

math070.0 Framhaldsskólastærðfræði

Ýmsir

23. ágúst 2015

Copyright This work is licensed under the Creative Commons Attribution-ShareAlike License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/1.0/> or send a letter to Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Efnisyfirlit

1 Reikningur með heilum tölum	7
1.1 Náttúrulegu tölurnar	7
1.2 Röðun talna	7
1.3 Frádráttur	8
1.4 Talnalínan	8
1.5 Neikvæðar tölur	8
1.6 Forgangsroðun aðgerða	9
1.7 Reiknireglur	9
1.8 Deiling heilla talna	9
1.9 Deiling með afgangi	10
2 Frumtölur (prímtölur)	12
2.1 Frumtölur og frumbáttun	12
3 Brotareikningur	13
3.1 Ræðar tölur	13
3.2 Fullstýtt brot	14
3.3 Reiknireglur	15
3.4 Röðun ræðra talna	15
3.5 Talnalínan	16
4 Veldareikningur	16
4.1 Veldi	16
4.2 Reiknireglur	17
4.3 Rætur	17
4.4 Ræðar tölur í veldisvísi	18
5 Mengi	19
5.1 Nokkur grunnhugtök um mengi	19
5.2 Yrðingar til að skilgreina mengi	19
5.3 Þekkt mengi	20
5.4 Aðgerðir á mengjum	21
5.5 Faldmengi	22
5.6 Fyllimengi	22
5.7 Meira um aðgerðir á mengjum	23
5.8 Enn meira um aðgerðir á mengjum	23
5.9 Nokkur dæmi	25
6 Talnakerfin	25
6.1 Talnakerfin	25
6.2 Rótin af tveimur	26
6.3 Rauntölurnar	27
6.4 Reiknireglur	27
6.5 Óendanleiki	27
6.6 Bil í rauntölunum	28
6.7 Efri og neðri mörk	29
6.8 Nokkur dæmi	29
7 Stæður	31
7.1 Summu- og margfeldistáknið	31

8 Jöfnur	33
8.1 Liðun og þáttun	33
9 Ójöfnur og tölugildi	34
9.1 Tölugildistáknið	34
9.2 Reiknireglur fyrir tölugildistáknið	35
9.3 Venjulegt og rúmfræðilegt meðaltal	36
10 Línur í plani	38
10.1 Punktar og línur í plani	38
10.2 Hnitakerfið	38
10.3 Jafna línu í hnitakerfinu	39
10.4 Hallatala og skurðpunktur við ása	39
10.5 Meira um jöfnu línu	41
10.6 Skurðpunktur línu	42
11 Þríhyrningar og hornaföll	43
11.1 Horn	43
11.2 Topp horn og grannhorn	44
11.3 Þríhyrningar	44
11.4 Regla Pýþagórasar	46
11.5 Fjarlægð milli punkta í hnitakerfi	47
11.6 Einslaga þríhyrningar	48
11.7 Hornaföllin	49
11.8 Þekkt horn	52
11.9 Flatarmál þríhyrnings	53
11.10 Sínus- og kósínusreglurnar	54
12 Flatarmyndir, flatarmál og rúmmál	56
12.1 Flatarmál ýmissa forma	56
13 Föll	57
13.1 Varpanir og föll	57
13.2 Graf vörpunar	59
13.3 Aðgerðir á föllum	59
13.4 Lotubundin föll	60
13.5 Jafnstæð og oddstæð föll	61
13.6 Einhalla föll	63
14 Margliður	63
14.1 Margliður	63
14.2 Núllstöðvar margliða	64
14.3 Fyrsta og annað stig margliða	65
14.4 Þáttun margliða	66
14.5 Deiling með afgangi	68
14.6 p/q -aðferð	69
15 Inngangur að ræðum föllum	70
15.1 Ræð föll	70
16 Vísisföll	73
16.1 Vísisföll	73

