FÖLL

Þorsteinn Hjörtur Jónsson

6. ágúst 2015

Verkfræði- og raunvísindasvið Háskóla Íslands

EFNISYFIRLIT

INNGANGUR

Þessar glærur og tilheyrandi nótur voru samdar fyrir fyrirlestur sem haldinn var fyrir nýnema Verkfræði- og raunvísindasviðs Háskóla Íslands þann 7. ágúst 2015. Efni fyrirlestursins eru nokkur grunnhugtök í stærðfræði, mengi varpanir og raunföll, sem fjallað er um með hæfilegri stærðfræðilegri rökfestu. Lögð er áhersla á að byggja upp innsæi og taka lýsandi dæmi.

Allar ábendingar um það sem betur mætti fara eru vel þegnar. Vinsamlegast sendið þær til thj92@hi.is.

Skilgreining: *Mengi* er hvers konar safn ólíkra ”hluta”.

Skilgreining: *Mengi* er hvers konar safn ólíkra ”hluta”.

Þeir ”hlutir”sem mengi inniheldur eru kallaðir *stök* þess.

Skilgreining: *Mengi* er hvers konar safn ólíkra ”hluta”.

Þeir ”hlutir”sem mengi inniheldur eru kallaðir *stök* þess.

Ef A er mengi og x er stak í menginu A, þá ritum við

$$x \in A$$

Skilgreining: *Mengi* er hvers konar safn ólíkra ”hluta”.

Þeir ”hlutir”sem mengi inniheldur eru kallaðir *stök* þess.

Ef A er mengi og x er stak í menginu A, þá ritum við

$$x \in A$$

Aftur á móti ef x er ekki eitt af stökum A, þá ritum við

$$x \notin A.$$

- $\mathbb{N}$: Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$

- $\mathbb{N}:$ Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z}:$ Mengi heilla talna
  $\mathbb{Z} = \{... -1, 0, 1, 2, ...\}$

- $\mathbb{N}$: Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z}$: Mengi heilla talna
  $\mathbb{Z} = \{... -1, 0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Q}$: Mengi ræðra talna („almenn brot“)
  $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$

MIKILVÆG MENGI

- $\mathbb{N}$: Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z}$: Mengi heilla talna
  $\mathbb{Z} = \{... -1, 0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Q}$: Mengi ræðra talna („almenn brot“)
  $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$
- $\mathbb{R}$: Mengi rauntalna
  $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$

- $\mathbb{N}$: Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z}$: Mengi heilla talna
  $\mathbb{Z} = \{... - 1, 0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Q}$: Mengi ræðra talna („almenn brot“)
  $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$
- $\mathbb{R}$: Mengi rauntalna
  $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$
- $\mathbb{C}$: Mengi tvinntalna

- $\mathbb{N}$: Mengi náttúrulegra talna (jákvæðar heiltölur)
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z}$: Mengi heilla talna
  $\mathbb{Z} = \{... -1, 0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Q}$: Mengi ræðra talna („almenn brot“)
  $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$
- $\mathbb{R}$: Mengi rauntalna
  $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$
- $\mathbb{C}$: Mengi tvinntalna

Ef við erum með tvö mengi, A og B hvernig gætum við skilgreint samband þessara mengja?

Ef við erum með tvö mengi, A og B hvernig gætum við skilgreint samband þessara mengja?

Ein leið væri að skilgreina tengsl á milli staka mengjanna.

Ef við erum með tvö mengi, A og B hvernig gætum við skilgreint samband þessara mengja?

Ein leið væri að skilgreina tengsl á milli staka mengjanna.

Vörpun er samband tveggja mengja, formengis og bakmengis , sem tengir sérhvert stak í formenginu nákvæmlega einu staki í bakmenginu.

Ef við erum með tvö mengi, A og B hvernig gætum við skilgreint samband þessara mengja?

Ein leið væri að skilgreina tengsl á milli staka mengjanna.

Vörpun er samband tveggja mengja, formengis og bakmengis , sem tengir sérhvert stak í formenginu nákvæmlega einu staki í bakmenginu.

Ef f er vörpun með formengi A og bakmengi B skrifum við

$$f : A \to B$$

Myndmengi vörpunarinnar f er mengi allra staka $y \in B$ þ.a. til sé stak $x \in A$ sem uppfyllir $f(x) = y$.

Við táknum myndmengið með $f(A)$.

FÖLL

Varpanir sem hafa talnamengi fyrir bakmengi kallast *föll* og eru afar mikilvæg í stærðfræðigreiningu.

FÖLL

Varpanir sem hafa talnamengi fyrir bakmengi kallast *föll* og eru afar mikilvæg í stærðfræðigreiningu.

Þegar talað er um *raunföll* er átt við föll með bakmengi og formengi sem eru hlutmengi í $\mathbb{R}$.

1. Látum $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2\}$ vera mengi. Hver eftirtalinna eru varpanir?
    1.1 $f : A \to B$ þar sem $b_1 = f(a_1)$ og $b_2 = f(a_2) = f(a_3)$
    1.2 $f : A \to B$ þar sem $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$ og $f(a_2)$ er ekki til
    1.3 $f : B \to A$ þar sem $a_1 = f(b_1), a_2 = f(b_2)$ og $a_3 = f(b_2)$
    1.4 $f : B \to A$ þar sem $a_1 = f(b_1)$ og $a_3 = f(b_2)$
2. Hver eru formengi, bakmengi og myndmangi eftirfarandi falla?
    2.1 Fallið f í (a)-lið í síðasta dæmi
    2.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)$
    2.3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = 2$

EINTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er eintækt (one-one, injective) ef fyrir öll $a, b \in A$ gildir:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Jafngild skilgreining er:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b).$$

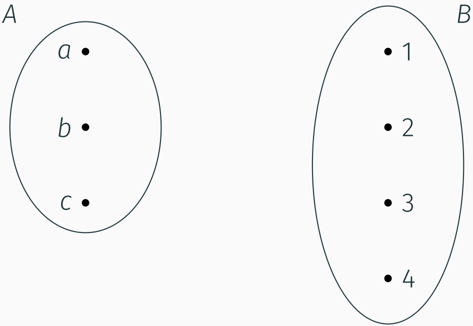
Eintækni

Fall $f : A \to B$ er eintækt (one-one, injective) ef fyrir öll $a, b \in A$ gildir:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Jafngild skilgreining er:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b).$$



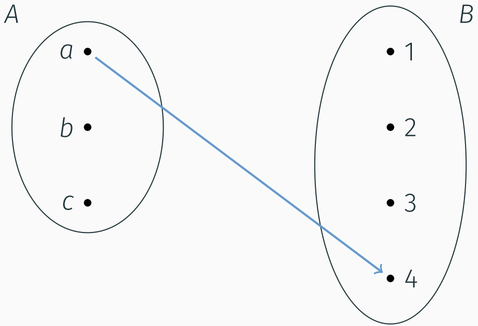
EINTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er eintækt (one-one, injective) ef fyrir öll $a, b \in A$ gildir:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Jafngild skilgreining er:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b).$$



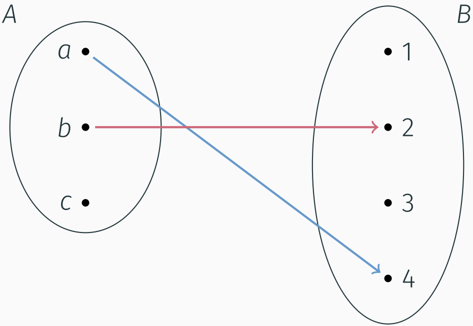
EINTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er eintækt (one-one, injective) ef fyrir öll $a, b \in A$ gildir:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Jafngild skilgreining er:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b).$$

