttúrulegar tölur n mun $C(1/9+2\cdot 10^{-n}) = 1$.
Við sjáum þá að $|C(1/9+2\cdot 10^{-n})-C(1/9)| = 1$ fyrir allar náttúrulegar tölur n.
Þ.e.a.s. sama hversu nálægt tölunni $1/9$ við förum á þennan hátt þá verður munurinn á fallgildunum alltaf einn.
C er þess vegna ósamfellt í punktinum $x = 1/9$.

(c)
Athugum fyrst að $C(3/10) = C(0,3000...) = 1$.
Skoðum fallgildin í nokkrum vel völdum tölum sem eru nálægt tölunni $3/10$.
$C(3/10-0,01) = C(0,29000...) = 0$
$C(3/10-0,001) = C(0,2990000... = 0)$
$C(3/10-0,0001) = C(0,2999000...) = 0$
o.s.fr.
Við tölum eftir að fyrir allar náttúrulegar tölur n mun $C(3/10-10^{-n}) = 0$.
Við sjáum þá að $|C(3/10-\cdot 10^{-n})-C(3/10)| = 1$ fyrir allar náttúrulegar tölur n.
Þ.e.a.s. sama hversu nálægt tölunni $1/9$ við förum á þennan hátt þá verður munurinn á fallgildunum alltaf einn.
C er þess vegna ósamfellt í punktinum $x = 3/10$.

Skýringardæmi

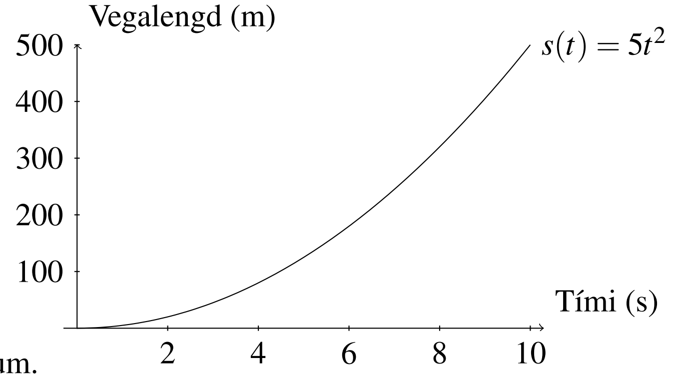
Áður en við skilgreinum *afleiðu* falls skulum við taka dæmi til þess að reyna að útskýra hver hugmyndin er.

Við skulum hugsa okkur bíl í spyrnukeppni á 500 metra braut.
Áður en bíllinn fer af stað er sett í hann nákvæmt staðsetningartæki sem getur teiknað upp graf sem lýsir staðsetningu hans á brautinni miðað við tímann sem er liðinn frá upphafi spyrnunnar.

Bíllinn fer af stað og keyrir brautina á nákvæmlega tíu sekúndum.
Eftir keppnina þá er staðsetningartækið skoðað og það sýnir að staðsetningu bílsins sem fall af tíma megi lýsa með formúlunni

$$s(t) = 5t^2$$

þar sem $t \in [0,10]$ táknar tímann sem var liðinn frá upphafi spyrnunnar mældur í sekúndum og $s(t)$ er vegalengdin sem bíllin var búinn að keyra mæld í metrum.



Þessi formúla segjir okkur til dæmis að eftir fjórar sekúndur var bíllinn búinn að keyra 80 metra því að $5 \cdot 4^2 = 80$ og eftir átta sekúndur var bíllinn búinn að keyra 320 metra því að $5 \cdot 8^2 = 320$.
Eins og við má búast er $s(0) = 0$ sem þýðir að eftir núll sekúndur stóð bíllinn ennþá óhreyfður og $s(10) = 500$ sem er í samræmi við það að bíllinn hafi keyrt brautina sem var 500 metrar á tíu sekúndum.

Úr formúlunni er þó hægt að fá meiri upplýsingar heldur en bara staðsetningu bílsins. Til dæmis dugar þessi formúla til þess að reikna út hraða bílsins í sérhverjum tímapunkti.
Við skulum nú fara í gegnum það hvernig það er gert.
Við skulum reikna út nákvæman hraða bílsins þegar fjórar sekúndur voru liðnar.

Athugum að *meðalhraði* bílsins yfir ákveðið tímabil er skilgreint sem vegalengdin sem bíllinn fer á því tímabili deilt með lengdinni á tímabilinu.
Þannig var t.d. meðalhraði bílsins okkar í allri spyrnunni 50 metrar á sekúndu því að hann fór 500 metra á 10 sekúndum og $500/10 = 50$.

Áður en við getum reiknað út nákvæman hraða bílsins á tímanum $t = 4$ þurfum við að reikna út meðalhraða bílsins á nokkrum vel völdum tímabilum.

- Skoðum fyrst meðalhraða bílsins á tímabilinu frá fjórum upp í átta sekúndur.
  Á sekúndu átta er bíllinn kominn $5 \cdot 8^2 = 310$ metra.
  Á sekúndu fjögur er bíllinn kominn $5 \cdot 4^2 = 80$ metra.
  Vegalengdin sem hann færist á tímabilinu frá fjórum upp í átta sekúndur er þá $310 - 80 = 230$ metrar.
  Lengdin á þessu tímabili er fjórar sekúndur.
  Meðalhraði bílsins á tímabilinu frá fjórum upp í átta sekúndur er þá
  $$\frac{230}{4} = 57,5 \ \text{m/s}$$
  .

- Skoðum næst meðalhraða bílsins frá fjórum upp í sex sekúndur. Vegalengdin sem hann færist á því tímabili er $5 \cdot 6^2 - 5 \cdot 4^2 = 100$ metrar.
  Lengdin á tímabilinu er $6 - 4 = 2$ sekúndur.
  Meðalhraði bílsins er þá
  $$\frac{100}{2} = 50 \ \text{m/s}$$
  .

- Skoðum meðalhraða bílsins frá fjórum upp í fimm sekúndur.
  Hann er
  $$\frac{5 \cdot 5^2 - 5 \cdot 4^2}{5 - 4} = \frac{45}{1} = 45 \ \text{m/s}$$
  .

- Meðalhraði bílsins frá fjórum sekúndum upp í fjórar og hálfa sekúndu er
  $$\frac{5 \cdot 4,5^2 - 5 \cdot 4^2}{4,5 - 4} = \frac{21,25}{0,5} = 42,5 \ \text{m/s}$$
  .

- Meðalhraði bílsins frá fjórum sekúndum upp í $4,25$ sekúndur er

$$\frac{5 \cdot 4,25^2 - 5 \cdot 4^2}{4,25 - 4} = \frac{10,3125}{0,25} = 41,25 \text{ m/s}$$

.

Núna geta glöggir nemendur kannski áttað sig á því hvað er að fara að gerast.
Með því að stytta tímabilið meira og meira þá verður meðalhraðinn nær og nær raunverulega hraðanum í tímanum $t = 4$.
Þetta er farið að líkjast því að taka markgildi.

Almennt gildir að meðalhraði bílsins frá fjórum sekúndum upp í t sekúndur er

$$\frac{5t^2 - 5 \cdot 4^2}{t - 4}$$

Þegar við styttum tímabilið meir og meir þá erum við í raun að láta tölunna t hér að ofan stefna á fjóra.
Þess vegna fáum við að nákvæmur hraði bílsins á tímanum $t = 4$ er

$$\lim_{t \to 4} \frac{5t^2 - 5 \cdot 4^2}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{5(t^2 - 4^2)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{5(t+4)(t-4)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{5(t+4)}{1} = \frac{5(4+4)}{1} = 40$$

Það er að segja, nákvæmur hraði bílsins þegar akkúrat fjórar sekúndur eru liðnar er 40 metrar á sekúndu.

Hér fór mikið púður í það að reikna út hraða bílsins á einum tímapunkti.
Segjum að við viljum reikna út hraða bílsins í hundrað mismunandi tímapunktum, þá yrði þreitandi að þurfa að reikna út hundrað mismunandi markgildi.
Skynsamlegra væri að reyna að finna út nákvæma formúlu sem gefur upp hraða bílsins á sérhverjum tíma. Það er hægt!

Til þess að reikna út hraða bílsins á tímanum $t = 4$ þá þurftum við að reikna út markgildið

$$\lim_{t \to 4} \frac{5t^2 - 5 \cdot 4^2}{t - 4}$$

Ef hinsvegar við viljum reikna út hraða bílsins á einhverjum öðrum tíma $t = t_0$ þá þarf ekkert að gera nema reikna út markgildið

$$\lim_{t \to t_0} \frac{5t^2 - 5 \cdot t_0^2}{t - t_0}$$

En þetta er eitthvað sem að við getum reiknað út almennt:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{5t^2 - 5 \cdot t_0^2}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{5(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} \lim_{t \to t_0} \frac{5(t+t_0)(t-t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{5(t+t_0)}{1} = \frac{5(t_0+t_0)}{1} = 10 \cdot t_0$$

Við höfum séð að á tímanum $t = t_0$ þá er hraði bílsins $10t_0$ m/s.
Með öðrum orðum þá má lýsa hraða bílsins af tíma með fallinu sem gefið er með formúlunni

$$v(t) = 10t$$

Af þessu má lesa að hraði bílsins á sekúndu fjögur er $4 \cdot 10 = 40$ m/s og hraði bílsins á sekúndu átta er $8 \cdot 10 = 80$ m/s.

Munum að bíllinn byrjar kyrrstæður svo það kemur ekki á óvart að $v(0) = 0$ sem má túlka sem svo að hraði bílsins á sekúndunni núll sé núll.

Aðferðin sem hér var notuð kallast *deildun (diffrun)*.
Þessi aðferð er ekki bundin við þetta einstaka fall, heldur má gera þetta almennt. Segjum að hraði bílsins hafi verið gefinn með einhverju örðu falli $k(t)$.
Hraði bílsins í tímapunktinum $t = t_0$ verður þá fundinn með því að reikna markgildið

$$\lim_{t \to t_0} \frac{k(t) - k(t_0)}{t - t_0}$$

Afleiður

Setjum fram formlega skilgreiningu á afleiðu

Gerum ráð fyrir að $f:\ I \to \mathbb{R}$ sé fall sem er skilgreint á bili I.
Látum $a \in I$.
Fallið f er sagt vera deildanlegt (diffranlegt) í punktinum a ef að markgildið

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

er skilgreint og jafnt einhverri rauntölu, (Ekki plús eða mínus óendanlegt.)
Þessi rauntala er táknuð með $f'(a)$ og kallast afleiða fallsins f í punktinum a.

Ef fallið f er deildanlegt í sérhverjum punkti bilsins I þá segjum við að f sé deildanlegt (diffranlegt) fall á I og þá er afleiðan f' fall á I.
Aðgerðin að finna afleiðu kallast deldun (diffrun).

Hallatölur og snertlar

Í skýringardæminu að ofan þá gáfum við okkur fall s sem lýsti staðsetningu bíls sem fall af tíma. Afleiða fallsins s var þá túlkuð sem hraði bílsins.
Í raun er hægt að túlka afleiðu falls töluvert almennar.

Segjum að fall $f:\ I \to \mathbb{R}$ sé gefið og að $a \in I$.
Ef að afleiða fallsins f í punktinum a er skilgreind þá er algengast að túlka tölunna $f'(a)$ sem *hallatölu* fallsins f í punktinum a.
Þ.e.a.s. talan $f'(a)$ lýsir því hversu mikið fallið hallar í punktinum a.
Til að skýra þessa túlkun betur er best að skilgreina *snertil* falls fyrst

Látum $f\ I \to \mathbb{R}$ vera fall skilgreint á bili I og látum $a \in I$.
Ef að afleiða fallsins f í punktinum a er skilgreint þá köllum við línuna sem er gefin með jöfnunni

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

snertil fallsins f í punktinum a.

Snertill falls f í punkti a er sú beina lína sem fer í gegnum punktinn $(a, f(a))$ og sem að í vissum skilningi liggur sem best uppað fallinu í þessum punkti.

Til að fá betri tilfinningu fyrir þessu skulum við teikna upp fallið

$$s(x) = 5 \cdot x^2$$

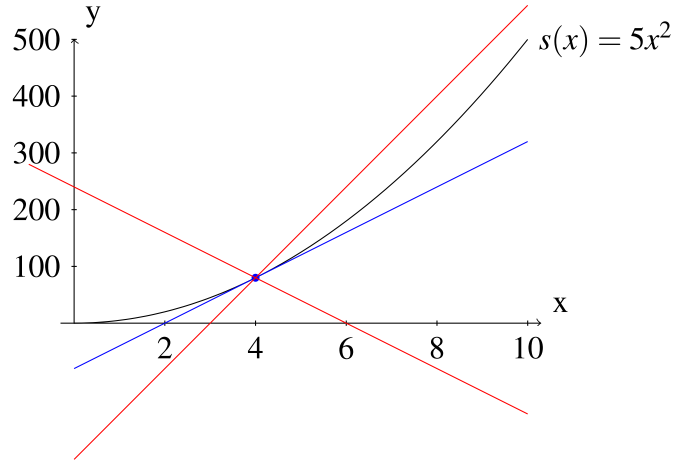
Ásamt snertli þess í punktinum $x = 4$.
Búið var að reikna að $s(4) = 80$ og $s'(4) = 40$.

Jafna snertilsins fæst þá með formúlunni

$$y = s(4) + s'(4)(x-4) = 80 + 40(x-4)$$

sem einfaldast í

$$y = 40x - 80$$



Til hliðar má sjá mynd af fallinu sjálfu ásamt snertli þess sem er litaður blár. Flestir ættu að geta verið sammála um að snertillinn liggur vel uppað fallinu.
Til samanburðar er búið að teikna tvær rauðar línur í gegnum sama punkt sem liggja ekki vel uppað fallinu. Fleiri myndu segja að þær liggji í gegnum fallið.

Reglur um deildun

Um deildun gilda nokkrar mikilvægar reglur.

Gerum ráð fyrir að f, g séu deildanleg föll á $\mathbb{R}$.
Látum $a \in \mathbb{R}$ vera fasta.
Þá gildir:

1. $(a \cdot f)' = af'$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(f-g)' = f' - g'$
4. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
5. $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

   Ef að $g(x)$ er ekki jafnt núlli fyrir öll $x \in I$, þá gildir einnig

6. $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$
7. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

   Ef að f er andhverfanlegt gildir einnig

8. *Ef $f(x_0) = y_0$ þá er*

$$(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}$$

Athugasemd:
Í reglunni er tekið fram að f og g ættu að vera deildanleg á öllu $\mathbb{R}$. Það er gert til að einfalda framsetninguna á reglunni. Í raun gilda þessar reglur fyrir öll deildanleg f og g þar sem að stæðurnar vinstra megin jafnaðarmerkisins eru vel skilgreindar.
Sönnum þetta

1. *Fyrir sérhvert x_0 þar sem f er diffranlegt gildir*

$$(af)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(af)(x) - (af)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{af(x) - af(x_0)}{x - x_0} = a \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = af'(x_0)$$

2. *Fyrir sérhvert x_0 þar sem f og g eru diffranleg gildir*

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \right) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

3. *Hér notum við liði eitt og tvö*

$$(f-g)' = (f+(-g))' = f'+(-g)' = f'+(-1)\cdot g' = f'-g'$$

4. *Fyrir sérhvert x_0 þar sem f og g eru diffranleg gildir*

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) \left(\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) + f(x_0)\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

5. *Fyrir sérhvert x_0 þannig að g sé diffranlegt í x_0 og f sé diffranlegt í $g(x_0)$ þá gildir.*

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(f(g(x)))-f(g(x_0))(g(x)-g(x_0))}{(x-x_0)(g(x)-g(x_0))}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

6. *Fyrir sérhvert x_0 þar sem g er diffranlegt gildir*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(1/g(x))-(1/g(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(g(x_0)-g(x))/(g(x)g(x_0))}{x-x_0}$$

$$= \left(\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)}\right)\cdot\left(-\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = \frac{1}{g^2(x_0)}\cdot(-g'(x_0)) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

7. *Hér verða liðir fimm og sex notaðir*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = (f\cdot\frac{1}{g})' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g'} - f\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

8. *Athugum fyrst að ef $h(x) = x$ þá fæst*

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Skv. skilgreiningu á andhverfu þá er

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Deildum nú sitthvoru megin jafnaðarmerkis, við notum lið fimm til að deilda vinstra megin. Við fáum

$$((f^{-1})' \circ f)(x) \cdot f'(x) = 1$$

eða

$$((f^{-1})' \circ f)(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

Talan e og fallið e^x

Áður en lengra er haldið í deildun er nauðsynlegt að kynna nýja tölu til sögunnar sem að er gríðarlega mikilvæg í deildunarreikningi. Hún kemur fram í eftirfarandi reglu.