17 Andhverfur falla	73
17.1 Andhverfa vörpunar	73
18 Lograr	75
18.1 Lograr	75
18.2 Lograreglur	76
19 Hornaföll og einingarhringurinn	78
19.1 Bogaeiningar	78
19.2 Einingarhringurinn og hornaföllin	79
19.3 Þekkt gildi á hornaföllum	80
19.4 Myndir af hornaföllum	81
19.5 Hornafallareglur	82
19.6 Andhverfur hornafallanna	83
20 Vigrar	86
20.1 Vigrar	86
20.2 Pólhnit vigra	86
20.3 Vigrareikningur	88
20.4 Innfeldi vigra og horn	89
20.5 Þríhyrningsójafnan	91
20.6 Vigrar og hornaföll	91
21 Formengi og varpmengi, eintækni og átækni	94
21.1 Myndir og bakmyndir	94
21.2 Eintækar og átækar varpanir	94
22 Samskeyting falla	96
22.1 Samskeyting falla	96
23 Markgildi falls	97
23.1 Markgildi falls	97
23.2 Fleiri gerðir af markgildum	101
23.3 Reikniaðgerðir á markgildum	104
23.4 Klemmureglan	107
24 Aðfellur og markgildi; ræð föll	110
24.1 Markgildi ræðra falla	110
24.2 Aðfellur	115
24.3 Aðfellur ræðra falla	116
25 Samfelld föll	120
25.1 Samfelld föll	120
25.2 Reglur um samfelldni	121
25.3 Þekkt samfelld föll	124
25.4 Nokkur dæmi	126
26 Deildun	128
26.1 Skýringardæmi	128
26.2 Skilgreining á afleiðu	131
26.3 Hallatölur og snertlar	131
26.4 Reglur um deildun	132

26.5 Náttúrulega veldisvísisfallið	134
26.6 Deildun þekktra falla	135
27 Ýmsar afleiður, snertlar, keðjuregla og hornaföll	140
27.1 Keðjuregla og hornaföll	140
28 Notkun á afleiðum - hágildi og lággildi	141
28.1 Hágildi og lággildi	141
29 Vaxandi og minnkandi föll; afleiðupróf	142
30 Náttúrulegi logrinn og afleiða hans	142
30.1 Afleiða náttúrulega lograns	142
31 Afleiða andhverfu falls; veldisvísisfallið og breiðbogaföllin	142
31.1 Afleiða andhverfu falls og veldisvísisfallið	142
31.2 Breiðbogaföllin	143
32 Andhverfur hornafalla og afleiður þeirra	144
32.1 Andhverfur hornafalla og afleiður þeirra	144
33 Regla l'Hôpital	145
33.1 Regla l'Hôpital	145
34 Óákveðin heildi	146
34.1 Stofnföll	146
35 Riemann summur og ákveðin heildi	147
35.1 Ákveðið heildi	147
35.2 Reiknireglur	149
35.3 Einhalla vaxandi föll	150
35.4 Samfelld föll eru heildanleg	150
36 Grundvallarsetning stærðfræðigreiningarinnar	151
36.1 Grundvallarsetning stærðfræðigreiningarinnar	151
37 Heildunarreglur og meðalgildi	151
37.1 Hlutheildun	151
37.2 Innsetningaraðferð	152
38 Heildi og afleiður logra og veldisvísisfalla	153
38.1 Stofnföll logra og veldisvísisfalla	153
39 Ákveðin heildi og flatarmál	153
39.1 Ákveðin heildi og flatarmál	153
40 Hlutheildun og stofnbrot	154
40.1 Hlutheildun og stofnbrot	154
41 Óeiginleg heildi	155
41.1 Óeiginleg heildi af gerð eitt	155
41.2 Óeiginleg heildi af gerð tvö	156

42 Inngangur að diffurjöfnum	157
42.1 Afleiðujöfnur	157
43 Jafnvægi sjálfstæðrar deildajöfnu	158
44 Aðskilnaður breytistærða	158
44.1 Aðskiljanleg jafna af 1. stigi	158
45 Línulegar deildajöfnur af 1.stigi	159
45.1 Línuleg jafna af 1. stigi	159
45.2 Línuleg jafna af 2. stigi	160
46 Runur	163
46.1 Runur	163
47 Raðir	163
47.1 Raðir	163
47.2 Jafnmunaruna	164
47.3 Kvótarunur	165
47.4 Markgildi runa og raða	165
48 Tvinntölur	166
48.1 Takmarkanir rauntalnakerfisins	166
48.2 Tvinntalnaplanið	167
48.3 Raunhluti, þverhluti og samok	168
48.4 Lengd og stefnuhorn	168
48.5 Veldareglur	169
48.6 Einingarhringurinn	169
48.7 Rúmfræðileg túlkun á margföldun	169
48.8 Þríhyrningsójafnan	170
48.9 Einingarrætur	170
48.10 Rætur	171
48.11 Núllstöðvar annars stigs margliðu	173
48.12 Meginsetning algebrunar	174
48.13 Margliður með rauntölustuðla	174
48.14 Útvíkkun veldisvísisfallsins og jöfnur Eulers	175
48.15 Samlangningarformúla veldisvísisfallsins	175
49 Fylki og línuleg algebra	176
49.1 Línulegt jöfnuhneppi	176
49.2 Lausnir á línulegum jöfnuhneppum	176

1 Reikningur með heilum tölum

1.1 Náttúrulegu tölurnar

Tölurnar $1, 2, 3, 4, \dots$ köllum við *náttúrulegu tölurnar*.