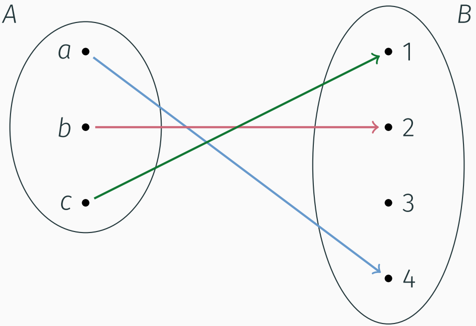


Fall $f : A \to B$ er eintækt (one-one, injective) ef fyrir öll $a, b \in A$ gildir:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Jafngild skilgreining er:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b).$$



ÁTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

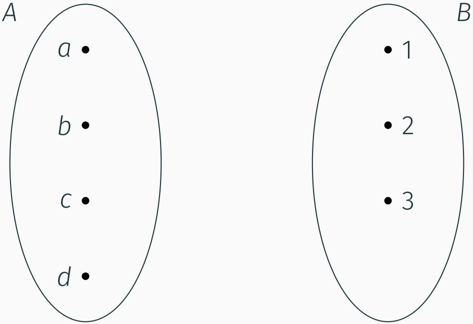
.

ÁTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

.

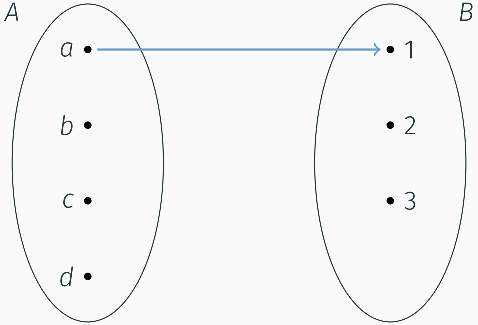


ÁTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

.

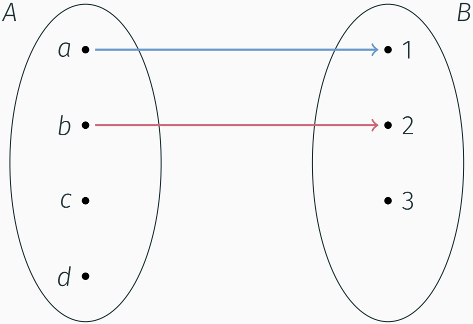


ÁTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

.

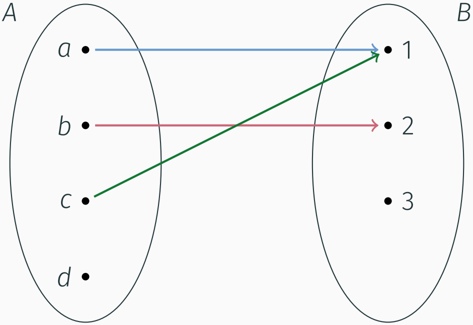


ÁTÆKNI

Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

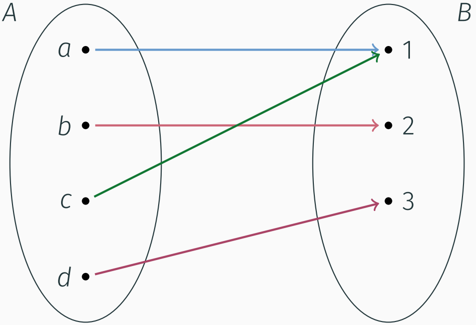
.



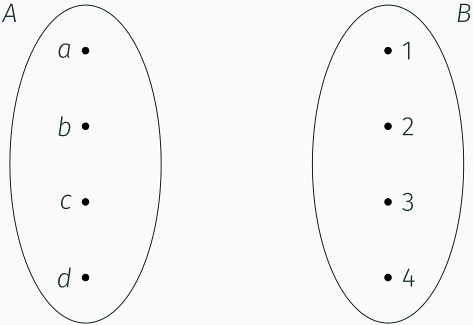
Fall $f : A \to B$ er átækt (onto, surjective) ef fyrir sérhvert stak $y \in B$ er til stak $x \in A$ þ.a. $f(x) = y$. Þessi fullyrðing jafngildir því að f sé átækt ef

$$f(A) = B$$

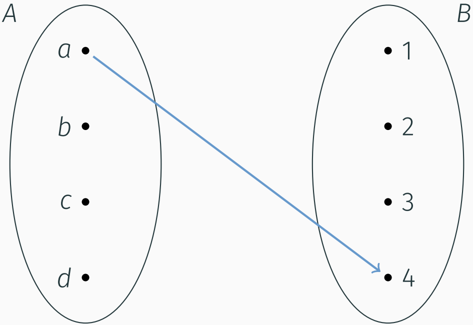
.



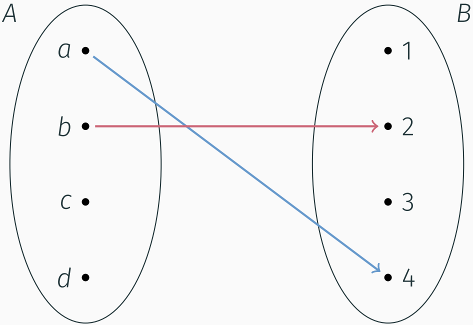
Fall f er gagntækt ef það er bæði eintækt og átækt.



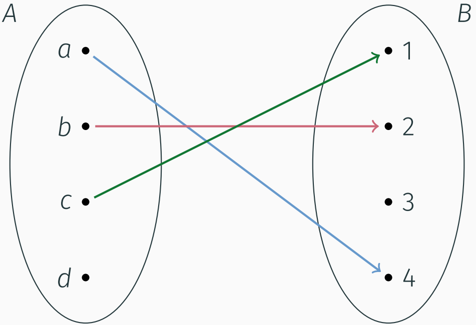
Fall f er gagntækt ef það er bæði eintækt og átækt.



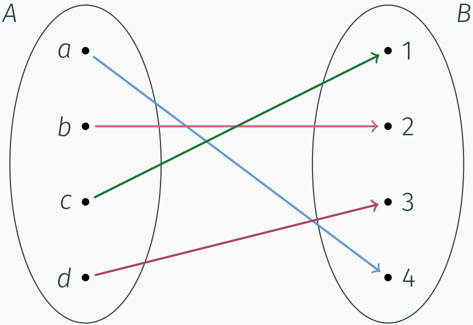
Fall f er gagntækt ef það er bæði eintækt og átækt.



Fall f er gagntækt ef það er bæði eintækt og átækt.



Fall f er gagntækt ef það er bæði eintækt og átækt.



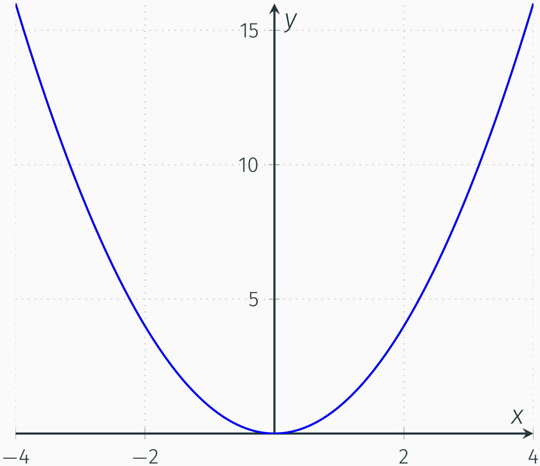
SÝNIDÆMI

Er fallið eintækt? Er fallið átækt?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{með} \quad f(x) = x^2$$

Er fallið eintækt? Er fallið átækt?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{með} \quad f(x) = x^2$$



Segið til um hvort eftirfarandi föll séu eintæk, átæk, gagntæk eða ekkert af þessu:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x^2$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -11x$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -4$
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^3 + 1$

Látum f vera fall með mengið A sem formengi og mengið B sem bakmengi.