Til er fall f skilgreint á öllu $\mathbb{R}$ þannig að $f(0) = 1$ og $f' = f$.
Þetta fall er vísisfall, svo að til er jákvæð rauntala, e þannig að $f(x) = e^x$

Sönnunin á þessari reglu er allt of tæknileg til þess að fara í hana hér.
Alveg eins og talan π þá er talan e óræð sem þýðir að ekki eru til heiltölur p og q þannig að $e = p/q$. Til að fá einhverja tilfinningu fyrir henni þá er best að skrifa upp nokkra fyrstu aukastafi hennar.

$$e = 2,718281828459045...$$

Munum að sérhvert vísisfall á sér andhverfu sem að er kölluð logri.
Fyrir eitthvað vísisfall a^x þá er andhverfa hennar táknuð með $\log_a(x)$, nema þegar $a = 10$, þá er yfirleitt skrifað bara $\log(x)$.
Talan e er þó talin svo sérstök í stærðfræðinni að andhverfa fallsins e^x er vanalega ekki táknuð með $\log_e(x)$ heldur fær hún sér tákn:

Fallið e^x á sér andhverfu sem að er táknuð með $\ln(x)$.
Þetta fall er kallað náttúrulegri logrinn.

Deildun þekktra falla

Nú skulum við deilda nokkur þekkt föll.

1. *Ef að a er fasti og $f(x) = a$ þá er $f'(x) = 0$.*
2. *Ef $n \in \mathbb{N}$ og $f(x) = x^n$ þá er $f'(x) = nx^{n-1}$.*
3. *Ef $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ og $f(x) = x^n$ þá er $f'(x) = nx^{n-1}$.*
4. *Ef $n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ og $f(x) = x^n$ þá er $f'(x) = nx^{n-1}$.*
5. *Ef $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ og $f(x) = x^n$ þá er $f'(x) = nx^{n-1}$.*
6. *Ef $a \in \mathbb{R}_+$ og $f(x) = a^x$ þá er $f'(x) = \ln(a)a^x$.*

7. *Ef* $a \in \mathbb{R}_+$ *og* $f(x) = \log_a(x)$ *þá er* $f'(x) = \frac{1}{\ln(a)x}$

8. *Ef* $f(x) = \sin(x)$ *þá er* $f'(x) = -\sin(x)$.

9. *Ef* $f(x) = \cos(x)$ *þá er* $f'(x) = \cos(x)$.

10. *Ef* $f(x) = \tan(x)$ *þá er* $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

11. *Ef* $f(x) = \cot(x)$ *þá er* $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$

12. *Ef* $f(x) = Arcsin(x)$ *þá er* $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. *Ef* $f(x) = Arccos(x)$ *þá er* $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. *Ef* $f(x) = Arctan(x)$ *þá er* $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

15. *Ef* $f(x) = Arccot(x)$ *þá er* $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

Sönnum þetta

1. *Ef* $f(x) = a$ *þá fæst fyrir sérhvert* $x_0 \in \mathbb{R}$ *að*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a - a}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

2. *Til að gera táknmálið skiljanlegra munum við endurskýra fallið og setja* $f_n(x) = x^n$ *fyrir öll n.*
Reglan segjir nú að $f_n'(x) = nx^{n-1}$ *fyrir öll* $n \in \mathbb{N}$.
Notum þrepun til þess að sýna þetta.
Sýnum fyrst að reglan er sönn þegar $n = 1$.

$$f_1'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 = 1 \cdot x^0$$

svo reglan er sönn fyrir $n = 1$.
Gerum næst ráð fyrir að reglan sé sönn fyrir eitthvað n og sýnum að hú sé sönn fyrir $n + 1$. *Þ.e.a.s. við gerum nú ráð fyrir að* $f_n'(x) = nx^{n-1}$.
Með því að nota regluna fyrir deildun margfeldi falla fáum við nú

$$f_{n+1}'(x) = (f_n \cdot f_1)'(x) = f_n'(x) f_1(x) + f_n(x) f_1'(x)$$

$$nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n$$

Við fáum því að reglan er sönn fyrir sérhvert $n \in \mathbb{N}$.

3. *Höldum áfram að nota táknmálið* $f_n(x) = x^n$.
Tökum eftir því að fyrir öll n þá er

$$f_n = \frac{1}{f_{-n}}$$

Í lið tvö höfum við nú þegar sýnt að niðurstaðan er rétt ef $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *er jákvæð. Við skulum því gera ráð fyrir að n sé neikvæð.*
Fyrst n er neikvæð þá er $-n$ *jákvæð.*

Þá fæst með því að nota liðinn á undan og regluna um deildun á deilingu falla að

$$f_n'(x) = \left(\frac{1}{f_{-n}}\right)'(x) = \frac{-f_{-n}'(x)}{(f_{-n}(x))^2} = \frac{-(-n)x^{-n-1}}{(x^{-n})^2}$$

$$= \frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{-n-1-(-2n)} = nx^{n-1}$$

4. *Þar sem $n \in \mathbb{Q}$ þá eru til heiltölur p og q þannig að $n = \frac{p}{q}$.*
   Við munum nú skrifa $f_{p/q}(x) = x^{p/q}$.
   Sýnum fyrst að reglan er sönn ef $p = 1$ þ.e.a.s. fyrir fall af gerðinni $f_{1/q} = x^{1/q}$.
   Við vitum að fallið $f_{1/q}$ er andhverfa fallsins $f_q(x)$. Nú notum við regluna um deildun á andhverfu til þess að fá

   $$(f_{1/q}' \circ f_q)(x) = \frac{1}{f_q'(x)}$$

   sama hlutinn er hægt að skrifa sem

   $$f_{1/q}'(f_q(x)) = \frac{1}{f_q'(x)}$$

   Nú er q heiltala svo skv. liðnum á unden er $f_q'(x) = qx^{q-1}$.
   Við stingum þessu inní og fáum

   $$f_{1/q}'(x^p) = \frac{1}{qx^{q-1}}$$

   Með því að skipta út x fyrir $x^{\frac{1}{q}}$ í þessari jöfnu fæst

   $$f_{1/q}'(x) = \frac{1}{qx^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$$

   Svo að setningin er sönn fyrir tölur af gerðinni $n = 1/q$.
   Fyrir almennt $n = \frac{p}{q}$ þá fæst

   $$f_{p/q}'(x) = (f_p \circ f_{1/q})'(x) = (f_p' \circ f_{1/q})(x) \cdot f_{1/q}'(x) = f_p'(f_{1/q}(x)) \cdot f_{1/q}'(x)$$

   $$= f_p'(x^{\frac{1}{q}}) \cdot \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = px^{\frac{p-1}{q}} \cdot \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

5. *Þessi regla verður ekki sönnuð hér.*

6. *Hér notum við regluna sem var sett fram ósönnuð að ofan, nefnilega þá reglu að ef $g(x) = e^x$ þá er $g' = g$.*
   Látum nú $h(x) = \ln(a)x$ og $f(x) = a^x$.
   Þá sést að $f(x) = g \circ h(x)$ svo að

   $$f'(x) = (g \circ h)'(x) = (g' \circ h)(x) \cdot h'(x) = g'(h(x))h'(x) = g(h(x)) \cdot h'(x)$$

   $$= (g \circ h)(x) \cdot h'(x) = f(x) \cdot h'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

7. *Sýnum þetta fyrst fyrir náttúrulegra lograrn* $\ln$, *athugum að* $\ln(e) = 1$ *skv. skilgreiningu.*
Setjum $f(x) = \ln(x)$ *þá er* $f^{-1}(x) = e^x$ *og því einnig* $(f^{-1})'(x) = e^x$.
Þá fæst skv reglu um deildun á andhverfu að

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

og þar sem $(f^{-1})'(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ *fæst*

$$x = \frac{1}{f'(x)}$$

eða

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Til að sýna þetta fyrir almennan logra $\log_a(x)$ *þurfum við að rifja upp lograreglu sem segjir að*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

en þá fæst

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)x}$$

8. *Hér verður notuð hornafallaregla sem segjir að*

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin((x-y)/2) \cdot \cos((x+y)/2)$$

Einnig verður nast við þekkta markgildið

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

en sýnt var fram á þetta í kaflanum um markgildi.
Nú fáum við

$$\sin'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin((x-x_0)/2)\cos((x+x_0)/2)}{x - x_0}$$

Setjum nú $h = \frac{x-x_0}{2}$.
Þá er $x = 2h + x_0$ *og* $\frac{x+x_0}{2} = \frac{2h+2x_0}{2} = h + x_0$.
Tökum einnig eftir því að h *stefnir á núll þá og því aðeins að* x *stefni á* x_0.
Við getum því breytt markgildinnu og skrifað

$$... = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h)\cos(h+x_0)}{2h}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \cos(x_0+h)\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}\right) = \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0)$$

9. *Hér notum við liðinn á undan og hornafallareglurnar*

$$\sin(x+\pi/2) = \cos(x) \qquad \cos(x+\pi/2) = -\sin(x)$$

og við fáum

$$(\cos(x))' = (\sin(x+\pi/2))' = \cos(x+\pi/2) = -\sin(x)$$

10. *Hér notum við skilgreininguna á tangens*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

honrafallaregluna

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

og reglu um deildun á deilingu falla til þess að fá:

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin'\cdot\cos - \sin\cdot\cos'}{\cos^2}(x) = \frac{\cos\cdot\cos - \sin\cdot(-\sin)}{\cos^2}(x)$$

$$= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}(x) = \frac{1}{\cos^2}(x)$$

11.

$$\cot'(x) = \left(\frac{\cos}{\sin}\right)'(x) = \frac{-\sin^2 - \cos^2}{\sin^2}(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

12. *Þar sem fallið Arcsin er andhverfa fallsins* sin *á bilinu* $[-\pi/2, \pi/2]$ *þá er:*

$$\mathit{Arcsin}'(\sin(x)) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \qquad (*)$$

Einangrum nú $\cos(x)$ *útúr jöfnunni*

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

og athugum að kósinusinn er alltaf jákvæður á bilinu $[-\pi/2, \pi/2]$ *og fáum þess vegna*

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

Stingum þessu inní jöfnuna $(*)$ *og fáum*

$$\mathit{Arcsin}'(\sin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}}$$

Með því að skipta $\sin(x)$ *út fyrir x fæst að lokum*

$$\mathit{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

13. *Mjög svipað og liðurinn á undan*

14. *Þar sem Arctan er andhverfa fallsins* $\tan(x)$ *á bilinu* $[-\pi/2, \pi/2]$ *þá er*

$$\mathit{Arctan}'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \cos^2(x) \qquad (*)$$

Athugum að

$$\frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = \cos^2(x)$$

Stingum þessu inní jöfnuna $(*)$ *og fáum*

$$\mathit{Arctan}'(\tan(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$$

skiptum út $\tan(x)$ *fyrir x og fáum*

$$\mathit{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

15. Mjög svipað og liðurinn á undan

Dæmi:
Finnið afleiður eftirfarandi falla:
(a)
$f(x) = \cos(\ln(x))$
(b)
$g(x) = 3^x \cdot \text{Arctan}(x^5)$
(c)
$h(x) = \cos^4(x^2+3)$
Lausn:
(a)
Hér notum við reglu um deildun á samsetningu falla

$$f'(x) = -\sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\sin(\ln(x))}{x}$$

(b)
Regla um deildun á margfeldi falla gefur

$$g'(x) = \ln(3)3^x\text{Arctan}(x^5) + 3^x \cdot \frac{1}{1+(x^5)^2} \cdot 5x^4$$
$$= \ln(3) \cdot 3^x\text{Arctan}(x^5) + \frac{5x^4 \cdot 3^x}{1+x^10}$$

(c)

$$h'(x) = 4 \cdot \cos^3(x^2+3) \cdot 2x = 8x\cos^3(x^2+3)$$

Keðjureglan

Keðjureglan var sönnuð í kaflanum um deildun. Við skulum setja hana aftur fram hérna

Látum $f : I \to \mathbb{R}$ og $g; J \to \mathbb{R}$ vera deildanleg föll á bilunum I og J sem eru þannig að $g(J) \subseteq I$. Þá er fallið $f \circ g$ deildanlegt og

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Hornaföll

Afleiður hornafallanna voru leiddar út í kaflanum um deildun

- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\sin'(x) = \cos(x)$
- $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$

Hágildi og lágildi

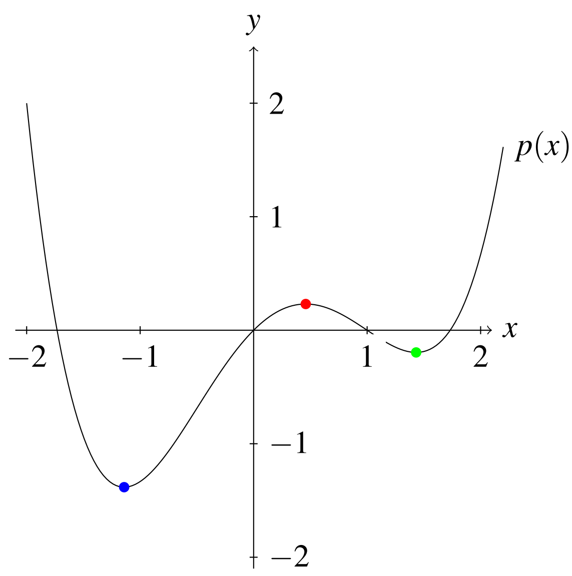
Hugsum okkur fall $f: I \to \mathbb{R}$ skilgreint á einhverju bili I.
Skilgreiningin á hágildi fallsins f er frekar nátturuleg, fallið f er einfaldlega sagt taka hágildi í punktinum þar sem það er stærst.
Skilgreiningin á staðbundnu hágildi er aðeins tæknilegri. Fallið f er sagt hafa staðbundið hágildi í einhverjum punkti c ef hægt er að finna minna bil $J \subset I$ í kringum c þannig að stærsta gildi f á bilinu J sé í punktinum c. Lággildi og staðbundið lággildi er skilgreint svipað.
Útgildispunktar eru þeir punktar kallaðir sem eru annað hvort hágildis- eða lággildispunktar.
Formlega:

Látum $f: I \to \mathbb{R}$ vera fall á einhverju bili I og $c \in I$.