Á náttúrulegu tölunum höfum við skilgreindar tvær aðgerðir, *samlagningu* og *margföldun*, þannig að sérhverju pari (a, b) af náttúrlegum tölum a og b er úthlutað nákvæmlega einni náttúrlegri tölu $a + b$ sem nefnist *summa* a og b og annari tölu ab sem nefnist *margfeldi* a og b . Við táknum margfeldið einnig með $a \cdot b$.

Dæmi 1.1.1. (a) Summa talnanna 3 og 4 er 7. Við ritum því $3 + 4 = 7$
(b) Margfeldi talnanna 3 og 4 er 12 við ritum því $3 \cdot 4 = 12$

1.2 Röðun talna

Á $\mathbb{N}$ höfum við *röðun* þannig að um sérhverjar tvær tölur a og b gildir eitt af þrennu:

1. a er minni en b , táknað $a < b$
2. a er jöfn b , táknað $a = b$
3. a er stærri en b , táknað $a > b$

Flestir hafa góða hugmynd um hvað það þýðir að ein tala sé stærri en önnur. Við látum þó formlega skilgreiningu fylgja með:

Skilgreining 1.2.1. Náttúrulega talan a er sögð vera minni en b , ef til er náttúrleg tala c þannig að $a + c = b$. Náttúrulega talan a er sögð vera stærri en b , ef b er minni en a .

Um röðun náttúrlegra talna gilda tvær mikilvægar reglur:

Ef $a < b$ þá er $a + c < b + c$ (*röðun er óbreytt við samlagningu*).
Ef $a < b$ þá er $ac < bc$ (*röðun er óbreytt við margföldun*).

Dæmi 1.2.1. Reglurnar um röðun eru í raun sárafaldar.

Við vitum að $4 < 7$, fyrri reglan segir að þess vegna megi álykta að $4 + 100 < 7 + 100$ eða einfaldlega $104 < 107$.

Þetta er auðvitað augljóslega rétt og venjuleg manneskja ætti ekki að þurfa að vísa í reglu til að rökstyðja það að $104 < 107$. Þessi regla er því aðalega notuð í bókstafareikningi (algebru) en sjaldan notuð í raunverulegum reikningi með tölur.

Seinni reglan er alveg jafn augljós. Við vitum að $4 < 7$, þar af leiðandi er $4 \cdot 3 < 7 \cdot 3$ sem er jafngilt $12 < 21$ (sem við auðvitað vissum til að byrja með).

1.3 Frádráttur

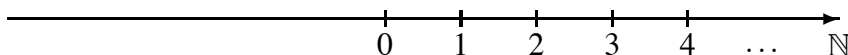
Eins og með röðun hafa flestir góða hugmynd um hvað frádráttur er. Stærðfræðingar vilja samt hafa formlega skilgreiningu á öllum hlutum og fyrir frádrátt hljómar hún svona:

Skilgreining 1.3.1. Ef $a < b$ og $a + x = b$, þá nefnist talan x *mismunur* b og a og við skrifum $b - a = x$. Ef hins vegar $a > b$ og $a = b + y$, þá nefnist talan y *mismunur* a og b og við skrifum $a - b = y$.

Athugum að eins og er þá höfum við ekki skilgreint neikvæðar tölur. Við getum því ekki gefið aðgerðinni $a - b$ gildi ef $b > a$. Til dæmis er aðgerðin $6 - 8$ ennþá merkingarlaus. (Þegar neikvæðar tölur koma til sögunnar getum við sagt að $6 - 8 = -2$.)

1.4 Talnalínan

Til þess að gera okkur mynd af náttúrulegu tölunum hugsum við okkur að þær liggi jafnt dreifðar á línu, sem við nefnum talnalínu.



Við veljum okkur viðmiðunarpunkt 0 og mörkum hann á línuna. Síðan veljum við einingarlengd á línunni og mörkum punkt til hægri við 0 í einingarfjarlægð og táknum hann með 1. Síðan er haldið áfram eins og myndin sýnir. Þá höfum við að $a < b$ ef og aðeins ef b er hægra megin við a á talnalínunni.