Látum f vera fall með mengið A sem formengi og mengið B sem bakmengi.

Við segjum að f sé andhverfanlegt ef til er fall g með formengi B og bakmengi A þ.a.

$$f(x) = y \text{ ef og aðeins ef } g(y) = x$$

Látum f vera fall með mengið A sem formengi og mengið B sem bakmengi.

Við segjum að f sé andhverfanlegt ef til er fall g með formengi B og bakmengi A þ.a.

$$f(x) = y \text{ ef og aðeins ef } g(y) = x$$

Ef slíkt fall g er til þá er það ótvírætt ákvarðað.

Látum f vera fall með mengið A sem formengi og mengið B sem bakmengi.

Við segjum að f sé andhverfanlegt ef til er fall g með formengi B og bakmengi A þ.a.

$$f(x) = y \text{ ef og aðeins ef } g(y) = x$$

Ef slíkt fall g er til þá er það ótvírætt ákvarðað.

Fallið g kallast andhverfa fallsins f og við táknum það með f^{-1}.

Látum $f(x) = (2x + 8)^3$

Finnum andhverfu f.

SÝNIDÆMI

Látum $f(x) = (2x + 8)^3$

Finnum andhverfu f.

Ein leið til að finna andhverfu falls ef hún er til er að leysa jöfnuna $y = f(x)$ fyrir x.

Finnið andhverfur eftirfarandi falla:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -11x$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x+2}{3}$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^3 + 1$

MARGLIÐUR

Látum $f(x) = a$, þ.a. $a \in \mathbb{R}$

0. stigs margliður

Látum $f(x) = a$, þ.a. $a \in \mathbb{R}$

Við segjum að $f(x)$ sé 0. stigs margliða eða fastafall.

0. stigs margliður

Látum $f(x) = a$, þ.a. $a \in \mathbb{R}$

Við segjum að $f(x)$ sé 0. stigs margliða eða fastafall.

Látum $f(x) = a_1x + a_0$, þ.a. $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

1. STIGS MARGLIÐUR

Látum $f(x) = a_1 x + a_0$, þ.a. $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

Við segjum að $f(x)$ sé 1. stigs margliða eða lína.

Látum $f(x) = a_1x + a_0$, þ.a. $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

Við segjum að $f(x)$ sé 1. stigs margliða eða lína.

Látum $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad \text{fyrir} \quad i = 0, 1, 2$

Látum $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad$ fyrir $\quad i = 0, 1, 2$

Við segjum að $f(x)$ sé 2. stigs margliða eða fleygbogi.

Látum $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad$ fyrir $\quad i = 0, 1, 2$

Við segjum að $f(x)$ sé 2. stigs margliða eða fleygbogi.

Látum $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad \text{fyrir} \quad i = 0, 1, 2$

Látum $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad$ fyrir $\quad i = 0, 1, 2$

Við segjum að $f(x)$ sé 3. stigs margliða eða fleygbogi.

Látum $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, þ.a. $a_i \in \mathbb{R} \quad \text{fyrir} \quad i = 0, 1, 2$

Við segjum að $f(x)$ sé 3. stigs margliða eða fleygbogi.

Margliða af stigi n er fall af gerðinni:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

þar sem n er endanlegt $a_i \in \mathbb{R}, \forall i$ og $a_n \neq 0$.

Talan n kallast stig margliðunnar, og tölurnar a_i kallast stuðlar hennar.

Af hvaða stigi eru eftirfarandi margliður?

- $x^2 + x - 3x^4 + 1$
- $15x^5 + 2x - 8x^3 + x^{14} - x^2 + 100$
- $x^n + x^{2n}$ þar sem $n \in \mathbb{N}$

Ræð raunföll eru föll af gerðinni,
$f : A \to B$

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Þar sem P og Q eru margliðuföll.

Ræð raunföll eru föll af gerðinni,
$f : A \to B$

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Þar sem P og Q eru margliðuföll.

Núllstöðvar $Q(x)$ nefnast skaut fallsins f.

Ræð raunföll eru föll af gerðinni,
$f : A \to B$

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Þar sem P og Q eru margliðuföll.

Núllstöðvar $Q(x)$ nefnast skaut fallsins f.

Látum A og B vera hlutmengi í $\mathbb{R}$ og $f : A \to B$ vera fall.

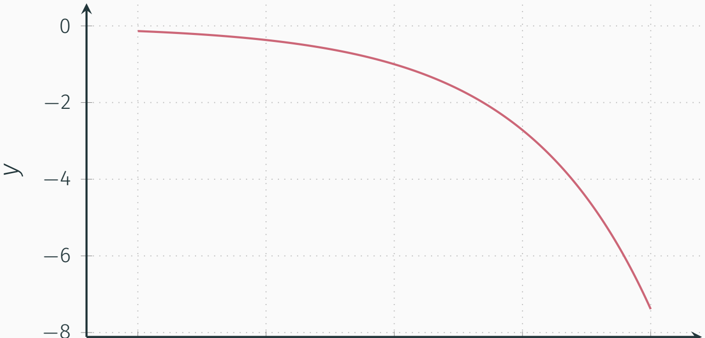
Látum A og B vera hlutmengi í $\mathbb{R}$ og $f : A \to B$ vera fall.
Fallið f er sagt vera *vaxandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Látum A og B vera hlutmengi í $\mathbb{R}$ og $f : A \to B$ vera fall.
Fallið f er sagt vera *vaxandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Ef ströng ójafna gildir $\big(f(x_1) < f(x_2)\big)$ fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* vaxandi.

Látum A og B vera hlutmengi í $\mathbb{R}$ og $f : A \to B$ vera fall.
Fallið f er sagt vera *vaxandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Ef ströng ójafna gildir $(f(x_1) < f(x_2))$ fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* vaxandi.

Fallið f er sagt vera *minnkandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \geq f(x_2)$.

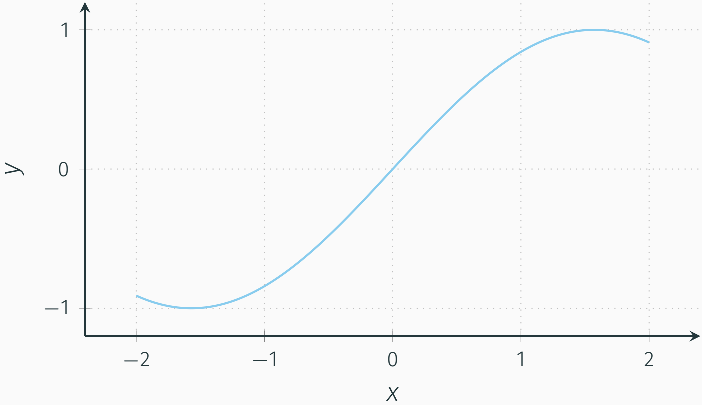
Fallið f er sagt vera *minnkandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Ef ströng ójafna gildir $(f(x_1) > f(x_2))$ fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* minnkandi.



Fallið f er sagt vera *minnkandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Ef ströng ójafna gildir $(f(x_1) > f(x_2))$ fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* minnkandi. Fall sem er annað hvort vaxandi eða minnkandi er sagt vera einhalla.

Ef fallið er stranglega vaxandi eða stranglega minnkandi er það sagt vera stranglega einhalla.