- *Fallið f er sagt taka hágili í punktinum c ef að $f(c) \geq f(x)$ fyrir öll $x \in I$.*
- *Fallið f er sagt taka lággildi í punktinum c ef að $f(c) \leq f(x)$ fyrir öll $x \in I$.*
- *Fallið f er sagt hafa staðbundið hágildi í punktinum c ef til er bil $J \subset I$ þannig að $c \in J$ en c er ekki endapunktur bilsins J og um öll $x \in J$ gildir að $f(c) \geq f(x)$*
- *Fallið f er sagt hafa staðbundið lággildi í punktinum c ef til er bil $J \subset I$ þannig að $c \in J$ en c er ekki endapunktur bilsins J og um öll $x \in J$ gildir að $f(c) \leq f(x)$*
- *Ef c er annaðhvort hágildi eða lággildi fallsins f þá segjum við að c sé útgildi fallsins f.*
- *Ef að c er annaðhvort staðbundið hágildi eða staðbunbundið lággildi fallsins f þá segjum við að c sé staðbundið útgildi fallsins f.*

Til skýringar skulum við teikna mynd af margliðunni

$$p(x) = \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x$$



og merkja inn staðbundin hágildi og lággildi.
Myndin er teiknuð af margliðunni á bilinu $[-2, 2]$ af því að það er eini staðurinn þar sem eitthvað áhugavert gerist. Fallið stækkar upp í óendanleikann ef farið er lengra til vinstri eða hægri.
Margliðan hefur engan hágildispunkt því hún gerir ekkert nema að stækka og stækka í báðar áttir.
Hins vegar sést af mynd að hún tekur staðbundið hágildi á einum stað, sem merkt er á myndina með rauðum punkti. Lággildi margliðunnar er merkt inn á mynd með bláum punkti og annað staðbundið lággildi hennar er merkt með grænum punkti.

Tökum eftir að skv. skilgreiningu þá eru hágildispunktar sér í lagi staðbundnir hágildispunktar. Eftirfarandi regla hjálpar okkur að finna þá punkta þar sem fall f tekur staðbundin útgildi.

Gerum ráð fyrir að f sé deildanlegt fall skilgreint á bili I.
Ef að f tekur staðbundið útgildi í c þá er $f'(c) = 0$

Taka skal sérstaklega fram að andhverfa þessarar reglu er ekki algild. Þ.e.a.s. ef að $f'(c) = 0$ þá þarf ekki að vera að f taki staðbundið útgildi í punktinum c.
Til að rökstyðja það má skoða fallið $f(x) = x^3$ sem er stranglega vaxandi og vex frá mínus óendanlegu upp í óendanlegt og hefur því engin staðbundin útgildi. Engu að síður þá er $f'(0) = 0$.

Með hjálp þessarar reglu skulum við útskýra aðferð til þess að finna hágildi og lággildi falls.
Finna skal hágildi deldanlegs falls $f : I \to \mathbb{R}$ sem er skilgreint á bili sem inniheldur endapunkta sína.

1. *Deildið fallið f*
2. *Finnið alla punkta $c \in I$ þannig að $f'(c) = 0$.*
   Nefnum þá $c_1, c_2, ..., c_m$.
   Látum endapunkta bilsisn I heita a og b
3. *Reiknið út $f(c_i)$ fyrir öll i og reiknið einnig $f(a)$ og $f(b)$.*
4. *Nú er hágildi og lággildi fallsins f í þeim punktum þar sem útkoman var hæst og lægst.*

kldjl

Náttúrulegri logrinn og afleiða hans

Náttúrulegi logrinn $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ var skilgreindur íi kaflanum um deildun sem andhverfa vísisfallsins e^x þar sem $e \approx 2,7182818...$ er þekktur fasti. Afleiða hans er gefin með

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Afleiða andhverfu falls

Reglan um afleiðu andhverfu falls var leidd út í kaflanum um deildun. Hún verður sett fram hér aftur.

Látum $f : I \to J$ vera andhverfanlegt og deildanlegt fall frá bili I yfir á bil J. Þá er andhverfan f^{-1} deildanleg og uppfyllir formúluna

$$(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}$$

Veldisvísisfallið e^x

Í kaflanum um deildun var rætt um veldisvísisfallið e^x.
Samkvæmt skilgreiningu okkar þá er talan e sú tala þannig að veldisvísisfallið uppfylli deildajöfnunna

$$(e^x)' = e^x$$

Breiðbogaföllin

Hér munum við skilgreina ný föll, nefnilega breiðbogaföllin.

Breiðbogaföllin eru skilgreind með eftirfarandi formúlum

- $$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
- $$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
- $$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
- $$\coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Í raun er ekkert merkilegt að gerast í þessum skilgreiningum. Það kemur einfaldlega í ljós að föllin sem eru gefin með þessum formúlum hafa marga góða eiginleika og koma því oft upp í stærðfræði. Í staðin fyrir að þurfa að skrifa upp formúlu eins og $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ aftur og aftur ákváðu því stærðfræðingar að gefa þessum föllum sér nöfn.
Nöfnin svipa til hornafallanna því að þessi föll uppfylla margar svipaðar reglur og hornaföllin, en þó ekki alveg eins

1. $$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
2. $$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$
3. $$\cosh(-x) = \cosh(x)$$
4. $$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$
5. $$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$
6. $$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$
7. $$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$
8. $$\cosh'(x) = \sinh(x)$$
9. $$\sinh'(x) = \cosh(x)$$
10. $$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

11.
$$\coth'(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$$

Auðvelt er að reikna út þessar reglur beint út frá skilgreiningunum, það verður ekki gert hér.

Andhverfur hornafallanna og afleiður þeirra

Andhverfur hornafallanna voru skilgreindar í kaflanum um hornaföll. Hér kemur skilgreiningin aftur:

1. *Arcsin* : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
   er fallið sem uppfyllir
   $$\sin(\mathit{Arcsin}(x)) = x \qquad \text{fyrir öll } x \in [-1,1]$$
2. *Arccos* : $[-1,1] \to [0, \pi]$
   er fallið sem uppfyllir
   $$\cos(\mathit{Arccos}(x)) = x \qquad \text{fyrir öll } x \in [-1,1]$$
3. *Arctan* : $[-\infty,\infty] \to [-\pi/2, \pi/2]$
   er fallið sem uppfyllir
   $$\tan(\mathit{Arctan}(x)) = x \qquad \text{fyrir öll } x \in [-\infty,\infty]$$
4. *Arccot* : $[-\infty,\infty] \to [0, \pi]$
   er fallið sem uppfyllir
   $$\cot(\mathit{Arccot}(x)) = x \qquad \text{fyrir öll } x \in [-\infty,\infty]$$

Hægt er að deilda þessi föll og afleiður þeirra voru leiddar út í kaflanum um deildun.
Þær eru

- $$\mathit{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- $$\mathit{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- $$\mathit{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
- $$\mathit{Arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

Regla l'Hôpital

Regla l'Hôpital er mjög gagnleg við að reikna út ýmis markgildi.

Gerum ráð fyrir að f og g séu deildanleg föll á einhverju bili I og að $c \in I$ sé punktur þannig að $f(c) = g(c) = 0$.
Þá gildir að

$$\lim_{x \to c} \frac{f(c)}{g(c)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Með því skilyrði að a.m.k. annaðhvort þessara markgilda sé skilgreint.

Dæmi:
Reiknum markgildið

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Lausn:
Hér er $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x$ Við sjáum að $f(0) = g(0) = 0$ svo að við getum notað reglu l'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Athugasemd:
Í kaflanum um markgildi eyddum við mikilli orku í að reikna þetta markgildi með notkun klemmureglunnar. Ekki verður hjá því komist að gera það því að þetta markgildi er notað til þess að leiða út afleiðuna af sínusfallinu og án hennar væri ekki hægt að nota reglu l'Hôpital.

Stofnföll

Látum $f : I \to \mathbb{R}$ vera fall skilgreint á einhverju bili I.
Í síðustu köflum höfum mikið rætt um aðferðir til þess að finna afleiðu fallsins f ef það er hægt og hvaða upplýsingar um fallið afleiðan gefur.
Í þessum kafla munum við í vissum skilningi gera það akkúrat öfuga við að finna afleiðu.
Þ.e.a.s. við munum leita að falli F þannig að $F' = f$.

Látum $f : I \to \mathbb{R}$ vera fall skilgreint á bili I.
Ef að $F : I \to \mathbb{R}$ er deildanlegt fall þannig að $F' = f$ þá segjum við að F sé stofnfall fyrir f.
Stafnfall af falli f er oft nefnt óákveðið heildi og er táknað með

$$\int f(x)dx$$

Athugum að ef F er stofnfall fyrir $f$og $a \in \mathbb{R}$ er einhver rauntala, þá er fallið $F + a$ einnig stofnafall fyrir f því að

$$(F + a)' = F' + (a)' = f + 0 = f$$

Því getum við sagt að ef að fall hefur a.m.k. eitt stofnfall þá hefur það óendanlega mörg stofnföll.
Athugum einnig að ef að G og F eru tvö mismunandi stofnföll fyrir f þá fæst

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

Af þessu leiðir að fallið $F - G$ er fastafall, þ.e.a.s. til er $C \in \mathbb{R}$ þannig að $F - G = C$ sem gefur svo $F = G + C$.
Af þessu sjáum við að ef að F er eitthvað stofnfall fyrir fallið f þá eru nákvæmlega öll

stofnföll þess af gerðinni $F+C$ þar sem C er fasti.
Af þessum ástæðum þá er vaninn að skrifa

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

þar sem F er eitthvað stofnfall fyrir f.

Þekking okkar á afleiðum gerir okkur kleift að búa til langar töflur yfir stofnföll

$f(x)$	$\int f(t)dt$	$f(x)$	$\int f(t)dt$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+C$
e^x	e^x+C	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
xe^x	$(x-1)e^x+C$	$\ln x$	$x\ln x - x + C$
$x^n e^x$	$x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$	$x^n \ln x$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\ln\|\frac{1}{\cos x}\|+C$	$\cot x$	$\ln\|\sin x\|+C$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\|\frac{1}{\sin x}-\cot x\|+C$	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\|\frac{1}{\cos x}+\tan x\|+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C$	$\sqrt{x^2\pm a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{x}\ln\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\|+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\ln\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\|+C$	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$

Ákveðið heildi

Látum til að byrja með f vera fall á bili $[a,b]$ og gerum ráð fyrir að $f(x)\geq 0$ fyrir öll $x\in[a,b]$. Heildi fallsins f yfir bilið $[a,b]$ á að vera flatarmál svæðisins sem afmarkast af x-ásnum, grafi f, lóðréttu línunni $x=a$ og lóðréttu línunni $x=b$. Þetta mengi er

$$D=\{(x,y)\,;\,0\leq y\leq f(x), x\in[a,b]\}.$$

Það eru auðvelt að reikna út hvert flatarmálið er ef fallið f er af einfaldri gerð, til dæmis ef það er fasti, þrepafall, eða graf þess samanstendur endanlega mörgum línustrikum. Hugmyndin að skilgreiningu á flatarmáli almenns svæðis D af þessari gerð snýst um að nálga það innanfrá og utanfrá með marghyrningum, $A\subseteq D$ og $B\supseteq D$, og reikna út flatarmál A og B. Ef að fyrir sérhvert $\varepsilon>0$ eru til marghyrningar $A\subseteq D$ og $B\supseteq D$ þannig að mismunurinn á flatarmáli A og B sé minni en ε, þá segjum við að f sé heildanlegt á bilinu $[a,b]$. Þá er til ótvírætt ákvörðuð tala I, sem er þannig að flararmál A getur ekki verið stærra en I og flatarmál B getur ekki verið minna en I. Þá tölu köllum við heildi fallsin f yfir bilið $[a,b]$ og táknum það með

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

og við lítum á það sem flatarmál svæðisins D.
Formlega skilgreiningin á heildi er almennari en hér var lýst, því hún takmarkast ekki við jákvæð föll. Í henni er einungis litið á marghyrninga sem eru sammengi rétthyrninga með hliðar samsíða ásum hnitakerfisins.
Mengi $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ þar sem $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ kallast *skipting* á bilinu $[a,b]$. Tökum nú fall $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ og gerum ráð fyrir að fallið f sé *takmarkað*, en það þýðir að til séu fastar m og M, þannig að

$$m\leq f(x)\leq M, \qquad x\in[a,b].$$

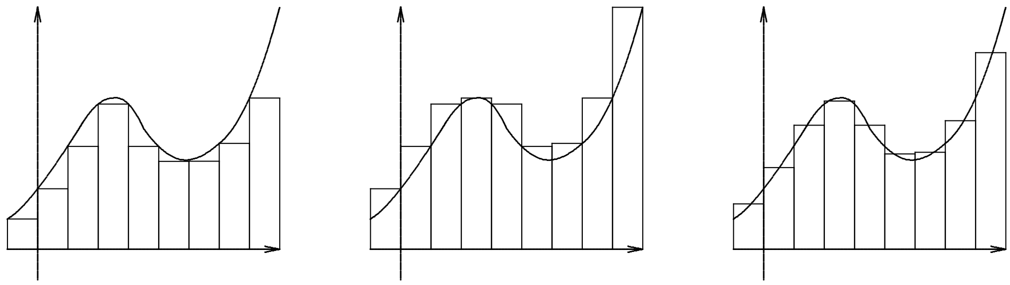
Summur af gerðinni

$$U=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) \qquad \text{og} \qquad Y=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

þar sem $m_i \leq f(x) \leq M_i$ fyrir öll $x \in [x_{i-1}, x_i]$, nefnast *undirsummur* og *yfirsummur fyrir fallið f* og summa af gerðinni

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

þar sem $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ er nefnd *millisumma* eða *Riemann-summa fyrir fallið f*. Við höfum augljóslega $U \leq S \leq Y$ fyrri allar undir-, milli- og yfirsummur U, S og Y.



Undirsumma. Yfirsumma. Millisumma.