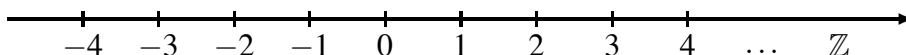
Nú er hægt að lýsa reikningsaðgerðunum náttúrulegra talna sem færslum á talnalínunni. Sú aðgerð að leggja 1 við tölu m sem á sér tilsvareandi punkt á talnalínunni jafngildir því að taka eitt skref til hægri eftir talnalínunni í punktinn sem svarar til $m + 1$. Sé talan n lögð við m er þessi aðgerð einfaldlega endurtekin n sinnum. Margföldun er skilgreind á sama hátt, talan mn er skilgreind sem $m + m + \dots + m$ þar sem liðirnir eru n talsins. Til mn svara þá n stykki af færslunni frá 0 í punktinn m .

1.5 Neikvæðar tölur

Reikningur með náttúrulegar tölur er ófullkominn meðal annars vegna þess að ekki er alltaf hægt að framkvæma frádrátt. Aðgerðin $a - b$ er aðeins skilgreind ef $a > b$.

Til þess að ráða bót á þessu er talnakerfið stækkað þannig að bætt er við tölunni 0, sem nefnist *núll* og við höfum túlkað sem upphafspunkt náttúrulegu talnanna á talnalínunni, og síðan er bætt við tölunum $-1, -2, -3, -4, \dots$. Þetta stækkaða kerfi nefnist *heilar tölur*. Tölurnar $-1, -2, -3, -4, \dots$ nefnast *neikvæðu tölurnar*.

Við gerum okkur einnig mynd af heilum tölum með því að marka þær á talnalínuna. Við mörkum fyrst náttúrulegu tölurnar (og núll) á línuna eins og áður. Næst mörkum við neikvæðu tölurnar á línuna á sama máta og náttúrulegu tölurnar, en bara í öfuga átt.



1.6 Forgangsröðun aðgerða

Þegar reiknað er með tölur þarf að framkvæma aðgerðir í rétttri röð. Allar reikniaðgerðir sem eru innan sviga skal framkvæma fyrst. Svigann má líta á sem sér reikningsdæmi út af fyrir sig. Næst skal framkvæma margföldunaraðgerðir (og deilingu þegar hún verður skilgreind). Að lokum má leggja saman og draga frá.

Dæmi 1.6.1. $1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7$

$(1 + 2) \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$

$((1 + 1) \cdot 5 + 3 \cdot (2 - 4)) \cdot 2 = (2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2)) \cdot 2 = (10 - 6) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$

1.7 Reiknireglur

Nokkrar reiknireglur gilda um tölur:

$(a + b) + c = a + (b + c)$	(tengiregla samlagningar),
$(ab)c = a(bc)$	(tengiregla margföldunar),
$a + b = b + a$	(víxlregla samlagningar),
$ab = ba$	(víxlregla margföldunar),
$a(b + c) = ab + ac$	(dreifiregla),
$1a = a$	(1 er margföldunarhlutleysa).
$a + 0 = a$	(0 er samlagningarhlutleysa),
$0a = 0$	(margföldun með núlli gefur núll)

Í raun eru þetta nokkrar af forsendum stærðfræðinnar. Með öðrum orðum þá er ógjörningur að sanna þær. Með örlítilli athugun ætti hver og einn þó að geta sannfært sig um sannleiksgildi þeirra. Raunin er sú að ekki er hægt að sanna neitt án þess að hafa eitthvað í höndunum til að byrja með. Einhverstaðar þarf stærðfræðin að byrja, og stærðfræðingar hafa ákveðið að hún byrji m.a. með þessum reglum. (Ath. nútímastærðfræði hefur fleiri forsendur sem ekki verða taldar upp hér.)

Dæmi 1.7.1. Prófum reglu númer 5 á listanum (*dreifiregluna*) fyrir tölurnar $a = 3$, $b = -9$ og $c = 5$.

Vinstra megin jafnaðarmerkisins stendur $3(-9 + 5) = 3 \cdot (-4) = -12$

Hægra megin jafnaðarmerkisins stendur $3 \cdot (-9) + 3 \cdot 5 = -27 + 15 = -12$

Við sjáum því að reglan stemmir.