HVORKI VAXANDI NÉ MINNKANDI FALL



Skilgreining: Fall f er

- jafnstætt (even) ef $f(-x) = f(x), \quad \forall x$ í formengi f

Skilgreining: Fall f er

- jafnstætt (even) ef $f(-x) = f(x), \quad \forall x$ í formengi f
- oddstætt (odd) ef $f(-x) = -f(x), \quad \forall x$ í formengi f

Skilgreining: Fall f er

- jafnstætt (even) ef $f(-x) = f(x), \quad \forall x$ í formengi f
- oddstætt (odd) ef $f(-x) = -f(x), \quad \forall x$ í formengi f

$f(x) = 2x$, skilgreint fyrir $x \in \mathbb{R}$, er oddstætt

Skilgreining: Fall f er

- jafnstætt (even) ef $f(-x) = f(x), \quad \forall x$ í formengi f
- oddstætt (odd) ef $f(-x) = -f(x), \quad \forall x$ í formengi f

$f(x) = 2x$, skilgreint fyrir $x \in \mathbb{R}$, er oddstætt
Höfum $f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x)$

$f(x) = x^2$ er jafnstætt

Skilgreining:
Fall af gerðinni $f(x) = a^x$, þar sem $a \in \mathbb{R}$, kallast veldisvísisfall með grunntölu a.

Skilgreining:
Fall af gerðinni $f(x) = a^x$, þar sem $a \in \mathbb{R}$, kallast veldisvísisfall með grunntölu a.

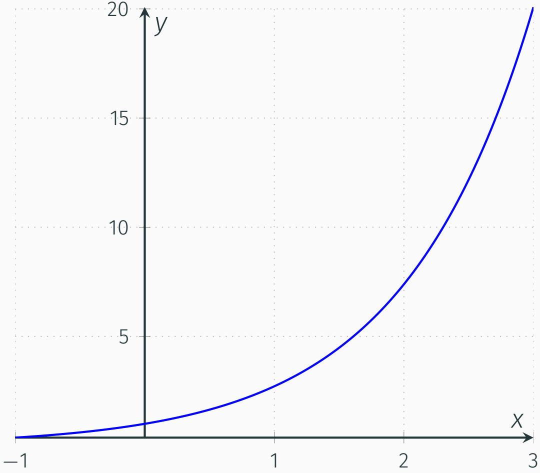
Skilgreining:
Fall sem er andhverfa veldisvísisfalls með grunntölu a, kallast lografall (eða logri) með grunntölu a og er táknað með $\log_a(x)$.

Skilgreining:
Fall af gerðinni $f(x) = a^x$, þar sem $a \in \mathbb{R}$, kallast veldisvísisfall með grunntölu a.

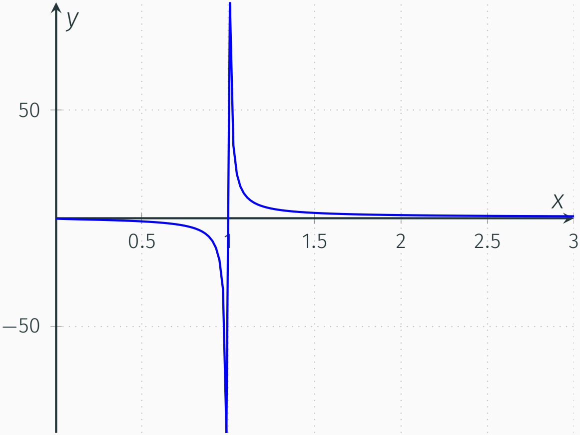
Skilgreining:
Fall sem er andhverfa veldisvísisfalls með grunntölu a, kallast lografall (eða logri) með grunntölu a og er táknað með $\log_a(x)$.

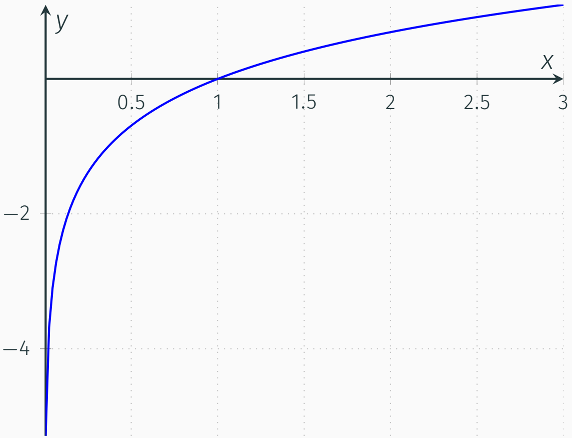
Með öðrum orðum, þá er logri tölunnar x með grunntölu a það veldi b sem þarf að hefja a í til þess að fá út x, þ.e. sú tala b sem uppfyllir: $a^b = x$ Þar sem föllin eru andhverfur höfum við:

$$\log_a(a^x) = a^{\log_a(x)} = x.$$



20
15
10
5
y
x
−1
1
2
3


y
50
−50
x
0.5
1
1.5
2
2.5
3



y
x
0.5
1
1.5
2
2.5
3
−2
−4

Skilgreining:
Fallið

$$f(x) = e^x$$

þar sem e er tala Eulers, $e \simeq 2.718$, kallast náttúrulega veldisvísisfallið.

Skilgreining:
Fallið

$$f(x) = e^x$$

þar sem e er tala Eulers, $e \simeq 2.718$, kallast náttúrulega veldisvísisfallið.

Skilgreining:
Andhverfa náttúrulega veldisvísisfallsins kallast náttúrulegi logrinn og er táknað með $\ln(x)$.

Tökum tvö föll $f : A \to B$ og $g : C \to D$. Gerum ráð fyrir að

$$g(C) \subset A$$

(þ.e. öll $g(x)$ eru í formengi f).
Skilgreinum samsetta (composite) fallið $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Látum $g(x) = \sin x$ og $f(x) = x^2$

Dæmi

Látum $g(x) = \sin x$ og $f(x) = x^2$

Þá fæst:

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(x^2) = \sin(x^2)$$

Látum $g(x) = \sin x$ og $f(x) = x^2$

Þá fæst:

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(x^2) = \sin(x^2)$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f(\sin x) = \sin^2(x)$$

Látum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ þ.a. $f(x) := e^{x^3}$ og $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ þ.a. $g(x) := \ln(12x)$.

Látum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ þ.a. $f(x) := e^{x^3}$ og $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ þ.a. $g(x) := \ln(12x)$.

Hvað af eftirtöldu gildir þá um $g \circ f$?

- $g \circ f$ er gagntæk.
- $g \circ f$ er átæk en ekki eintæk.
- $g \circ f$ er eintæk en ekki átæk.

Grunnhornaföllin eru sínus og kósínus: $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Grunnhornaföllin eru sínus og kósínus: $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Látum $\mathbf{v}$ vera vigur af lengd 1 sem myndar hornið θ við jákvæða hluta x-ássins.

Grunnhornaföllin eru sínus og kósínus: $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

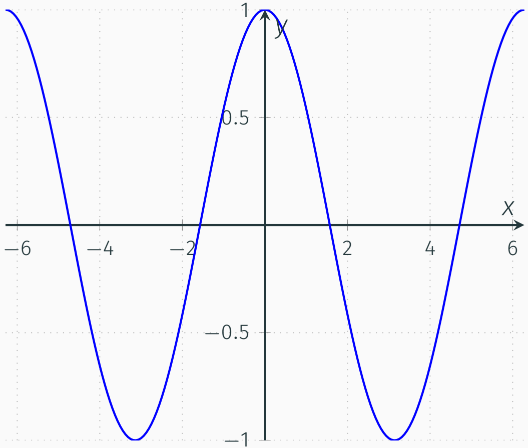
Látum **v** vera vigur af lengd 1 sem myndar hornið θ við jákvæða hluta *x*-ássins.