Takmarkaða fallið $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er þá sagt vera heildanlegt ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er undirsumma U og yfirsumma Y fyrir f þannig að $Y - U < \varepsilon$.
Ef f er heildanlegt, þá má alltaf finna vaxandi runu af undirsummum $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ og minnkandi runu $(Y_j)_{j=1}^{\infty}$ af yfirsummum þannig að $Y_j - U_j \to 0$. Báðar rununar eru þá samleitnar með sama markgildi og það nefnum við *heildi fallsins f á bilinu* $[a,b]$ og við táknum það með

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Vert er að taka það fram að x er í þessu tilfelli *ekki* breyta, þ.e. $\int_a^b f(x)\,dx$ er ekki fall af x. Þegar reiknað hefur verið upp úr heildinu er x ekki lengur til staðar í stæðunni.
Í þessari skilgreiningu er gert ráð fyrir að $a \leq b$. Ef $a = b$, þá er heildið augljóslega 0. Ef $a > b$, þá skilgreinum við

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Sýnidæmi 10.1.1
Finnið yfirsummu og undursummu með skiptipunkta í heilu tölunum fyrir $f := x^2 + 4x$ á bilinu $[0,8]$.
Lausn: Við sjáum að fallið er stranglega vaxandi svo að með því að velja fallgildi í hægri enda hlutbils fáum við yfirsummu og með því að velja fallgildi í vinstri enda hlutbils fáum við undirsummu. Hvert bil er af lengd 1 svo við að yfirsumman er

$$Y=\sum_{k=1}^{8} f(k)=\sum_{k=1}^{8} k^2+4k=\sum_{k=1}^{8} k^2+4\sum_{k=1}^{8} k=204+4\cdot 36=348$$

og undirsumman U er

$$U=\sum_{k=1}^{8} f(k-1)=\sum_{k=0}^{7} k^2+4k=Y-f(8)=252.$$

Reiknireglur

(i) Ef f og g eru tvö heildanleg föll á $[a,b]$, þá er $f+g$ heildanlegt og
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

(ii) Ef k er rauntala og f er heildanlegt á $[a,b]$, þá er kf heildanlegt og
$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

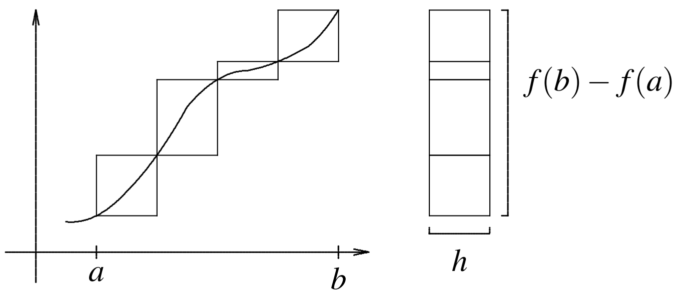
(iii) Ef $a<c<b$ og f er heildanlegt á $[a,b]$, þá er f heildanlegt á báðum bilunum $[a,c]$ og $[c,b]$ og
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(iv) Ef f er heildanlegt á $[a+c,b+c]$, þá er
$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx.$$

Sýnidæmi 10.2.1
Reiknið heildið
$$\int_0^1 x-k\,dx + \int_2^3 (x-1)+k\,dx.$$
Lausn: Við notum reiknireglur og fáum
$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x-k\,dx + \int_2^3 (x-1)+k\,dx\\
&= \int_0^1 x-k\,dx + \int_1^2 x+k\,dx\\
&= \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 k\,dx + \int_1^2 x\,dx + \int_1^2 k\,dx\\
&= \int_0^2 x\,dx - k + k = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Einhalla vaxandi föll

Látum $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ vera vaxandi fall. Þá er f takmarkað því $f(a)\le f(x)\le f(b)$ fyrir öll $x\in[a,b]$. Látum $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ vera *jafna* skiptingu á $[a,b]$, þ.e.a.s. $x_i=a+i(b-a)/n$. Þá er $x_i-x_{i-1}=(b-a)/n$. Við setjum síðan $m_i=f(x_{i-1})$ og $M_i=f(x_i)$. Fyrst f er vaxandu þá eru $U=\sum_{i=1}^n m_i(b-a)/n$ og $Y=\sum_{i=1}^n M_i(b-a)$ undir- og yfirsummur fyrir fallið f og við höfum
$$Y-U=\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)(b-a)/n = \sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_{i-1}))(b-a)/n = (f(b)-f(a))(b-a)/n.$$
Athugið að hér höfum við notfært okkur að
$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_{i-1}))\\
&\qquad = f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+f(x_3)-f(x_2)+\cdots+f(x_n)-f(x_{n-1})\\
&\qquad = f(x_n)-f(x_0) = f(b)-f(a).
\end{aligned}$$
Nú sjáum við að með því að velja skiptinguna nóga fína, þ.e.a.s. n nógu stórt þá sjáum við að mismunurinn $Y-U$ getur verið hversu smár sem vera skal. Þar með höfum við sýnt fram á að vaxandi fall er heildanlegt.



Útreikningana hér að ofan má líka hugsa sem svo að þar sem fallið er einhalla skarast rétthyrningarnir sem afmarkast af punktunum $(x_i, f(x_i))$ og $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ ekki svo við getum ímyndað okkur að við stöflum þeim hverjum ofan á annan og fáum þá út rétthyrning með flatarmál $h \cdot (f(b) - f(a))$. Flatarmál þessa rétthyrnings er jafnt $Y - U$. En með því að láta h stefna á 0 sést að flatarmálið, og þar með $Y - U$, getur verið eins lítið og við viljum og þar með er fallið heildanlegt.

Ef f er minnkandi, þá er $-f$ vaxandi og þar með er $-f$ heildanlegt. Reikniregla (ii) í síðustu grein með $k = -1$ segir okkur síðan að f sé heildanlegt. Niðurstaðan er því: *Sérhvert einhalla fall á $[a,b]$ er heildanlegt.*

Samfelld föll eru heildanleg

Gerum nú ráð fyrir að $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sé samfellt og veljum jafna skiptingu eins og í síðustu grein. Fyrst fallið f er samfellt, þá tekur það stærsta og minnsta gildi gildi í punktum c_i og d_i á sérhverju hlutbili $[x_{i-1}, x_i]$. Þetta þýðir að $f(c_i) = \min\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ og $f(d_i) = \max\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Við fáum nú að

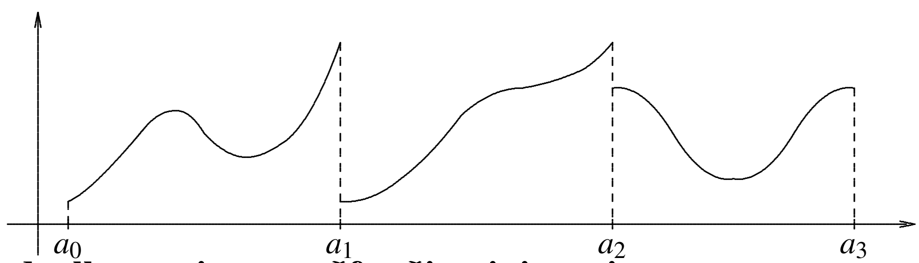
$$Y - U = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(b-a)/n = \sum_{i=1}^{n} (f(d_i) - f(c_i))(b-a)/n.$$

Ef gefin er tala $\varepsilon > 0$, þá er hægt að sýna fram á að velja megi skiptinguna það fína að $0 \le f(d_i) - f(c_i) < \varepsilon/(b-a)$ fyrir öll n. Fjöldi liðanna í summunni er n, svo við fáum matið $Y - U < \varepsilon$. Við höfum því sýnt að *sérhvert samfellt fall á $[a,b]$ er heildanlegt.*

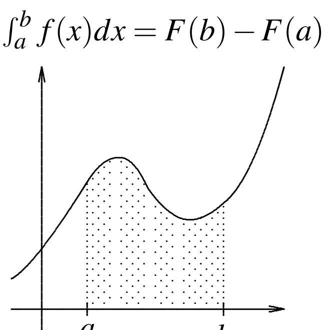
Með því að tengja tvær síðustu niðurstöður saman getum við nú fengið að *ef f er takmarkað fall á bilinu $[a,b]$ og til er skipting á $[a,b]$ þannig að f er annað hvort einhalla eða samfellt á sérhverju hlutbili skiptingarinnar, þá er f heildanlegt* og heildið er summa heildanna á hlutbilunum,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$$

þar sem a_i eru endapunktar hlutbilanna.



Grundvallarsetning stærðfræðigreiningarinnar



Heildun og deildun eru meginaðgerðir stærðfræðigreiningarinnar. Samband þeirra er gefið með setningum sem nefndar eru undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar:

(i) Ef fallið f er samfellt á $[a,b]$ og fallið F er skilgreint með

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b]$$

þá er F stofnfall f, þ.e.a.s. $F'(x) = f(x)$ fyrir öll $x \in [a,b]$.

(ii) Ef f er samfellt fall á $[a,b]$ og F er stofnfall þess, þá er

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Sýnidæmi 10.6.1
Finnið afleiðu fallsins $F(x) := \int_0^x \sin^3(t^2)\,dt$.
Lausn: Samkvæmt undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar er afleiðan $F'(x) = \sin^3(x^2)$.

Hlutheildun

Lítum á tvö deildanleg föll f og g með samfelldar afleiður. Reglan um deildun á margfeldi falla segjir að

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Ef óákveðið heildi er tekið af stærðunum sitt hvoru megin við jafnaðarmerkið fæst svo skv. undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx$$

Með því að færa yfir jafnaðarmerkið fáum við reglu sem að er oftast kölluð reglan um hlutheildun

Látum f og g vera deildanleg föll með samfelldar afleiður, þá er

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Dæmi:
Reiknið óákveðna heildið

$$\int x\cos(x)dx$$

Lausn:
Hér er hentugast að setja $f(x) = x$ og $g(x) = \sin(x)$. Þá er $f'(x) = 1$ og $g'(x) = \cos(x)$. Þá fæst með reglunni um hlutheildun að

$$\int x\cos(x)dx = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$
$$= x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

Innsetningaraðferð

Látum g vera samfellt deildanlegt fall á einhverju bili $[a,b]$ og f vera samfellt fall á bili I sem inniheldur myndmengið $g([a,b])$. Ef að F er stofnfall fyrir samfellda fallið f þá gefur keðjureglan okkur að

$$(F\circ g)'(x)=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$$

og þar með er $F\circ g$ stofnfall fyrir $f(g(x))g'(x)$. Önnur undirstöðusetningin gefur okkur þá

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=F(g(b))-F(g(a))=\int_{g(b)}^{g(a)} f(t)dt$$

Þessi aðferð er oft hugsuð þannig að við lítum á $u=g(x)$ sem nýja breytu í heildinu lengst til vinstri og setjum hana í heildið í staðin fyrir $g(x)$ og þá verðum við að setja inn du í staðin fyrir $g'(x)dx$

Með óákveðnum heildum verður reglan

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C=F(g(x))+C$$

Dæmi:
Reiknið ákveðna heildið

$$\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx$$

Lausn:
Hér munum við setja $u=\ln(x)$, þá verður $du=\frac{1}{x}dx$ og því fæst

$$\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx=\int_{\ln(1)}^{\ln(e^{\pi/2})}\cos(u)du=\int_0^{\pi/2}\cos(u)du=[\sin(x)]_0^{\pi/2}=1-0=1$$

Stofnföll og heildi logra og veldisvísisfalla

Stofnfall fyrir logra er gefið með

$$\int \log_a(x)dx=\frac{(x\ln(x)-x)}{\log_a(x)}+C$$

og stofnfall fyrir vísisfall er gefið með

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln(a)}+C$$

Ákveðið heildi og flatarmál

Eins og sagt er frá í kaflanum um Riemann-summur og ákveðin heildi þá er ákveðna heildið

$$\int_a^b f(x)dx$$

hugsað sem flatarmál formsins sem afmarkast af ferli fallsins f, x-ássins og línanna gefnar með jörnunnum $y=a$ og $y=b$, af því gefnu að $f(x)>0$ fyrir öll x.
Ef $f(x)<0$ þá er þetta hugsað sem neikvætt flatarmál formsins.

Mjög mikilvægt er að nemendur átti sig á muninum á skilgreiningunni á ákveðnu og óákveðnu heildi.
Ákveðið heildi er skilgreint sem flatarmál, en óákveðið heildi er skilgreint sem eins konar

andhverfa deildunnar.
Við fyrstu sýn er langt frá því að vera augljóst að þessir tveir hlutir séu á einhvern hátt tengdir þó svo að táknmálið sé mjög líkt. Það er undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar sem útskýrir hversu skild þessi hugtök eru og skýrir þess vegna hvers vegna stærðfræðingar völdu svona líkt táknmál fyrir hugtök sem við fyrstu sýn virðast ekki mjög tengd.

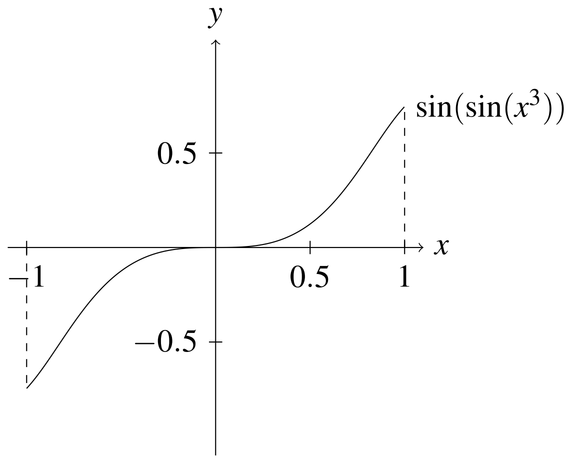
Vert er að ítreka eftirfarandi sérstaklega. Ákveðið heildi er skilgreint sem flatarmál en ekki andhverfa deildunnar. Tengslin þar á milli eru fengin með reglu.

Dæmi:

Reiknið

$$\int_{-1}^{1} \sin(\sin(x^3))dx$$

Lausn:



Hér er nánast ómögulegt að finna stofnfall fyrir heildisstofninn $\sin(\sin(x^3))$. Þó er hægt að taka eftir því að fallið er oddstætt, það sést af því að $\sin(x)$ og x^3 eru bæði oddstæð föll og samsetning oddstæðra falla er oddstætt. Ákveðna heildið fæst með því að finna flatarmálið undir ferlinum hægra megin við y-ásinn því þar er fallið jákvætt, og draga síðan frá flatarmálið yfir ferlinum vinstra megin við y-ásinn því að þar er fallið neikvætt.
Þar sem að fallið er oddstætt þá núllast flatarmálin út og við fáum

$$\int_{-1}^{1} \sin(\sin(x^3))dx = 0$$

Reglur um hlutheildun má sjá í kaflanum sem heitir heildunarreglur og meðalgildi.

Stofnbrotaliðun

Ef að $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ er rætt fall þá er besta leiðin til að finna stofnfall þess að beita stofnbrotaliðun. Farið var ítarlega í aðferð sem lýsir því hvernig skal stofnbrotaliða ræð föll í kaflanum um ræð föll.

Dæmi:
Reiknið ákveðna heildið

$$\int_{3}^{5} \frac{x^4+2x^2-4x-1}{x^3-3x^2+2x}dx$$

Lausn:
Við stofnbrotsliðum fyrst með aðferðum sem var lýst í kaflanum um ræð föll, niðurstaðan verður

$$\frac{x^4+2x^2-4x-1}{x^3-3x^2+2x} = x+3-\frac{1}{2x}+\frac{2}{x-1}+\frac{15}{2(x-2)}$$

Því fæst

$$\int_{3}^{5} \frac{x^4+2x^2-4x-1}{x^3-3x^2+2x}dx = \int_{3}^{5} \left(x+3-\frac{1}{2x}+\frac{2}{x-1}+\frac{15}{2(x-2)}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{\ln(x)}{2} + 2\ln(x-1) + \frac{15\ln(x-2)}{2}\right]_3^5$$

$$= \frac{5^2}{2} + 4\cdot 5 - \frac{1}{2}\ln(5) + 2\ln(4) + \frac{15}{2}\ln(3) - \frac{3^2}{2} - 3\cdot 3 + \frac{1}{2}\ln(3) - 2\ln(2) - \frac{15}{2}\ln(1)$$

$$= 14 - \frac{1}{2}\ln(5) + \ln(4) + 8\ln(3).$$

Óeiginleg heildi af gerð eitt

Stundum getur verið gagnlegt að heilda föll alveg út í óendanleikann. Það er ekki mjög erfitt að útfæra það formlega:

- *Látum* $f : [a,\infty] \to \mathbb{R}$ *vera fall sem er heildanlegt á sérhverju takmörkuðu hlutbili í bilinu* $[a,\infty]$.