Þá er

- $\cos(\theta)$ skilgreint sem ofanvarp **v** á *x*-ásinn.
- $\sin(\theta)$ skilgreint sem ofanvarp **v** á *y*-ásinn.

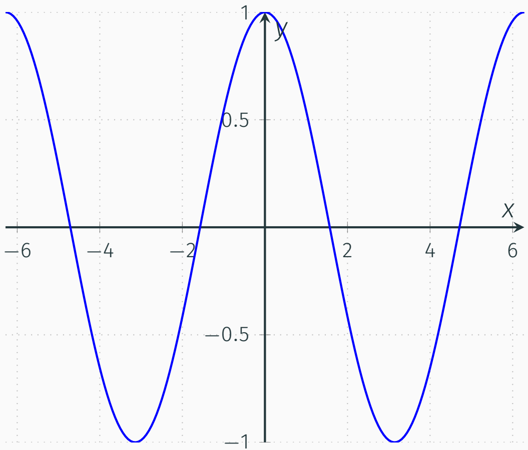
cos(x) er jafnstætt fall

- $g(x) = \cos(x)$



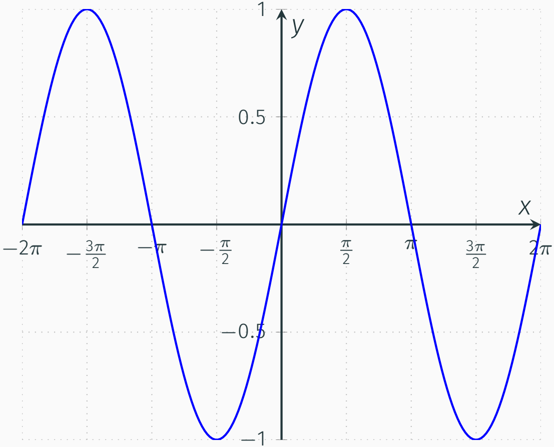
cos(x) er jafnstætt fall

- $g(x) = \cos(x)$



Graf jafnstæðs falls er **samhverft** um y-ás.

- $f(x) = \sin(x)$



Graf oddstæðs falls er **samhverft** um núllpunktinn.

Fyrirlestraröð fyrir nýnema VoN - Föll

Þorsteinn Hjörtur Jónsson og Arnbjörg Soffía Árnadóttir

7. ágúst 2015

1 Inngangur

Þessar nótur eru skrifaðar með nýnema Verk- og Náttúrufræðisviðs í Háskóla Íslands í huga. Nóturnar eru hugsaðar sem einföld upprifjun á mengjum og vörpunum, raunföllum sér í lagi.
Nótunum fylgir glærusafn skrifað í beamer pakkanum. Það er ósk höfundar að þetta efni muni nýtast sem flestum.
Hver sá sem vill nota nóturnar til kennslu en vill breyta textanum á einhvern hátt er frjálst að gera sitt eigið afrit. Það má senda tölvupóst á veffangið thor.h.jonsson@gmail.com til að fá .tex skrá.

2 Stiklað á stóru um mengi

Þessi texti inniheldur algjör grundvallaratriði um mengi sem við munum þurfa á að halda til að tala um föll. Það er mjög mikilvægt að gera sér grein fyrir því að föll eru skilgreind út frá mengjum. Hefjum leikinn á því að skilgreina mengi.

Skilgreining. Mengi *Mengi* er hvers konar safn ólíkra "hluta".

Þeir "hlutir"sem mengi inniheldur eru kallaðir *stök* þess. Ef A er mengi og x er stak í menginu A, þá ritum við

$$x \in A$$

Aftur á móti ef x er ekki eitt af stökum A, þá ritum við

$$x \notin A.$$

Takið eftir því að hugtakið mengi er ansi víðfeðmt. Við gætum talað um mengi bóka á plánetunni Jörð, mengi bíla á bílaplani eða mengi talna á talnabili. Mikilvægustu mengin í stærðfræðigreiningu eru talnamengi, mengi sem innihalda ekkert annað en tölur. Mengi ákvarðast algjörlega af stökum sínum. Það er að segja tvö mengi eru jafngild ef og aðeins ef[1] þau innihalda sömu stök. Við segjum að mengið A sé hlutmengi í menginu B ef öll stök í menginu A eru líka í menginu B.

Dæmi: Látum A vera bilið frá 0 upp í óendanlegt, látum B vera bilið frá 1 upp í óendanlegt.

[1]Orðasambandið „ef og aðeins ef" (eff) er mikilvægt í stærðfræði. Það hefur sömu merkingu og „þá og því aðeins að" (þ.þ.a.a), þ.e. það gefur nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði.

Bilið B er hlutmengi í bilinu A þar sem öll stökin í menginu B eru líka í menginu A.

Nokkur mengi sem er nauðsynlegt að þekkja eru:

1. Mengi náttúrlegra talna = $\mathbb{N} = \{(0), 1, 2, 3, \ldots\}$
2. Mengi heilla talna = $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$
3. Mengi ræðra talna = $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ og } q \neq 0\}$
4. Mengi rauntalna = $\mathbb{R}$
5. Mengi tvinntalna = $\mathbb{C}$

3 Samband mengja - Varpanir

Ef við erum með tvö mengi, A og B, hvernig gætum við skilgreint samband þessara mengja? Ein leið væri að skilgreina tengsl á milli staka mengjanna.

Vörpun er samband tveggja mengja, **formengis** og **bakmengis**, sem tengir sérhvert stak í skilgreiningarmenginu nákvæmlega einu staki í bakmenginu. Ef f er vörpun með formengi A og bakmengi B skrifum við

$$f : A \to B$$

til marks um það.

Athugum að sérhvert stak í A varpast í eitthvert stak í B, en þessu er ekki öfugt farið, þ.e. við getum haft stök í B sem engin stök í A varpast í með vörpuninni f. Athugum einnig að sérhvert stak í A getur einungis varpast í eitt stak í B, en hins vegar geta nokkur mismunandi stök í A varpast í sama stakið í B.

Dæmi um varpanir:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \quad f(z) = (x, y)$, þar sem $z = x + iy$
- $f : \{0\} \to \mathbb{N}, \quad f(0) = 0$
- $f : [0, \pi] \to [-1, 1], \quad f(x) = \cos(x)$

Föll

Varpanir sem hafa talnamengi fyrir bakmengi kallast *föll* og eru afar mikilvæg í stærðfræðigreiningu.

Þegar talað er um *raunföll* er átt við föll sem hafa bakmengi og formengi sem eru hlutmengi í $\mathbb{R}$. Ef við skoðum aftur varpanirnar hér að ofan, þá eru fyrsta, þrjðja og fjórða vörpunin raunföll.

4 Eintæk og átæk föll

Skilgreining. Látum $f : A \to B$ vera fall. *Myndmengi* fallsins f er mengi allra staka $y \in B$ þ.a. til sé stak $x \in A$ sem uppfyllir $f(x) = y$.
Við táknum myndmengið með $f(A)$.

Skilgreining. Fall $f : A \to B$ er *eintækt* (one-one, injective) ef

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Fall $f : A \to B$ er *átækt* (onto, surjective) ef B er myndmengi f, þ.e. ef

$$f(A) = B$$

.

Fall $f : D \to R$ er *gagntækt* (bijective) ef það er bæði eintækt og átækt.