  Ef að markgildið

  $$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

  er til og jafnt rauntölu þá segjum við að f *sé heildanlegt á* $[a,\infty]$ *og skrifum*

  $$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

- *Látum* $g : [-\infty,b] \to \mathbb{R}$ *vera fall sem er heildanlegt á sérhverju takmörkuðu hlutbili í bilinu* $[-\infty,b]$.

  $$\lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$$

  er til og jafnt rauntölu þá segjum við að g *sé heildanlegt á* $[-\infty,b]$ *og skrifum*

  $$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$$

- *Látum* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vera fall.*
  Ef að til er tala $c \in \mathbb{R}$ *þannig að* h *sé bæði heildanlegt á* $[-\infty,c]$ *og* $[c,\infty]$ *þá segjum við að* h *sé heildanlegt á* $\mathbb{R}$ *og skrifum*

  $$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

Dæmi:
Reiknið

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$$

Lausn:
Þekkt er að stofnfall fyrir $\frac{1}{1+x^2}$ er $\text{Arctan}(x)$.
Því fæst

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}[\text{Arctan}(x)]_0^t = \lim_{t\to\infty}(\text{Arctan}(t) - \text{Arctan}(0)) = \lim_{t\to\infty}\text{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}$$

Óeiginleg heildi af gerð tvö

Stundum viljum við geta heildað föll yfir bil, þó að þau séu óskilgreind í einhverjum punktum á bilinu. Til dæmis gæti okkur dottið í hug að heilda fallið $1/\sqrt[3]{x^2}$ yfir bilið $[-1,1]$ þó svo að það sé óskilgreint í núlli. Við útfærum það svona:

- *Gerum ráð fyrir að $f : I \to \mathbb{R}$ sé fall skilgreint á bili $I =]a,b]$.*
  Ef að markgildið
  $$\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$
  er til og jafnt rauntölu þá segjum við að f sé heildanlegt á bilinnu $]a,b]$ og skrifum
  $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

- *Gerum ráð fyrir að $f : I \to \mathbb{R}$ sé fall skilgreint á bili $I = [a,b[$.*
  Ef að markgildið
  $$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$
  er til og jafnt rauntölu þá segjum við að f sé heildanlegt á bilinnu $[a,b[$ og skrifum
  $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

- *Gerum ráð fyrir að $c \in [a,b]$ og að $f : [a,b] \setminus c \to \mathbb{R}$ sé fall. Ef að f er bæði heildanlegt á $[a,c[$ og $]c,b]$ þá segjum við að f sé heildanlegt á $[a,b]$ og skrifum*
  $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dæmi:
Reiknið heildið
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$
Lausn:
Við sjáum að fallið $1/\sqrt[3]{x^2} = x^{-2/3}$ er óskilgreint í punktinum $x = 0$. Þetta er þess vegna óeiginlegt heildi af gerð tvö og við reiknum

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int_{-1}^0 x^{-2/3}dx + \int_0^1 x^{-2/3}dx = \lim_{t\to 0}[3x^{1/3}]_{-1}^t + \lim_{t\to 0}[3x^{1/3}]_t^1 = (0-(-3)) + (3-0) = 6$$

Dæmi:
Palli ætlar að heilda fallið $1/x^3$ frá -1 uppí 1. Hann reiknar
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}dx = \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{-1}^1 = \left(\frac{-1}{2} - \frac{-1}{2}\right) = 0$$
Hefur Palli rétt fyrir sér?
Lausn:
Nei!
Fallið $1/x^3$ er óskilgreint í punktinum núll, við þurfum því að skoða markgildin frá báðum

áttum og sjá hvort þau séu til.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t\to 0} \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{-1}^{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}\right) = \infty$$

Fallið er þess vegna óheildanlegt og Palli hefur rangt fyrir sér.

Afleiðujöfnur

Afleiðujafna eða *diffurjafna* er jafna

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0$$

sem tjáir samband milli fallgilda $y(x)$ og gilda $y'(x), y''(x), y'''(x), \dots$ á afleiðum óþekkts falls $y(x)$. *Stig* afleiðujöfnunnar er stærsta stig afleiðu sem kemur fyrir í jöfnunni. Úrlausn jöfnunnar snýst um að finna formúlu fyrir öllum lausnum jöfnunnar, þ.e.a.s. öllum föllum sem skilgreind eru á einhverju bili I á $\mathbb{R}$ og uppfylla jöfnuna í sérhverjum punkti x í I.
Fyrsta stigs afleiðujafna er af gerðinni $F(x, y(x), y'(x)) = 0$. Auðveldara er að eiga við jöfnuna ef hún er umrituð í jöfnu af gerðinni

$$y'(x) = G(x, y(x)).$$

Úrlausn hennar má túlka þannig að verið sé að finna feril $(x, y(x))$ með þann eiginleika að hallatalan er gefin með $G(x, y)$ í sérhverjum punkti (x, y).
Einfaldasta afleiðujafna sem hægt er að hugsa sér er

$$y'(x) = f(x),$$

þar sem f er gefið fall, en úrlausn hennar snýst um að finna stofnfall fyrir f. Við getum notað heildi til þess að rita lausnina

$$y(x) = C + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

þar sem x_0 er einhver punktur í bilinu I.

Aðskiljanleg jafna af 1. stigi

Við segjum að fyrsta stigs jafna sé *aðskiljanleg* ef hægt er að skrifa hana sem

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y(x))}$$

þar sem f og g eru gefin föll.
Til þess að ákvaðra lausnarformúlu látum við F vera stofnfall f og G vera stofnfall g og athugum að ef $y(x)$ er lausn á jöfnunni, þá er

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = G'(y(x))y'(x) = g(y(x))y'(x) = f(x).$$

Þetta sýnir að afleiðujafnan er jafngild því að

$$G(y(x)) = F(x) + C$$

þar sem C er fasti.
Nú er eftir að leysa $y(x)$ út úr þessari jöfnu og þá er lausnin fundin. Sú aðgerð er jafngild því að finna andhverfu G. Þegar andhverfan hefur verið fundin þá verður lausnin

$$y(x) = G^{-1}\big(F(x) + C\big).$$

Sýnidæmi 11.1.3
Leysið jöfnuna $y' = x\cos^2(y)$.
Lausn: Þetta er aðskiljanleg afleiðujafna, við getum sett $g(y) := \frac{1}{\cos^2(y)}$ og $f(x) := x$ og þá er jafnan á forminu

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y(x))}.$$

Nú er $\tan(y)$ stofnfall fyrir $g(y)$ og $F(x) := \frac{1}{2}x^2$ stofnfall fyrir f svo að lausnirnar eru

$$\arctan(F(x)+C) = \arctan(\frac{1}{2}x^2 + C)$$

þar sem $C \in \mathbb{R}$.

Línuleg jafna af 1. stigi

Jafnan er sögð vera *línuleg* ef hægt er að umrita hana yfir á formið

$$y'(x) + a(x)y(x) = g(x),$$

þar sem a og g eru gefin föll á einhverju bili I.
Til þess að ákvarða lausnarformúlu látum við $A(x)$ vera eitthvert stofnfall fyrir fallið $a(x)$ og athugum að þá er

$$\frac{d}{dx}\big(e^{A(x)}y(x)\big) = e^{A(x)}y'(x) + a(x)e^{A(x)}y(x) = e^{A(x)}\big(y'(x) + a(x)y(x)\big).$$

Afleiðujafnan er því jafngild

$$\frac{d}{dx}\big(e^{A(x)}y(x)\big) = e^{A(x)}g(x).$$

Nú getum við heildað frá punktinum x_0 og fáum þá

$$e^{A(x)}y(x) = C + \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}g(t)\,dt.$$

Almennt lausnarform jöfnunnar er nú fundið:

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}g(t)\,dt.$$

Sýnidæmi 11.1.1
Leysið afleiðujöfnuna $y' = xe^{x^2}$.
Lausn: Þetta er einfaldasta gerð diffurjöfnu, til að leysa hana þurfum við bara að finna stofnfall fyrir xe^{x^2}. Ef við beitum innsetningunn $u = x^2$ þá er $\frac{du}{dx} = 2x$ og við fáum

$$y = \int xe^{x^2}\,dx = \int \frac{x}{2x}e^u\,du = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

þar sem $C \in \mathbb{R}$ er ótiltekinn fasti.

Sýnidæmi 11.1.2
Leysið afleiðujöfnuna $y' + \frac{y}{x} = \sin(x^2),\ y(1) = 1$.
Lausn: Þetta er fyrsta stigs línuleg afleiðujafna. Við fáum þá samkvæmt lausnarformúlu að

$$y = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}\sin(t^2)\,dt$$

þar sem A er eitthvert stofnfall fyrir $\frac{1}{x}$ og C er einhver fasti, við veljum $x_0 = 0$ og $A(x) = \ln(x)$ og fáum þá

$$
\begin{aligned}
y(x) &= Ce^{-\ln(x)} + e^{-\ln(x)} \int_0^x e^{\ln(t)} \sin(t^2)\, dt \\
&= \frac{C}{x} + \frac{1}{x} \int_0^x t \sin(t^2)\, dt \qquad \left(u = t^2, \ \frac{du}{dt} = 2t \right) \\
&= \frac{C}{x} + \frac{1}{x} \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{2}\, du \\
&= \frac{C}{x} + \frac{1}{2x} [-\cos]_0^{x^2} \\
&= \frac{C}{x} + \frac{1 - \cos(x^2)}{2x}.
\end{aligned}
$$

Þar sem fastinn C er ótiltekin getum við svo einfaldað þetta í

$$y(x) = \frac{C - \cos(x^2)}{2x}.$$

Nú notum við skilyrðið í $x = 1$ til að ákvarða lausnina ótvírætt, við finnum C þ.a.

$$\frac{C - \cos(1^2)}{2 \cdot 1} = 1, \quad \text{þ.e.} \quad C = 1 + \cos(1).$$

Línuleg jafna af 2. stigi

Línuleg afleiðujafna af 2. stigi er af gerðinni

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

þar sem föllin a_0, a_1, a_2 og f eru gefin á einhverju bili I. Ef stuðlarnir a_0, a_1 og a_2 eru fastar, þá segjum við að jafnan hafi *fastastuðla*. Ef f er núllfallið, þ.e. fastafallið $f(x) = 0$, þá segjum við að jafnan sé *óhliðruð*, en að hún sé *hliðruð* ef f er ekki núllfallið.

Óhliðruð jafna með fastastuðla

Nú skulum við líta á jöfnuna $y'' + by' + cy = 0$ þar sem b og c eru rauntölur. Þetta er annars stigs jafna með fastastuðla og hún er óhliðruð. Byrjum á því að taka $y(x) = e^{rx}$, þar sem r er tala. Ef við stingum þessu inn í jöfnuna, þá fæst

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = r^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = e^{rx}(r^2 + br + c) = 0$$

Þetta segir okkur að $y(x) = e^{rx}$ sé lausn ef og aðeins ef r er núllstöð *kennimargliðunnar* $P(x) = x^2 + bx + c$.

Í ljós kemur að hægt er að lýsa almennri lausn jöfnunnar út frá núllstöðvum kennimargliðunnar. Látum því $D = b^2 - 4c$ tákna aðgreini hennar. Ef $D > 0$ þá eru núllstöðvarnar

$$r_1 = \tfrac{1}{2}\big(-b + \sqrt{b^2 - 4c}\big) \quad \text{og} \quad r_2 = \tfrac{1}{2}\big(-b - \sqrt{b^2 - 4c}\big)$$

og almenn lausn er

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x},$$

þar sem C_1 og C_2 eru fastar. Ef $D = 0$, þá hefur kennimargliðan aðeins eina núllstöð $r = -\frac{1}{2}b$ og við fáum almenna lausn

$$y(x) = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}.$$

Ef $D < 0$, þá fáum við tvær núllstöðvar, sem eru tvinntölur,

$$r_1 = \tfrac{1}{2}\big(-b + i\sqrt{4c-b^2}\big) = \alpha + i\beta \quad \text{og} \quad r_2 = \tfrac{1}{2}\big(-b - i\sqrt{4c-b^2}\big) = \alpha - i\beta$$

og almenn lausn er

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Hliðruð jafna með fastastuðla
Hliðruð línuleg 2. stigs jafna með fastastuðla er af gerðinni

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x).$$

Mismunur tveggja lausna á henni er lausn á óhliðruðu jöfnunni og það segir okkur að hægt sé að skrifa almenna lausn á hliðruðu jöfnunni sem summu tveggja liða $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, þar sem y_h er almenn lausn á óhliðruðu jöfnunni og y_p er einhver lausn á hliðruðu jöfnunni. Slík lausn á hliðruðu jöfnunni er oft nefnd *sérlausn*.
Til er formúla fyrir lausn á hliðruðu jöfnunni sem þið eigið eftir að læra síðar, en oft er hægt að finna lausn með því að giska á ákveðið lausnarform og reikna lausnina með þeirri forsendu að til sé lausn á því ákveðna formi.
Ef til dæmis f er margliða þá er alltaf hægt að finna lausn y_p sem er margliða.
Sýnidæmi: Finnum almenna lausn á $y'' - 4y' + y = x^2$.
Lausn: Við byrjum á því að finna sérlausn og gerum ráð fyrir fyrir að hún sé af gerðinni $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, sem sagt annars stigs margliða. Ef við stingum þessu falli inn í jöfnuna, þá fáum við jöfnuna

$$2A - 4(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

sem jafngildir jöfnunni

$$Ax^2 + (-8A + B)x + (2A - 4B + C) = x^2.$$

Nú berum við saman stuðlana við veldin í báðum hliðum jöfnunnar og sjáum að þrjár jöfnur verða að vera uppfylltar, $A = 1$, $-8A + B = 0$ og $2A - 4B + C = 0$. Við leysum út $B = 8$ og $C = 30$.
Nú eru rætur kennimargliðunnar $2 \pm \sqrt{3}$. Almenna lausnin sem við leitum að er því

$$y(x) = C_1 e^{(2-\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2+\sqrt{3})x} + x^2 + 8x + 30.$$

Ef við setjum $f(x) = \cos(\alpha x)$ eða $f(x) = \sin(\alpha x)$ í hægri hlið jöfnunnar, þá leitum við að sérlausn af gerðinni $y_p(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$.
Ef $f(x) = e^{\alpha x}$ og α er ekki núllstöð kennimargliðunnar, þá leitum við að lausn af gerðinni $y_p(x) = Ae^{\alpha x}$. Ef α er önnur af tveimur núllstöðvum kennimargliðunnar, þá leitum við að lausn af gerðinni $y_p(x) = Axe^{\alpha x}$. Ef α er eina núllstöð kennimargliðunnar, þá leitum við að lausn af gerðinni Ax^2e^{rx}.
Sýnidæmi 11.2.1
Finnið almenna lausn jöfnurnar $y'' + 2y' + 5y = 0$.
Lausn: Þetta er óhliðruð jafna. Kennimargliðan er $x^2 + 2x + 5$. Rætur hennar eru

$$x = \frac{-2 \pm i\sqrt{4\cdot 5 - 2^2}}{2} = -1 \pm 2i$$

og þá fáum við lausnirnar

$$C_1 e^{-x}\cos(2x) + C_2 e^{-x}\sin(2x).$$

Sýnidæmi 11.2.2
Finnið almenna lausn á $y'' + y' - 6y = \cos(x) + \sin(x) + 3$.
Lausn: Við byrjum á að finna sérlausn. Í hægri hlið er bæði fasti og hornaföll svo að við leitum að sérlausn á forminu $A\cos(x) + B\sin(x) + c$. Stingum því inn í $(*)$ og fáum

$$f''(x)+f'(x)-6f(x) = -A\cos(x)-B\sin(x)-A\sin(x)+B\cos(x)-6A\cos(x)-6B\sin(x)+6c = \cos(x)+\sin(x)$$

Þá fáum við jöfnuhneppið

$$B - 7A = 1, \qquad -7B - A = 1, \qquad 6c = 3.$$

sem hefur lausnina $A = -\frac{4}{25}$ og $B = -\frac{3}{25}$ og $c = \frac{1}{2}$. Þá er $-\frac{4}{25}\cos(x) - \frac{3}{25}\sin(x) + \frac{1}{2}$ sérlausn. Kennimargliðan er $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ með ræturnar -3 og 2. Þá er almenna lausnin

$$C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - \frac{4}{25}\cos(x) - \frac{3}{25}\sin(x) + \frac{1}{2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sýnidæmi 11.2.3
Leysið afleiðujöfnuna $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$.
Lausn: Kennimargliðan er x^2+4x+4 en -2 er tvöföld rót hennar. Almenn lausn óhliðruðu jöfnunnar er því $C_1e^{-2x} + Cxe^{-2x}$. Við leitum síðan að sérlausn á forminu $f(x) = Cx^2e^{-2x}$. Við fáum þá $f'(x) = 2Cxe^{-2x} - 2Cx^2e^{-2x}$ og $f''(x) = 2Ce^{-2x} - 4Cxe^{-2x} - 4Cxe^{-2x} + 4x^2e^{-2x} = 2Ce^{-2x} - 8Cxe^{-2x} + 4Cx^2e^{-2x}$. Við setjum það inn í jöfnuna og fáum

$$C(2e^{-2x} - 8xe^{-2x} + 4x^2e^{-2x} + 8xe^{-2x} - 8x^2e^{-2x} + 4x^2e^{-2x} = 2Ce^{-2x} = e^{-2x}$$

svo að $C = \frac{1}{2}$. Þá er almenna lausnin

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Runur

Fall sem skilgreint er á $\mathbb{N}$ eða $\mathbb{N}_0$ með gildi í einhverju mengi nefnist *runa*. Runa nefnist *rauntalnaruna*, ef mengið er $\mathbb{R}$, en *tvinntalnaruna*, ef mengið er $\mathbb{C}$. Runur eru settar fram með ýmsum hætti. Venja er að tákna fallgildin $a(n)$ með a_n. Runur a, b, $c, \dots$, geta verið gefnar með formúlum

$$a_n = n, \qquad b_n = \frac{1}{n}, \qquad c_n = \frac{1}{2^n}, \qquad d_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad \dots.$$

Þessar sömu runur eru einnig táknaðar með

$$(n)_{n=1}^{\infty}, \qquad (1/n)_{n=1}^{\infty}, \qquad (2^{-n})_{n=0}^{\infty}, \qquad \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty} \quad \dots.$$

Hægt er að setja runur fram með upptalningu á liðum. Þá eru settir fram nógu margir liðir til þess að ljóst sé hver reglan er. Runur sléttra talna, oddatalna, frumtalna og neikvæðra velda af 2 eru þannig settar fram sem

$$2,4,6,8,\dots, \quad 1,3,5,7,\dots, \quad 2,3,5,7,11,\dots \quad \text{og} \quad \frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\dots.$$

Runur má einnig setja fram með *þrepunarskilgreiningu*. Þá eru fyrst taldir upp nokkrir liðir, segjum $a_1,\dots,a_k$ og síðan er sett fram formúla sem lýsir því hvernig almennt a_n er reiknað út fá þeim liðum sem á undan eru komnir. Gott dæmi um þetta er *Fibonacci-runan*,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Upptalning á þessari runu er

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\dots.$$

Sýnidæmi 7.1.1
a) Finnið formúlu fyrir $n-$ta liðnum í rununni $1,2,4,8,16,\dots$.
Lausn: Hver liður er tvöfalt stærri en sá næsti á undan, þar sem fyrsti liðurinn er $1 = 2^0$ verður $n-$ti liðurinn 2^{n-1}.
b) Setjið rununa úr a-lið fram með þrepunarskilgreiningu.
Lausn: Við höfum að $a_1 = 1$ og að sérhver liður þar á eftir er tvöfalt stærri en sá á undan svo $a_n = 2a_{n-1}$, $n \geq 2$.

Raðir

Ef $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ er talnaruna þá myndum við nýja runu $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ með því að mynda summur,

$$s_1 = a_1,\ \ s_2 = a_1 + a_2,\ \ s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Liður númer k í þessari runu nefnist k-ta *hlutsumma* rununnar $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
Röð $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ er runa sem samanstendur af hlutsummum gefinnar runu $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. Þannig stendur $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ fyrir rununa

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\dots.$$

Sýnidæmi 7.2.1
Finnið formúlu fyrir n-ta liðinn í röðinni $\sum_{k=1}^{+\infty} k$.
Lausn: Hér táknar $\sum_{k=1}^{+\infty} k$ rununa þar sem $n-$ti liður er $n-$ta hlutsumma rununnar $(k)_{k=1}^{+\infty}$, en það er $s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sýnidæmi 7.2.2
Finnið hlutsummurunu raðarinnar $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$, sem er gefin með $a_n := (-1)^n$.
Lausn: Við viljum reikna summuna $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$. Fyrir $n = 1$ er summan -1. Fyrir $n = 2$ er hún 0 og svo endurtekur þetta sig, s.s.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} -1 \text{ ef } n \text{ odda} \\ 0 \text{ ef } n \text{ slétt} \end{cases}.$$

Jafnmunaruna

Runa $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ er sögð vera *jafnmunaruna* eða *mismunaruna* ef mismunur milli aðlægra liða er föst tala m, þ.e. $a_{k+1} - a_k = m$ fyrir öll k. Við höfum að

$$a_2 = a_1 + m,\ a_3 = a_2 + m = a_1 + 2m, \dots,\ a_n = a_1 + (n-1)m.$$

Það er auðvelt að finna formúlu fyrir n-tu hlutsummunni, því við getum notað formúluna $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n}(a_1+(k-1)m) = na_1 + m\sum_{k=1}^{n}(k-1) \\ &= na_1 + m\sum_{k=1}^{n-1} k = na_1 + m\cdot\tfrac{1}{2}(n-1)n \\ &= n\cdot\frac{2a_1+(n-1)m}{2} = n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}. \end{aligned}$$

Út úr síðasta hluta þessarar jöfnu lesum við að hlutsumma í jafnmunarunu er jöfn margfeldi af fjölda liða og meðaltali af fyrsta og síðasta lið. Athugið að $(k)_{k=1}^{\infty}$ er jafnmunaruna með $a_1 = 1$ og $m = 1$.

Sýnidæmi 7.3.1
Í jafnmunarunu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ er fyrsti liðurinn 2 og fimmti liðurinn 14. Finnið summu fyrstu 100 liðanna.

Lausn: Munurinn á fyrsta og fimmta lið er 12 svo að munurinn á samliggjandi liðum er 3. Þá reiknum við lið númer 100 með $a_{100} = 2+(100-1)\cdot 3 = 299$. Því næst getum við nýtt okkur formúlu fyrir hlutsummu jafnmunarunu og fáum

$$\sum_{k=1}^{100} a_k = 100\frac{a_1+a_{100}}{2} = 50(2+299) = 15050.$$

Kvótarunur

Kvótaruna eða *jafnhlutfallaruna* er runa $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ þannig að hlutfall milli samliggjandi liða í rununni er fast, þ.e.a.s. til er tala $q \neq 0$, þannig að $a_{n+1}/a_n = q$ fyrir öll n. Talan q kallast *kvóti* eða *margfeldisstuðull* rununnar.
Lítum á nokkur dæmi um jafnhlutfallarunur

$$1,-1,1,-1,1,-1,\ldots, \quad 1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots, \quad i,-1,-i,1,i,-1,\ldots.$$

Liðirnir í kvótarunu eru af gerðinni

$$a_2 = a_1q,\ a_3 = a_2q = a_1q^2,\ \ldots,\ a_n = a_1q^{n-1}$$

og því verður n-ta hlutsumman

$$s_n = a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}).$$

Ef $q = 1$, þá eru allir liðir rununnar (a_k) eins og við fáum að $s_n = a_1\cdot n$.
Gerum nú ráð fyrir $q \neq 1$ og margföldum s_n með q. Þá fáum við

$$qs_n = a_1(q+q^2+\cdots+q^n) = s_n - a_1 + a_1q^n.$$

Út úr þessari jöfnu leysum við

$$s_n = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Sýnidæmi 7.4.1
Fyrsti liður kvótarunu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ er 5 og fjórði liðurinn er -40. Finnið tíunda liðinn í röðinni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Lausn: Við viljum finna summuna $s_{10} = \sum_{n=1}^{10} a_n$. Við byrjum á að finna kvótann q, við vitum að $5q^3 = -40$ svo að $q = \sqrt[3]{-8} = -2$. Þá getum við sett inn í formúlu

$$s_{10} = \sum_{k=1}^{10} 5(-2)^{k-1} = a_1 \frac{1-q^{10}}{1-q} = 5\frac{1-1024}{3} = -1705.$$

Markgildi runa og raða

Rauntalnarunan $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ er sögð vera *samleitin* með markgildið L ef um sérhvert opið bil I sem innheldur L gildir að til er $N \in \mathbb{N}$ þannig að $a_k \in I$ ef $k \geq N$. Við táknum þá markgildið L með

$$\lim_{k\to\infty} a_k.$$

Munið að sérhvert opið bil sem inniheldur L inniheldur samhverft opið bil af gerðinni $(L-\varepsilon, L+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}\,;\, |x-L| < \varepsilon\}$. Þetta gefur að hægt er að umorða skilgreininguna á markgildi þannig að runan er sögð vera samleitin með markgildið L, ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er $N \in \mathbb{N}$ þannig að

$$|a_k - L| < \varepsilon \qquad \text{fyrir öll } \ k \geq N.$$

Samhljóða skilgreining gengur fyrir tvinntalnarunu þar sem orðunum „sérhvert opið bil“ er skipt út fyrir „sérhverja opna skífu“.
Mismunaruna $a_k = a_1 + (k-1)m$ hefur markgildi aðeins ef hún er fastaruna, þ.e.a.s. $m = 0$, og þá er markgildið a_1. Kvótaruna $a_k = a_1 q^{(k-1)}$ hefur markgildi aðeins ef $|q| < 1$ eða $q = 1$ og er markgildið 0 ef $|q| < 1$ en a_1 ef $q = 1$.
Röðin $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ er sögð vera samleitin ef hlutsummurunan er samleitin og þá táknum við markgildið einnig með $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Auðvelt er að sannfæra sig um að ef röð er samleitin, þá stefna liðir hennar á 0. Þessari staðhæfingu má ekki snúa við, því auðvelt er að gefa dæmi um raðir, sem eru ekki samleitnar, en hafa liði sem stefna á 0.
Í síðustu grein reiknuðum við út hlutsummur kvótarunu, $a_k = a_1 q^{k-1}$, $a_1 \neq 0$. Hún er samleitin aðeins ef $|q| < 1$ og

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Sýnidæmi 7.5.1
Látum $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vera kvótarunu með $a_1 := 5$ og $a_2 := 4$. Finnið summu raðarinnar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Lausn: Við getum sett þetta beint inn í formúlu, því að við sjáum að $q = \frac{4}{5} < 1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 \frac{1}{1-q} = \frac{5}{1/5} = 25.$$

Sýnidæmi 7.5.2
Finnið markgildi rununnar $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ með $a_n := \frac{n^2-1}{n^2+n+1}$.
Lausn: Við deilum uppi og niðri á striki með n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n^2}{1+1/n+1/n^2} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1-1/n^2}{\lim_{n\to\infty} 1+1/n+1/n^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Sýnidæmi 7.5.3
Segið til um hvort runan $a_n := \cos(n\pi)$ er samleitin.
Lausn: Athugum að $\cos(n\pi) = (-1)^{n-1}$. En það þýðir að runan getur ekki verið samleitin því að hún tekur tvö ólík gildi, þ.e. 1 og -1 óendanlega oft.

Takmarkanir rauntalnakerfisins

Við höfum séð að öll talnakerfin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ hafa sínar takmarkanir og það sama á við um rauntölurnar $\mathbb{R}$. Í mengi náttúrlegra talna er frádráttur ófullkomin aðgerð. Í mengi heilla talna er deiling ófullkomin aðgerð. Ræðu tölurnar duga ekki til þess að lýsa lengdum á strikum og ferlum sem koma fyrir í rúmfræðinni.
Við vitum að rauntala í öðru veldi er alltaf stærri eða jöfn núlli svo jafnan $x^2 = -1$ getur ekki haft lausn. Annars stigs jafnan $ax^2 + bx + c = 0$ hefur heldur enga lausn ef $D = b^2 - 4ac < 0$. Við getum skrifað niður fleiri dæmi um margliður af stigi sem er slétt tala án núllstöðva í $\mathbb{R}$. Margliður af oddatölustigi hafa alltaf núllstöð.
Nú er eðlilegt að spyrja, hvort hægt sé að stækka rauntalnakerfið í talnakerfi þar sem hægt er að finna lausn á annars stigs jöfnunni $x^2 = -1$ og hvort slíkt talnakerfi gefi af sér lausnir á fleiri jöfnum sem ekki eru leysanlegar í $\mathbb{R}$.
Ímyndum okkur nú augnablik að til sé talnakerfi sem inniheldur rauntölurnar sem hlutmengi og að þar sé stak i sem uppfyllir $i^2 = -1$. Þá er i að sjálfsögðu ekki rauntala. Við gefum okkur að allar reiknireglur fyrir rauntölur gildi áfram. Víxlregla margföldunar segir okkur þá að $ia = ai$ fyrir allar rauntölur a.
Tökum nú rauntölur a, b, c og d. Reiknireglurnar að ofan ásamt reiknireglum um summu og margfeldi rauntalna gefa að um $a + ib$ og $c + id$ gildir

$$(a+ib)+(c+id) = a+c+ib+id = (a+c)+i(b+d)$$

og

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac+ibc+aid+ibid\\ &= ac+ibc+iad+i^2bd\\ &= (ac-bd)+i(ad+bc).\end{aligned}$$

Þessar tvær formúlur gefa okkur forskrift að því hvernig leggja á saman og margfalda tölurnar $a + ib$ og $c + id$ þannig að út komi tölur af sömu gerð.