Athugum að eintækni, átækni og gagntækni falla ákvarðast algerlega af formengjum og bakmengjum fallanna. Við getum til dæmis tekið hvaða fall sem er og gert það átækt með því að einskorða það við myndmengi sitt, þ.e. við skoðum fallið $f : A \to f(A)$ í stað $f : A \to B$.

Á sama hátt er oft hægt að einskorða fall við eitthvert hlutmengi í formenginu til þess að gera það eintækt, en þetta er yfirleitt ekki æskilegt, þar sem þetta getur breytt mikilvægum eiginleikum fallsins. Sem dæmi má nefna kósínusfallið sem er alls ekki eintækt, en er lotubundið. Ef við einskorðum það við bilið $[0, \pi]$ þá verður það eintækt, en ekki lengur lotubundið.

Dæmi um eintæk föll

- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3$
- $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \cos(x)$

Hins vegar eru föllin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ekki eintækt.

Dæmi um átæk föll

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x^2$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3$
- $h : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad h(x) = \cos(x)$

Hins vegar eru föllin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ekki átæk.

Dæmi um gagntæk föll

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad g(x) = e^x$

5 Andhverfur falla

Látum f vera fall með mengið X sem formengi og mengið Y sem bakmengi.

Við segjum að f sé andhverfanlegt ef til er fall g með formengi Y og bakmengi X þ.a.

$$f(x) = y \ \underline{\text{eff}} \ g(y) = x$$

Ef slíkt fall g er til þá kallast það *andhverfa* fallsins f, táknað f^{-1}, og er ótvírætt ákvarðað, þ.e. ef til er annað fall h sem er andhverfa f, þá er $h = g$.

Athugum að fall er andhverfanlegt eff það er gagntækt.

Dæmi um andhverfu falls

Látum $f(x) = (2x+8)^3$ og finnum andhverfu f. Ein leið til að finna andhverfu falls, ef hún er til, er að leysa jöfnuna $y = f(x)$ fyrir x. Þá fæst:

$$y = (2x+8)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = 2x+8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} - 8 = 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{y}-8}{2} = x$$

svo að andhverfa fallsins f er fallið g þ.a.

$$g(y) = \frac{\sqrt[3]{y}-8}{2}.$$

6 Margliður

Margliður eru þau föll sem við þekkjum hvað best og þær eru að mörgu leyti þægilegar að vinna með.

Margliða er fall af gerðinni:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

þar sem n er endanlegt $a_i \in \mathbb{R}, \forall i$ og $a_n \neq 0$.
Talan n kallast stig margliðunnar og a_i stuðlar hennar.

Skoðum lægstu þrjú stig margliða:

$n = 0$:

Núllta stigs margliða er á forminu $f(x) = a$ þar sem $a \in \mathbb{R}$. Hún er einnig kölluð fastafall og graf hennar er lárétt lína (samsíða x-ás). Skurðpunktur línunnar við y-ás er a en hún hefur engan skurðpunkt við x-ás nema ef $a = 0$.

$n = 1$:

Fyrsta stigs margliða er á forminu $f(x) = ax + b$ þar sem $a, b \in \mathbb{R}$. Graf hennar er lína. Skurðpunktur þessarar línu við y-ásinn er b, hallatala hennar er a og skurðpunktur við x-ásinn er $-b/a$

$n = 2$:

Annars stigs margliða er á forminu $f(x) = ax^2 + bx + c$ þar sem $a, b, c \in \mathbb{R}$. Graf hennar er fleygbogi. Skurðpunktur fleygbogans við y-ásinn er c, en til þess að finna skurðpunkta hans við x-ásinn þurfum við að leysa jöfnuna:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Þessi jafna getur haft tvær, eina eða enga rauntölulausn, allt eftir því hvort liðurinn $b^2 - 4ac$ sé jákvæður, núll eða neikvæður.[2]

[2] Jafnan hefur þó alltaf tvinntölulausn.

Dæmi um margliður:

- $f(x) = 3x + 9$
- $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 30x + 14$
- $f(x) = x^{137} - 1$

7 Vaxandi og minnkandi föll

Látum A og B vera hlutmengi í $\mathbb{R}$ og $f : A \to B$ vera fall. Fallið f er sagt vera *vaxandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ef ströng ójafna gildir ($f(x_1) < f(x_2)$) fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* vaxandi.

Fallið f er sagt vera *minnkandi* ef fyrir sérhverjar tvær tölur $x_1, x_2 \in A$ þannig að $x_1 < x_2$ gildir að $f(x_1) \geq f(x_2)$. Ef ströng ójafna gildir ($f(x_1) > f(x_2)$) fyrir öll slík x_1 og x_2 er sagt að f sé *stranglega* minnkandi.

Fall sem er annað hvort vaxandi eða minnkandi er sagt vera *einhalla.* Ef fallið er stranglega vaxandi eða stranglega minnkandi er það sagt vera *stranglega* einhalla.

8 Jafnstæð og oddstæð föll

Skilgreining. Fall $f : A \to B$ er

- *jafnstætt* (even) ef $f(-x) = f(x), \quad \forall x \in A$
- *oddstætt* (odd) ef $f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in A$

(hér er $A \subseteq \mathbb{R}$)

Dæmi um jafnstæð föll

- $f(x) = x^2$

Höfum $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

- $g(x) = \cos(x)$

Graf jafnstæðs falls er **samhverft** um y-ás.

Dæmi um oddstæð föll

- $f(x) = 2x$, fyrir $x \in \mathbb{R}$

Höfum $f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x)$

- $f(x) = \sin(x)$

Graf oddstæðs falls er **samhverft** um núllpunktinn.

9 Veldisvísisföll og lograr

Veldisvísis föll og lograr eru ákaflega mikilvæg föll í í ýmsum vísindagreinum, t.a.m. eðlisfræði, efnafræði, líffræði, verkfræði og tölvunarfræði.

Skilgreining. Fall af gerðinni $f(x) = a^x$, þar sem $a \in \mathbb{R}$, kallast *veldisvísisfall* með grunntölu a.

Skilgreining. Fall sem er andhverfa veldisvísisfalls með grunntölu a, kallast *lografall* (eða logri) með grunntölu a og er táknað með $\log_a(x)$.

Með öðrum orðum, þá er logri tölunnar x með grunntölu a það veldi b sem þarf að hefja a í til þess að fá út x, þ.e. sú tala b sem uppfyllir: $a^b = x$. Þar sem föllin eru andhverfur höfum við:

$$\log_a(a^x) = a^{\log_a(x)} = x.$$

Náttúrulega veldisvísisfallið og náttúrulegi logrinn

Skilgreining. Talan

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \simeq 2.718281828$$

nefnist tala Eulers.
Fallið $exp(x) = e^x$ kallast *náttúrulega veldisvísisfallið.*

Skilgreining. Andhverfa náttúrulega veldisvísisfallsins kallast náttúrulegi logrinn og er táknaður með $\ln(x)$.

10 Hornaföll

Grunnhornaföllin eru sínus og kósínus: $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ef við látum $\mathbf{v}$ vera vigur af lengd 1 sem myndar hornið θ við jákvæða hluta x-ássins, þá er $\cos(\theta)$ skilgreint sem ofanvarp $\mathbf{v}$ á x-ásinn og $\sin(\theta)$ sem ofanvarp $\mathbf{v}$ á y-ásinn.

Fleiri hornaföll
Notum nú sínus og kósínus til þess að skilgreina fleiri hornaföll:

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)} \qquad \csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}.$$

Hornafallareglur

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Með þessum þremur meginreglum má svo leiða út nokkrar í viðbót:

- $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$.