Tvinntalnaplanið

Nú snúum við okkur að spurningunni um það hvort hægt sé að útvíkka $\mathbb{R}$ í stærra talnakerfi þar sem til er tala i sem uppfyllir $i^2 = -1$. Það kemur í ljós að slíkt kerfi er til og að sérhverja tölu í því má skrifa sem $a + ib$ þar sem a og b eru rauntölur.
Lítum nú á mengi allra vigra í plani. Sérhver vigur hefur hnit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sem segja okkur hvar lokapunktur vigurs er staðsettur ef upphafspunktur hans er settur í upphafspunkt hnitakerfisins. Á mengi allra vigra höfum við tvær aðgerðir, samlagningu og margföldun með tölu. Samlagningunni er lýst með hnitum,

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+c).$$

Við skilgreinum nú margföldun á $\mathbb{R}^2$ með hliðsjón af formúlunni sem við uppgötvuðum hér að framan,

$$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc).$$

Talnaplanið $\mathbb{R}^2$ með venjulegri samlagningu og þessari margföldun nefnist *tvinntölur* og er táknað með $\mathbb{C}$. Nú þarf að bretta upp ermar og sannfæra sig um að eftirtaldar reiknireglur gildi:

$$
\begin{array}{ll}
\big((a,b)+(c,d)\big)+(e,f)=(a,b)+\big((c,d)+(e,f)\big) & \textit{(tengiregla samlagningar)},\\
\big((a,b)(c,d)\big)(e,f)=(a,b)\big((c,d)(e,f)\big) & \textit{(tengiregla margföldunar)},\\
(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b) & \textit{(víxlregla samlagningar)},\\
(a,b)(c,d)=(c,d)(a,b) & \textit{(víxlregla margföldunar)},\\
(a,b)\big((c,d)+(e,f)\big)=(a,b)(c,d)+(a,b)(e,f) & \textit{(dreifiregla)},\\
(a,b)+(0,0)=(a,b) & \textit{((0,0) er samlagningarhlutleysa)},\\
(1,0)(a,b)=(a,b) & \textit{((1,0) er margföldunarhlutleysa)}.
\end{array}
$$

Talan $(-a,-b)$ er samlagningarandhverfa (a,b). Við athugum að jafnan $(a,b)(a,-b)=(a^2+b^2,0)$ segir okkur að sérhver tala $(a,b)\neq(0,0)$ eigi sér margföldunarandhverfu

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right),$$

sem þýðir að

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0).$$

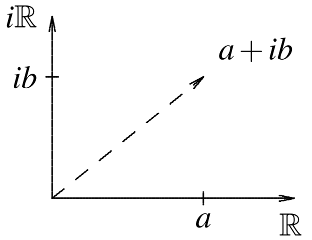
Við tökum eftir að

$$(a,0)(c,d)=(ac,ad)=a(c,d).$$

sem segir okkur að margföldun með vigrinum $(a,0)$ sé það sama og margföldun með tölunni a. Eins sjáum við að vigrar af gerðinni $(a,0)$ haga sér eins og rauntölur því

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0) \qquad \text{og} \qquad (a,0)(b,0)=(ab,0).$$

Í mengi tvinntalna gerum við því ekki greinarmun á rauntölunni a og vigrinum $(a,0)$ og lítum á lárétta hnitaásinn $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\,;x\in\mathbb{R}\}$ sem rauntalnalínuna $\mathbb{R}$. Við skrifum þá sérstaklega 1 í stað $(1,0)$ og 0 í stað $(0,0)$

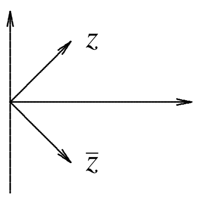


Mengið $\mathbb{R}$ nefnist *raunás* í tvinntalnaplaninu en mengið $i\mathbb{R}=\{iy;y\in\mathbb{R}\}$ nefnist *þverás*.
Lítum nú á vigurinn $(0,1)$. Um hann gildir $(0,1)^2=(-1,0)$. Við innleiðum tákn fyrir hann: $i=(0,1)$. Sérhvern vigur (a,b) má skrifa sem samantekt $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$. Við gerum ekki greinarmun á rauntölu 1 og tvinntölunni $(1,0)$ og því erum við komin með framsetninguna

$$(a,b)=(a,0)(1,0)+(b,0)(0,1)=a+ib.$$

Raunhluti, þverhluti og samok

Ef z er tvinntala, þá getum við ritað $z=x+iy$ þar sem x og y eru rauntölur. Talan x nefnist þá *raunhluti* tölunnar z og talan y nefnist *þverhluti* hennar. Við táknum raunhlutann með $\Re z$ og þverhlutann með $\Im z$.



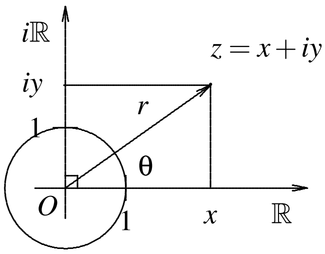
Tvinntala z er sögð vera *rauntala* ef $\Im z=0$ og hún er sögð vera *hrein þvertala* ef $\Re z=0$.
Ef $z\in\mathbb{C}$, $x=\Re z$ og $y=\Im z$, þá nefnist talan $\bar{z}=x-iy$ *samok* eða *samokatala* tölunnar z. Athugið að $\bar{z}$ er spegilmynd z í raunásnum og því er $\bar{\bar{z}}=z$.

Við höfum nokkrar reiknireglur um samok:

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2, \\ z+\bar{z} &= 2x = 2\Re z, \\ z-\bar{z} &= 2i\Im z, \\ \overline{zw} &= \bar{z}\bar{w}. \end{aligned}$$

Við höfum að z er rauntala þá og því aðeins að $z = \bar{z}$ og að z er hrein þvertala þá og því aðeins að $z = -\bar{z}$.

Lengd og stefnuhorn



Ef $z \in \mathbb{C}$, $x = \Re z$ og $y = \Im z$, þá nefnist talan

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2},$$

lengd, *tölugildi* eða *algildi* tvinntölunnar z. Ef $\theta \in \mathbb{R}$ og hægt er að skrifa tvinntöluna z á forminu

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

þá nefnist talan θ *stefnuhorn* eða *horngildi* tvinntölunnar z. Hornaföllin cos og sin eru lotubundin með lotuna 2π og því eru allar tölur af gerðinni $\theta + 2\pi k$ með $k \in \mathbb{Z}$ einnig stefnuhorn fyrir z.
Raðtvenndin $(|z|, \theta)$ er nefnd *pólhnit* eða *skauthnit* tölunnar z.
Nú fáum við samkvæmt reiknireglunum hér að framan:

$$\begin{aligned} |\bar{z}| &= |z|, \\ z\bar{z} &= |z|^2, \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \qquad z \neq 0. \end{aligned}$$

Veldareglur

Ef z er tvinntala þá getum við skilgreint heiltöluveldi þannig að $z^0 = 1$, $z^1 = z$, og $z^n = z \cdot z^{n-1}$ þar sem n er náttúrleg tala. Neikvæðu veldin eru skilgreind þannig að z^{-1} er margföldunarandhverfa z og fyrir neikvæð n er $z^n = (z^{-1})^{|n|}$. Með þessu fást sömu veldareglur og gilda um rauntölurnar:

$$\begin{aligned} z^n \cdot z^m &= z^{n+m}, \\ \frac{z^n}{z^m} &= z^{n-m}, \\ z^n \cdot w^n &= (zw)^n, \\ (z^n)^m &= z^{nm}. \end{aligned}$$

Einingarhringurinn

Einingarhringurinn $\mathbb{T}$ samanstendur af öllum tvinntölum með tölugildi 1. Sérhvert z í $\mathbb{T}$ má því skrifa á forminu $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Tökum nú aðra slíka tölu $w = \cos\beta + i\sin\beta$ og margföldum þær saman:

$$\begin{aligned} zw &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Hér höfum við notað samlagningarformúlur fyrir cos og sin. Af þessari formúlu leiðir regla sem kennd er við de Moivre:

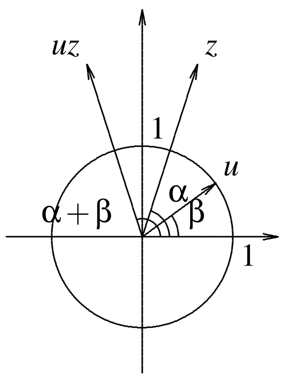
$$\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Rúmfræðileg túlkun á margföldun

Látum nú z og w vera tvær tvinntölur með lengdir $|z|$ og $|w|$ og stefnuhornin α og β. Þá fáum við

$$zw = |z||w|\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big).$$

sem segir okkur að lengd margfeldisins sé margfeldi lengda z og w og að að stefnuhorn margfeldisins sé summa stefnuhorna z og w.
Ef nú $u \in \mathbb{T}$ er tala á einingarhringnum með stefnuhornið β, þá er uz snúningur á z um hornið β.



Þríhyrningsójafnan

Tökum tvær tvinntölur z og w og reiknum smávegis:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2. \end{aligned}$$

Athugum nú að

$$|\Re z| \leq |z| \qquad \text{og} \qquad |\Im z| \leq |z|.$$

Af fyrri ójöfnunni leiðir

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

Ef við tökum kvaðratrót beggja vegna ójöfnumerkisins, þá fáum við *þríhyrningsójöfnuna*

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Ef henni er beitt á liðina $z-w$ og w í stað z og w, þá fáum við $|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w| + |w|$. Jafngilt er að $|z| - |w| \leq |z-w|$. Ef við skiptum hlutverkum z og w í þessari ójöfnu, þá fáum við $-|z| + |w| \leq |w-z| = |z-w|$. Tvær síðustu ójöfnurnar eru venjulega teknar saman í annað afbrigði þríhyrningsójöfnunnar

$$||z| - |w|| \leq |z-w|.$$

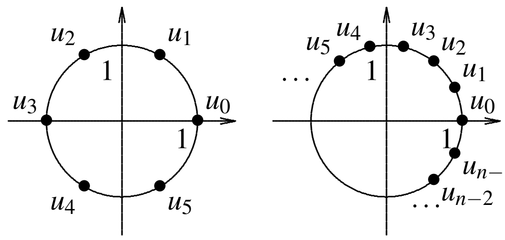
Einingarrætur

Lítum nú á jöfnuna $z^n = 1$, þar sem $n \geq 2$ er náttúrleg tala. Ef z er lausn hennar, þá er $1 = |z^n| = |z|^n$ sem segir okkur að $|z| = 1$ og að við getum skrifað $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Regla de Moivres segir nú að

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = z^n = 1.$$

Talan 1 hefur horngildið $2\pi k$ fyrir sérhvert $k \in \mathbb{Z}$ og þessi jafna segir okkur því að $n\theta$ sé heiltölumargfeldi af 2π og þar með eru möguleg horngildi tvinntölunnar z gefnar með

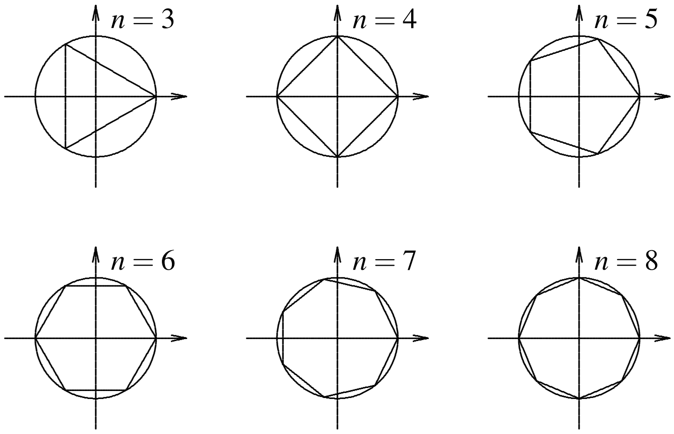
$$\theta = 2\pi k/n, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$



Ef tvær heiltölur k_1 og k_2 hafa sama afgang við heiltöludeilingu með n, þá er $\cos(2\pi k_1/n) = \cos(2\pi k_2/n)$ og $\sin(2\pi k_1/n) = \sin(2\pi k_2/n)$. Þetta gefur okkur að jafnan $z^n = 1$ hefur n ólíkar lausnir $u_0, \dots, u_{n-1}$, sem nefnast *n-tu rætur af* 1 og eru gefnar með formúlunni

$$u_k = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Þessar tölur eru allar á einingarhringnum. Athugið að $u_0 = 1$, $u_k = u_1^k$ fyrir $k = 1, \dots, n-1$, og að þær raða sér í hornin á reglulegum n-hyrningi.



Rætur

Látum nú $w = s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ vera gefna tvinntölu af lengd $s \geq 0$ og með stefnuhornið α og leitum að lausnum á jöfnunni $z^n = w$. Ef z er slík lausn og u er n-ta einingarrót, þá er $(zu)^n = z^n u^n = z^n = w$ og því er zu einnig lausn. Nú eru einingarræturnar n talsins og þetta segir okkur að um leið og við finnum eina lausn z_0 þá fáum við n ólíkar lausnir $z_0 u$ með því að stinga inn öllum mögulegum n-tu einingarrótum fyrir u. Látum nú z_0 vera tvinntöluna sem gefin er með formúlunni

$$z_0 = s^{\frac{1}{n}}\big(\cos(\alpha/n) + i\sin(\alpha/n)\big)$$

og færum hana síðan í n-ta veldi,

$$\begin{aligned} z_0^n &= \big(s^{\frac{1}{n}}\big)^n \big(\cos(\alpha/n) + i\sin(\alpha/n)\big)^n \\ &= s\big(\cos(n\alpha/n) + i\sin(n\alpha/n)\big) = w. \end{aligned}$$

Þar með erum við komin með formúlu fyrir einni lausn. Með því að nota formúluna fyrir n-tu einingarrótunum, þá fáum við upptalningu á öllum lausnum jöfnunnar $z^n = w = s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,

$$z_k = s^{\frac{1}{n}}\big(\cos((\alpha + 2\pi k)/n) + i\sin((\alpha + 2\pi k)/n)\big), \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Þessari formúlu má lýsa þannig að n-tu ræturnar eru fundnar þannig að fyrst er fundin ein rót z_0. Henni er snúið um hornið $2\pi/n$ með því að margfalda með $u_1 = \cos(2\pi/n) +$

$i\sin(2\pi/n)$ yfir í $z_1 = u_1 z_0$. Næst er z_1 snúið um hornið $2\pi/n$ í $z_2 = u_1 z_1$ og þannig er haldið áfram þar til n ólíkar rætur eru fundnar.

Sýnidæmi 6.1.1
Reiknið $(2+5i)-(3-i)(5+2i)$.
Lausn: Byrjum á að margfalda og síðan leggjum við saman eins og vanalega

$$(2+5i)-(3-i)(5+2i) = 2+5i-(15+6i-5i-2i^2) = 2+5i-15-6i+5i-2 = -15+4i.$$

Sýnidæmi 6.1.2
Finnið raunhluta, þverhluta, samok og margföldunarandhverfu $(1+2i)$.
Lausn: Raunhlutinn er $\mathrm{Re}(1+2i) = 1$ og þverhlutinn er $\mathrm{Im}(1+2i) = 2$. Samokið er svo $\overline{1+2i} = 1-2i$. Margföldunarandhverfan er svo samok tölunnar deilt með lengd hennar í öðru veldi eða

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{1^2+2^2} = \frac{1-2i}{5}$$

Sýnidæmi 6.1.3
a) Finnið pólhnit tölunnar $-1+i$.
Lausn: Lengdin er $\sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$. Hornið er síðan $\frac{3\pi}{4}$, það fæst með $\frac{\pi}{2} + \arctan(1/1)$, (auðvelt að sjá á mynd).
b) Reiknið $(-1+i)^8$.
Lausn: Við fundum pólhnitin í síðasta lið. Við notum þau í reglu De Moivre:

$$(-1+i)^8 = (\sqrt{2}\cos(3\pi/4)+\sqrt{2}(3\pi/4))^8 = \sqrt{2}^8(\cos(8\cdot 3\pi/4)+\sin(8\cdot 3\pi/4)) = 16(\cos(6\pi)+i\sin(6\pi)) = 16.$$

Sýnidæmi 6.1.4
a) Finnið allar fimmtu rætur af 1.
Lausn: Lengd allra fimmtu rótanna hlýtur er einn. Þá viljum við finna öll θ á bilinu $[0,2\pi[$ þ.a. $\cos(5\theta) = 1$, en það eru þau θ á bilinu þannig að $5\theta = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, þ.e. $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$. Það eru sem sagt möguleg stefnuhorn. Þá höfum við pólhnit allra fimmtu rótanna.
b) Finnið allar fimmtu rætur $(16-16i)$.
Lausn: Við byrjum á því að finna eina fimmtu rót. Stefnuhorn $(16-16i)$ er $\frac{7\pi}{4}$ og lengd tölunnar er $16\sqrt{2}$. Þá fáum við fimmtu rótina $\sqrt[5]{16\sqrt{2}}(\cos(7\pi/4\cdot 5)+i\sin(7\pi/4\cdot 5)) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{20}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{20}\right)\right)$. Með því að margfalda þessa lausn með mismunandi fimmtu einingarrótunum fáum við allar fimmtu ræturnar:

$$\sqrt{2}\left(\cos(7\pi/20+\frac{2k\pi}{5})+i\sin(7\pi/20+\frac{2k\pi}{5})\right), \quad k = 0,1,2,3,4.$$

Margliður með tvinntölustuðla

Við getum skilgreint margliður með tvinntölustuðulum á nákvæmlega sama hátt og fyrr, en það eru stærðtákn af gerðinni

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

þar sem $a_0, \ldots, a_n$ eru tvinntölur, $a_n \neq 0$ og z er breyta sem tekur gildi í tvinntölunum. Við getum litið á P sem fall sem skilgreint er á $\mathbb{C}$ og tekur gildi í $\mathbb{C}$. Talan n kallst þá eins og áður stig margliðunnar.