11 Samskeyting falla

Tökum tvö föll $f : A \to B$ og $g : C \to D$. Gerum ráð fyrir að

$$g(C) \subset A$$

(þ.e. öll $g(x)$ eru í formengi f).

Skilgreinum samsetta (composite) fallið $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Dæmi

Látum $f(x) = 3x^2$ og $g(x) = 2x + 4$. Skoðum $f \circ g$ og $g \circ f$. Höfum:

$$f \circ g = f(g(x)) = f(2x+4) = 3(2x+4)^2$$

$$= 3(4x^2 + 16x + 16) = 12x^2 + 48x + 48.$$

Á sama hátt fæst:

$$g \circ f = g(f(x)) = g(3x^2)$$
$$= 2(3x^2) + 4 = 6x^2 + 4.$$

Dæmi

Látum $(g(x) = \sin x$ og $f(x) = x^2$. Skoðum $f \circ g$ og $g \circ f$. Höfum:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \sin(x^2).$$

Á sama hátt fæst:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sin x) = \sin^2 x.$$

Dæmapása 1

1. Látum $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ og $B = \{b_1, b_2\}$ vera mengi. Hver eftirtalinna eru varpanir?

   (a) $f : A \to B$ þar sem $b_1 = f(a_1)$ og $b_2 = f(a_2) = f(a_3)$

   (b) $f : A \to B$ þar sem $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$ og $f(a_3)$ er ekki til

   (c) $f : B \to A$ þar sem $a_1 = f(b_1), a_2 = f(b_2)$ og $a_3 = f(b_2)$

   (d) $f : B \to A$ þar sem $a_1 = f(b_1)$ og $a_3 = f(b_2)$

   Lausn:

   Liðir (a) og (d) eru varpanir. Athugum að í (b)-lið þá er $f(a_3)$ ekki til, þ.e. f varpar ekki öllum stökum formengisins og er því ekki vörpun. Í (c)-lið þá varpast eitt stak í formenginu, b_2, í tvö mismunandi stök í bakmenginu, a_2 og a_3, og þar getur f því heldur ekki verið vörpun. Í (a)-lið er f vel skilgreind vörpun sem er ekki eintæk, því a_2 og a_3 varpast í sama stakið og í (d)-lið er hún einnig vel skilgreind en ekki átæk, þar sem ekkert stak varpast í a_2.

2. Hver eru formengi, bakmengi og myndmangi eftirfarandi falla?

   (a) Fallið f í (a)-lið í síðasta dæmi

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)$

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = 2$

   Lausn:

   (a) Við höfum $f : A \to B$ svo að A er formengið og B er bakmengið. Myndmengið er mengi þeirra staka $b \in B$ þ.a. til sé stak $a \in A$ sem uppfyllir $b = f(a)$. Þetta gildir fyrir öll stökin í B, þar sem $b_1 = f(a_1)$ og $b_2 = f(a_2)$. Því er myndmengið $\{b_1, b_2\} = B$.

   (b) Höfum formengi = bakmengi = $\mathbb{R}$. Við vitum einnig að sínusfallið tekur gildi á bilinu frá -1 og upp í 1, svo að myndmengið er $[-1, 1]$.

   (c) Höfum formengi $\mathbb{R}$ og bakmengi $\mathbb{Z}$. Eina gildið sem fallið tekur er talan 2 og því er myndmengið $\{2\}$.

Dæmapása 2

3. Segið til um hvort eftirfarandi föll séu eintæk, átæk, gagntæk eða ekkert af þessu:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x^2$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -11x$

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -4$

   (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$

   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^3 + 1$

   Lausn:

   (a) Fallið er átækt en ekki eintækt. Athugið að hér er formengið $\mathbb{R}$ en bakmengið $\mathbb{R}_+$. Fallið er ekki eintækt þar sem $f(-1) = (-1)^2 = 1^2 = f(1)$ svo að fyrir tvö ólík gildi í formenginu, 1 og -1 þá er fallgildið það sama.

   Til þess að sýna að fallið sé átæk þurfum við að sýna að fyrir sérhverja jákvæða rauntölu, y sé til einhver rauntala, x, þ.a. $x^2 = y$. Þar sem y er alltaf jákvæð, þá getum við valið $x := \sqrt{y}$.

   (b) Fallið er gagntækt. Það er eintækt því við höfum:

   $$-11x_1 = -11x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

   Það er átækt því að ef við höfum $y \in \mathbb{R}$ þá getum við valið $x := -\frac{1}{11}y$ og þá fæst

   $$f(x) = -11x = -11 \cdot \left(-\frac{1}{11}y\right) = y.$$

   (c) Fallið er hvorki eintækt né átækt, þar sem öll stökin í formenginu taka sama fallgildið, -4, og myndmengið er $\{-4\} \neq \mathbb{R}$ (myndmengið ekki það sama og bakmengið).

   (d) Fallið er eintækt en ekki átækt. Athugum að hér er formengið $\mathbb{Z}$, og þar sem fallið varpar öllum stökunum í sig sjálf, þá er myndmengið einnig $\mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$.

(e) Fallið er gagntækt. Höfum:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5{x_1}^3 + 1 = 5{x_2}^3 + 1$$
$$\Rightarrow 5{x_1}^3 = 5{x_2}^3$$
$$\Rightarrow {x_1}^3 = {x_2}^3$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

svo það er eintækt. Fyrir $y \in \mathbb{R}$ veljum við $x := \sqrt[3]{\frac{y-1}{5}} \in \mathbb{R}$. Þá fæst:

$$f(x) = 5x^3 + 1 = 5\left(\sqrt[3]{\frac{y-1}{5}}\right)^3 + 1$$
$$= 5 \cdot \frac{y-1}{5} + 1$$
$$= y - 1 + 1 = y$$

svo að fallið er átækt.

Dæmapása 3

4. Finnið andhverfur eftirfarandi falla:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -11x$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x+2}{3}$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^3 + 1$

Lausn:

(a) Setjum $y = f(x)$ og einangrum fyrir x. Fáum:

$$y = -11x \Rightarrow -\frac{1}{11}y = x$$

svo að $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = -\frac{1}{11}y$ er andhverfa fallsins.

(b) Setjum $y = f(x)$ og einangrum fyrir x. Fáum:

$$y = \frac{x+2}{3} \Rightarrow 3y = x + 2$$
$$\Rightarrow 3y - 2 = x$$

svo að $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = 3y - 2$ er andhverfa fallsins.

(c) Setjum $y = f(x)$ og einangrum fyrir x. Fáum:

$$y = 5x^3 + 1 \Rightarrow y - 1 = 5x^3$$
$$\Rightarrow \frac{y-1}{5} = x^3$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{y-1}{5}} = x$$

svo að $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y-1}{5}}$ er andhverfa fallsins.

Dæmapása 4

5. Finnið skurðpunkta eftirfarandi margliða við x og y-ás ef þeir eru til:

(a) $-x^2 + 9x + 1$

(b) $-6x^2 + 7x - 17$.

(c) $x^{2n} + 6x^n + 9$

Lausn: Við finnum skurðpunkt við y-ás með því að setja $x = 0$ inn í margliðuna, en skurðpunkta við y-ás með því að setja margliðuna $= 0$.

(a) Fyrir $x = 0$ fæst $-0^2 + 9 \cdot 0 + 1 = 1$ svo að skurðpunkturinn við y-ás er 1.

Setjum $-x^2 + 9x + 1 = 0$. Rifjum upp formúlu fyrir lausn á annarstigs jöfnu þ.e. jafnan $ax^2 + bx + c = 0$ hefur lausnir

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot ac}}{2a}.$$

Við byrjum þá að reikna út aðgreininn:

$$D = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 89 - 4 = 85.$$

Þar sem aðgreinirinn er > 0, þá hefur jafnan $-x^2 + 9x + 1 = 0$ tvær rauntölulausnir, en þær eru þá

$$x = \frac{-9 + \sqrt{85}}{-2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{85}$$

og

$$x = \frac{-9 - \sqrt{85}}{-2} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{85}.$$

(b) Fyrir $x = 0$ fæst $-6 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 - 17 = -17$ svo að skurðpunkturinn við y-ás er -17.

Setjum $-6x^2 + 7x - 17 = 0$ og notum sömu aðferð og í (a)-lið. Við byrjum þá að reikna út aðgreininn: $D = b^2 - 4ac$, og við fáum -359. Þar sem aðgreinirinn er < 0, þá hefur jafnan $-6x^2 + 7x - 17 = 0$ engar rauntölurætur.

(c) Fyrir $x = 0$ fæst $0^{2n} + 6 \cdot 0^n + 9 = 9$ svo að skurðpunkturinn við y-ás er 9.

Setjum $x^{2n} + 6x^n + 9 = 0$. Við gerum breytuskipti, þ.e. látum $y := x^n$. Athugum að $x^{2n} = (x^n)^2 = y^2$. Jafnan okkar gefur því: $y^2 + 6y + 9 = 0$. Við höfum þá annars stigs jöfnu sem við leysum eins og áður. Aðgreinirinn verður: $D = b^2 - 4ac = 0$ svo að eina lausnin okkar er $y = \frac{-6}{2} = -3$. Nú viljum við leysa jöfnuna $x^n = -3$, en við sjáum að hún hefur ekki lausn ef n er slétt tala, en lausnina $x = \sqrt[n]{-3} = -\sqrt[n]{3}$ ef n er oddatala.

Dæmapása 5

6. Stofnbrotsliðið:

(a) $\dfrac{2x+1}{x(x-1)}$

(b) $\dfrac{1}{x^2(x+1)}$

Lausn:

(a) Höfum:

$$\frac{2x+1}{x(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1}$$

þar sem $A_1(x-1) + A_2(x) = 2x+1$, þ.e.

$$(A_1 + A_2)x - A_1 = 2x + 1$$

svo að með því að bera saman stuðla fáum við:

$$\begin{cases} -A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = -1 \\ A_1 + A_2 = 2 \Rightarrow A_2 - 1 = 2 \end{cases}$$

svo að $A_2 = 3$.

Við höfum því fengið:

$$\frac{2x+1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1}.$$

(b) Höfum:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x+1}$$

þar sem $A_1(x)(x+1) + A_2(x+1) + A_3(x^2) = 1$, þ.e.

$$(A_1 + A_3)x^2 + (A_1 + A_2)x + A_2 = 1.$$

Með því að bera saman stuðla fáum við:

$$\begin{cases} A_2 = 1 \\ A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -1 \\ A_1 + A_3 = 0 \Rightarrow A_3 = 1. \end{cases}$$

Við höfum því fengið:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}.$$

Dæmapása 6

7. Segið til um hvort eftirfarandi föll séu vaxandi, minnkanndi (og þá stranglega eða ekki) eða hvorugt.

   (a) $f(x) = 5x$

   (b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

   (c) $f(x) = -x^2$

   (d) $f(x) = 18$

   Lausn:

   (a) Fallið er stranglega vaxandi því ef við gefum okkur $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ þ.a. $x_1 < x_2$ þá er $5x_1 < 5x_2$, þ.e. $f(x_1) < f(x_2)$.

   (b) Fallið er stranglega minnkandi því ef við gefum okkur $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ þ.a. $x_1 < x_2$ þá fæst:

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x_1 > -\frac{1}{2}x_2$$

   $$\Rightarrow -\frac{1}{2}x_1 + 3 > -\frac{1}{2}x_2 + 3,$$

   þ.e. $f(x_1) > f(x_2)$.

   (c) Fallið er hvorki vaxandi né minnkandi. Þetta sést með því að taka til dæmis punktana $-2, -1, 1$ og 2 og bera saman fallgildin. Höfum $-2 < -1$ og $f(-2) = -(-2)^2 = -4 < -1 = -(-1)^2 = f(-1)$, þ.e. $f(-2) < f(-1)$. Hins vegar fæst: $1 < 2$ og $f(1) = -1^2 = -1 > -4 = -2^2 = f(2)$, þ.e. $f(1) > f(2)$. Við höfum reyndar að fallið er vaxandi á neikvæða raunásnum en minnkandi á jákvæða raunásnum.

   (d) Fallið er bæði vaxandi og minnkandi, en ekki stranglega. Höfum $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ og $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ því að $f(x_1) = f(x_2) = 18$ fyrir öll $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

8. Segið til um hvort eftirfarandi föll séu jafnstæð, oddstæð eða hvortugt.

   (a) $f(x) = 5x$
   (b) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3$
   (c) $f(x) = -x^2$
   (d) $f(x) = 18$

   Lausn:

   (a) Fallið er oddstætt því að $f(-x) = 5(-x) = -(5x) = -f(x)$.
   (b) Höfum $f(-x) = -\frac{1}{2}(-x) + 3 = \frac{1}{2}x + 3$ sem er hvorki það sama og $f(x)$ né $-f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ svo fallið er hvorki jafnstætt né oddstætt.
   (c) Fallið er jafnstætt því að $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$.
   (d) Fallið er jafnstætt því að $f(-x) = 18 = f(x)$.

Dæmapása 7

9. Reiknið

   (a) $\log_{10}(1000)$
   (b) $\log_2(16)$
   (c) $\ln(e^x)$

   Lausn:

   (a) Við höfum $10^3 = 1000$ svo að $\log_{10}(1000) = 3$.
   (b) Við höfum $2^4 = 16$ svo að $\log_2(16) = 4$.
   (c) Munum að grunntala ln er e. Við höfum $e^x = e^x$ svo að $\ln(e^x) = x$ (þetta er einnig afleiðing þess að föllin $\ln(x)$ og e^x eru andhverfur).

10. Einfaldið:

   (a) $\cos(x + 30°)$, (höfum $\cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ og $\sin(30°) = \dfrac{1}{2}$).
   (b) $\sin(x + \frac{2\pi}{3})$, (höfum $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\dfrac{1}{2}$ og $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$)

Lausn:

(a) Notum summureglu fyrir hornaföll:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Fáum:

$$\begin{aligned}\cos(x+30°) &= \cos(x)\cos(30°) - \sin(x)\sin(30°) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x).\end{aligned}$$

(b) Notum summureglu fyrir hornaföll:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

Fáum:

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) &= \sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x).\end{aligned}$$

Dæmapása 8

11. Látum $f(x) = 3x^2$ og $g(x) = 2x + 4$. Finnið $(g \circ f)(x)$ og $(f \circ g)(x)$.

Lausn:

Finnum $g \circ f$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= g(3x^2) \\ &= 2(3x^2) + 4 \\ &= 6x^2 + 4.\end{aligned}$$

Finnum svo $f \circ g$ á sama hátt:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+4) &= 3(2x+4)^2 \\ &= 3(4x^2 + 16x + 16) \\ &= 12x^2 + 48x + 48.\end{aligned}$$

12. Látum $f(x) := x^3$ og $g(x) := 2x - 1$. Hvað er $f \circ g(-2)$?

Lausn: Byrjum á því að finna fallið $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^3.$$

Setjum nú -2 inn í þessa margliðu og fáum:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(-2) &= (2(-2) - 1)^3 \\ &= (-5)^3 = -125.\end{aligned}$$