Tvinntala α er sögð vera *núllstöð* eða *rót* margliðunnar P ef $P(\alpha) = 0$.

Núllstöðvar annars stigs margliðu

Nú viljum við leysa jöfnuna $az^2 + bz + c = 0$ og ganga út frá því að stuðlarnir a, b og c séu tvinntölur og að $a \neq 0$. Þetta er gert nánast eins og fyrir rauntölur, en niðurstaðan verður almennari.
Fyrsta verkið er að deila báðum hliðum með a og fá þannig jafngilda jöfnu $z^2 + Bz + C = 0$, þar sem $B = b/a$ og $C = c/a$. Næsta skref er að líta á tvo fyrstu liðina $z^2 + Bz$ og skrifa þá sem ferning að viðbættum fasta. Með orðinu ferningur er átt við fyrsta stigs stærðtákn í öðru veldi, $(z + \alpha)^2$. Ferningsreglan fyrir summu segir að $(z + \alpha)^2 = z^2 + 2\alpha z + \alpha^2$. Því er

$$0 = z^2 + Bz + C = \left(z + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + C.$$

Þetta segir okkur að upphaflega jafnan jafngildi

$$0 = (az^2 + bz + c)/a = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}.$$

Með því að draga töluna $-b^2/(4a^2) + c/a$ frá báðum hliðum, þá fáum við jafngilda jöfnu

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Tvinntalan $D = b^2 - 4ac$ nefnist *aðgreinir* eða *aðskilja* jöfnunnar. Ef $D \neq 0$, þá hefur D tvær kvaðratrætur. Látum $\sqrt{D}$ tákna aðra þeirra. Þá er hin jöfn $-\sqrt{D}$ og við fáum tvær ólíkar lausnir

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad \text{og} \qquad z_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Ef $D = 0$, fæst ein lausn

$$z = \frac{-b}{2a}.$$

Í sértilfellinu þegar $D \in \mathbb{R}$ og $D < 0$ þá getum við alltaf valið kvaðratrót $\sqrt{D} = i\sqrt{|D|}$ og lausnarformúlan verður

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a} \qquad \text{og} \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Munið að ef α er jákvæð rauntala, þá táknar $\sqrt{\alpha}$ alltaf jákvæðu töluna sem uppfyllir $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$. Að sjálfsögðu er $\sqrt{0} = 0$. Ef $\alpha \neq 0$ er tvinntala og α er ekki jákvæð rauntala, þá er hefur $\sqrt{\alpha}$ enga staðlaða merkingu. Við vitum bara að það eru til tvær tvinntölur β og γ sem eru kvaðratrætur α og um þær gildir að $\gamma = -\beta$.

Meginsetning algebrunnar

Við byrjuðum á því að innleiða tvinntölurnar með það fyrir augum að geta leyst jöfnur sem hafa engar rauntölulausnir. Meginsetning algebrunnar segir að sérhver margliða af stigi ≥ 1 með tvinntölustuðlum hafi núllstöð í $\mathbb{C}$. Það er því ekki hægt að segja annað en að útvíkkun talnakerfisins frá rauntölum yfir í tvinntölur sé vel heppnuð. Sönnunin á meginsetningunni krefst töluverðrar þekkingar í stærðfræðigreiningu og er venjulega kennd á öðru ári í háskóla.

Við skulum taka meginsetninguna trúanlega og athuga nokkrar merkilegar afleiðingar hennar. Margliðudeiling er eins fyrir margliður með tvinntölustuðla og margliður með rauntölustuðla. Ef við tökum margliðu P af stigi $m \geq 1$ og deilum $(z-\alpha)$ upp í hana, þá fáum við

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) + C$$

þar sem Q er margliða af stigi $m-1$ og C er tvinntala. Með því að setja $z = \alpha$ inn í jöfnuna, þá sjáum við að $C = P(\alpha)$. Þetta gefur okkur þáttaregluna sem segir að $(z-\alpha)$ gangi upp í margliðunni $P(z)$ þá og því aðeins að α sé núllstöð P.
Segjum nú að α sé núllstöð í P og að stigið sé $m \geq 2$. Þá er Q af stigi $m-1$ og samkvæmt meginsetningunni hefur Q núllstöð β. Við þáttum Q með $z-\beta$ og fáum þannig $P(z) = (z-\alpha)(z-\beta)R(z)$ þar sem R er margliða af stigi $m-2$. Þessu er unnt að halda áfram þar til við endum með fullkomna þáttun á P í fyrsta stigs liði

$$P(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_m)$$

þar sem $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ er upptalning á öllum núllstöðvum með hugsanlegum endurtekningum og $A \neq 0$ er tvinntala.

Margliður með rauntölustuðla

Við lítum allaf á rauntölurnar sem hluta af tvinntölunum og því er sérhver margliða með rauntölustuðla jafnframt margliða með tvinntölustuðla. Meginsetning algebrunnar á því einnig við um þessar margliður. Hugsum okkur nú að $P(z)$ sé margliða af stigi $m \geq 1$ með rauntölustuðla $a_0, \dots, a_m$ og að $\alpha \in \mathbb{C}$ sé núllstöð hennar og gerum ráð fyrir að α sé ekki rauntala. Með því að beita reiknireglunum fyrir samok og þá sérstaklega að $\bar{a}_j = a_j$, þá fáum við

$$0 = P(\alpha) = \overline{P(\alpha)} = \overline{\sum_{k=0}^{m} a_k \alpha^k} = \sum_{k=0}^{m} \overline{a_k} \overline{\alpha}^k = \sum_{k=0}^{m} a_k (\overline{\alpha})^k = P(\bar{\alpha}).$$

Við höfum því sýnt að $\bar{\alpha}$ er einnig núllstöð P. Við getum því þáttað út $(z-\alpha)$ og $(z-\bar{\alpha})$. Athugum að

$$(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha+\bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 - 2(\Re\alpha)z + |\alpha|^2.$$

Nú beitum við þáttareglunni og sjáum að í þessu tilfelli fæst þáttun á $P(z)$ í tvær rauntalnamargliður

$$P(z) = \left(z^2 - 2(\Re\alpha)z + |\alpha|^2\right)Q(z).$$

Sýnidæmi 6.2.1
Finnið allar rætur margliðunnar $x^2 - 2 + 5$.
Lausn: Hér notum við lausnarformúlu annrs stigs jöfnu beint, lausnirnar verða

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i.$$

Sýnidæmi 6.2.2
Leysið jöfnuna $ix^2 + 2x + 2 + 2i = 0$.
Lausn: Við setjum beint inn í lausnarformúlu annars-stigs jöfnu. Fáum lausnirnar

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4i(2+2i)}}{2i} = \frac{-2 \pm \sqrt{12-8i}}{2i} = \frac{-2}{2i} \pm \sqrt{\frac{12-8i}{(2i)^2}} = i \pm \sqrt{2i-3}.$$

Útvíkkun veldivísisfallsins

Við höfum séð hvernig skilgreiningarmengi margliða er útvíkkað frá því að vera rauntalnaásinn $\mathbb{R}$ yfir í það að vera allt tvinntalnaplanið $\mathbb{C}$. Þetta er hægt að gera á eðlilegan máta fyrir mörg föll sem skilgreind eru á hlutmengjum á rauntalnalínunni þannig að þau fái náttúrlegt skilgeiningarsvæði í $\mathbb{C}$.
Veldisvísisfallið $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er andhverfa náttúrlega lograns sem skilgreindur er með heildinu

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \qquad x > 0.$$

Talan e er skilgreind með $e = \exp(1)$. Nú útvíkkum við skilgreiningarsvæði exp þannig að það verði allt $\mathbb{C}$ með formúlunni

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Jöfnur Eulers

Stingum nú hreinni þvertölu $i\theta$ þar sem $\theta \in \mathbb{R}$ inn í veldisvísisfallið $e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{T}$. Þetta segir okkur að vörpunin $\theta \mapsto e^{i\theta}$ varpi rauntalnalínunni á einingarhringinn.
Stillum nú upp tveimur jöfnum

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta, \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta. \end{aligned}$$

Tökum nú summu af hægri hliðum og vinstri hliðum. Þá fæst $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$. Tökum síðan mismun af því sama. Þá fæst $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$. Út úr þessu fæst samband milli veldisvísisfallsins og hornafallanna sem nefnt er *jöfnur Eulers*,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{aligned}$$

Samlagningarformúla veldisvísisfallsins

Munum að veldisvísisfallið $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$, uppfyllir regluna $e^{a+b} = e^a e^b$ fyrir allar rauntölur a og b. Þessi regla er nefnd *veldaregla* eða *samlagningarregla* veldisvísisfallsins. Nú skulum við taka tvær tvinntölur $z = x + iy$ og $w = u + iv$ og sjá hvernig þessi regla alhæfist þegar við erum búin að framlengja skilgreiningarsvæði veldisvísisfallsins yfir í allt tvinntalnaplanið $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x(\cos y + i\sin y)e^u(\cos v + i\sin v) \\ &= (e^x e^u)(\cos y + i\sin y)(\cos v + i\sin v) \\ &= e^{x+u}(\cos(y+v) + i\sin(y+v)) \\ &= e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{(x+iy)+(u+iv)} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Við höfum því að samlagningarformúlan fyrir veldisvísisfallið gildir áfram eftir að það hefur verið framlengt yfir á allt tvintalnaplanið $\mathbb{C}$.

Sýnidæmi 10.9.1
Reiknið $e^{\ln(5)+\frac{i\pi}{3}}$.
Lausn: Við setjum þetta beint inn í formúlu og fáum

$$e^{\ln(5)+\frac{i\pi}{3}} = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5+5\sqrt{3}i}{2}.$$

Sýnidæmi 10.9.2
Notið formúlur Eulers til að einfalda $\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(2\theta)$.
Lausn: Notum formúlur Eulers. Fáum

$$\begin{aligned}\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(2\theta) &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}\\ &= \frac{(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})}{8i} = \frac{e^{4i\theta}-e^{-4i\theta}}{8i} = \frac{\sin(4\theta)}{4}.\end{aligned}$$

Línulegt jöfnuhneppi

Látum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vera óþekktar stærðir. Jafna af gerðinni $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ þar sem $a_1, a_2, \ldots, a_n, c$ eru einhverjar tölur kallast *línuleg jafna*, og ef við höfum margar slíkar jöfnur fyrir óþekktu stærðirnar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ þá kallast þær saman *línulegt jöfnuhneppi*.
Ef $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eru tölur þ.a. $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = c$ þá segjum við að $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sé *lausn* á jöfnunni, og mengi allra slíkra lausna $\{(b_1, b_2, \ldots, b_n) : a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = c\}$ kallast *lausnamengi jöfnunnar*.
Fyrir gefið jöfnuhneppi kallast stak $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sem er lausn á öllum jöfnum hneppisins *lausn á jöfnuhneppinu* og mengi allra slíkra lausna kallast *lausnamengi jöfnuhneppisins*.
Að finna allar lausnir á jöfnuhneppi kallast að *leysa jöfnuhneppið*.

Lausnir á línulegum jöfnuhneppum

Sú aðferð sem mest er notuð við að leysa línuleg jöfnuhneppi kallast *Gauss-eyðing*. Aðferðin er ekki ýkja flókin og gengur í stuttu máli út á að fækka óþekktu breytistærðunum í jöfnum hneppisins þar til auðvelt er orðið að lesa út lausnamengi þess. Aðferðin er best útskýrð með dæmi:
Sýnidæmi: Finnum lausnamengi eftirfarandi jöfnuhneppis:

$$\begin{aligned} 6x+3y+z &= 10 \quad &(1)\\ 2x-y+2z &= 3 \quad &(2)\\ x+y+z &= 3. \quad &(3)\end{aligned}$$

Byrjum á að margfalda jöfnu (2) með 3 og jöfnu (3) með 6 og fáum þá:

$$\begin{aligned} 6x+3y+z &= 10 \quad &(1)\\ 6x-3y+6z &= 9 \quad &(2)\\ 6x+6y+6z &= 18. \quad &(3)\end{aligned}$$

Drögum nú jöfnu (1) frá jöfnum (2) og (3). Þar með höfum við eytt óþekktu stærðinni x út úr jöfnum (2) og (3):

$$
\begin{aligned}
6x+3y+z&=10 && (1)\\
-6y+5z&=-1 && (2)\\
3y+5z&=8. && (3)
\end{aligned}
$$

Margföldum nú jöfnu (3) með 2 og fáum:

$$
\begin{aligned}
6x+3y+z&=10 && (1)\\
-6y+5z&=-1 && (2)\\
6y+10z&=16. && (3)
\end{aligned}
$$

Leggjum nú jöfnu (2) við jöfnu (3). óþekktu stærðinni y hefur þá verið eytt úr jöfnu (3):

$$
\begin{aligned}
6x+3y+z&=10 && (1)\\
-6y+5z&=-1 && (2)\\
15z&=15. && (3)
\end{aligned}
$$

Nú er ljóst út frá jöfnu (3) að eina gildið sem óþekkta breytistærðin z getur tekið sem gefur lausn á hneppinu er $z=1$. Við getum því sett $z=1$ í jöfnur (1) og (2). Við fáum þá út jöfnurnar:

$$
\begin{aligned}
6x+3y+1&=10 && (1)\\
-6y+5&=-1. && (2)
\end{aligned}
$$

Jafna (2) gefur nú að eina gildið sem óþekkta breytistærðin y getur tekið sem gefur lausn á hneppinu er $y=1$. Setjum því $y=1$ í jöfnu (1) og fáum:

$$
6x+3+1=10. \qquad (1)
$$

Þessi jafna gefur okkur nú að $x=1$ og við höfum þar með sýnt að jöfnuhneppið hefur aðeins lausnina $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Sýnidæmi 3.5.1

Leysið jöfnuhneppið

$$
\begin{aligned}
4a+2b-c&=2,\\
a-b+c&=12,\\
a+b+c&=5.
\end{aligned}
$$

Lausn: Við byrjum á að leggja neðri tvær jöfnurnar saman, þá fáum við $2a+2c=17$ sem gefur $c=\frac{17}{2}-a$.

Við leggjum síðan jöfnuna í miðjunni tvisvar við efstu jöfnuna og fáum $6a+c=26$. Við stingum inn $\frac{17}{2}-a$ inn fyrir c. Nú gildir:

$$
6a+\frac{17}{2}-a=5a+\frac{17}{2}=26 \iff 5a=\frac{35}{2} \iff a=\frac{7}{2}.
$$

Þegar a er ákvarðað finnum við c með $c=\frac{17}{2}-a=\frac{17-7}{2}=5$. Með því að stinga því svo inn í síðustu jöfnuna jöfnuna fáum við $b=5-c-a=-a=\frac{-7}{2}$. Þá er lausn jöfnuhneppisins

$$
a=\frac{7}{2}, \quad b=\frac{-7}{2}, \quad c=5.
$$