1.8 Deiling heilla talna

Nú skal skilgreina deilingu á formlegan máta:

Skilgreining 1.8.1. Ef a og b eru gefnar heilar tölur, $b \neq 0$, og til er heil tala x þannig að $a = bx$, þá segjum við að b gangi upp í a eða að a sé deilanleg með b . Ef slík tala x er til, þá nefnist hún kvóti talnanna a og b og þá skrifum við $\frac{a}{b} = x$ eða $a/b = x$. Sú aðgerð að finna þessa tölu x nefnist deiling.

Í vissum skilningi er deilingaraðgerðin „öfug“ miðað við margföldunaraðgerðina. Þ.e.a.s. ef $a = bx$ þá er $a/b = x$. ($b \neq 0$).

Athugum að eins og er höfum við bara skilgreint heilar tölur. Brotið $\frac{a}{b}$ verður því merkingarlaust nema að útkoman sé heiltala. Seinna munum við skilgreina ræðar tölur (almenn brot) og þá getum við unnið með hvaða brot sem er.

Dæmi 1.8.1. Til er heil tala x þ.a. $3x = 12$. Sú tala er $x = 4$ og því skrifum við $\frac{12}{3} = 4$. Ekki er til heil tala x þ.a. $5x = 12$, við höfum ekki ennþá skilgreint ræðar tölur (öðru nafni almenn brot) svo aðgerðin $\frac{12}{5}$ er merkingarlaus.

1.9 Deiling með afgangi

Ekki er alltaf hægt að deila heilli tölu a með heilli tölu b . Í bili getum við ráðið bót á þessu með því að deila í staðinn með afgangi. Formleg skilgreining er:

Skilgreining 1.9.1. Látum a og b vera heiltölur. Aðgerðin að finna heilar tölur x og y þannig að $a = bx + y$ og $0 \leq y < b$ nefnist deiling með afgangi. Við segjum þá að b gangi x sinnum upp í a með afgangi y .

Við skulum gera tilraun til að útskýra aðferð til að deila með afgangi.

Deila skal tölunni b í töluna a með afgangi

1. *Finnnum stærstu heiltöluna sem er minni en eða jöfn a sem er þannig að b gegnur upp í henni. (Hvernig það er gert er önnur saga, stundum er einfaldast bara að prófa sig áfram.) Köllum þessa tölu n .*
2. *Setjum $x = \frac{n}{b}$*
3. *Setjum $y = a - n$*

Núna gildir jafnan $a = bx + y$ og við segjum að b gangi x sinnum upp í a með afgang y .

Í barnaskólum landsins er líka kennd aðferð sem kallast *langadeiling*. Þeirri aðferð er frekar erfitt að lýsa í texta og því verður sleppt hér.

Dæmi 1.9.1. Deilið 7 upp í 1033 með afgangi, með því að nota:

(a) Aðferðina sem er lýst hér að ofan.

(b) Löngudeilingu.

Lausn:

(a)

1. Finnum stærstu töluna sem er minni en eða jöfn 1033 sem er þannig að 7 gengur upp í henni:

Prófum okkur áfram...

Prófum $7 \cdot 100 = 700$, sjáum að 7 gengur uppí 700 en þessi tala er töluvert minni en 1033

Prófum $7 \cdot 150 = 1050$ svo 7 gengur uppí 1050 en þessi tala er stærri en 1033 við höfum því gengið aðeins of langt, lækkum okkur aðeins.

Prófum $7 \cdot 147 = 1029$ svo 7 gengur upp í 1029, þessi tala er minni en 1033 og næsta tala sem er þannig að 7 gengur upp í henni er $1029 + 7 = 1036$ sem er stærri en 1033.

Við sjáum því að 1029 er stærsta tala sem er minni en eða jöfn 1033 sem er þannig að 7 gengur upp í henni. Því setjum við $n = 1029$

2. Látum $x = \frac{1029}{7} = 147$

3. Látum $y = 1033 - 1029 = 4$

Nú sjáum við að $1033 = 7 \cdot 147 + 4$ og við segjum að 7 gangi 147 sinnum upp í 1033 með afgang 4.

(b)

$$\begin{array}{r} 147 \\ 7 \overline{)1033} \\ \underline{7} \\ 33 \\ \underline{28} \\ 53 \\ \underline{49} \\ 4 \end{array}$$

Þetta gefur að 7 gengur 147 sinnum upp í 1033 með afganginn 4.

Með öðrum orðum er $1033 = 7 \cdot 147 + 4$.

2 Frumtölur (prímtölur)

2.1 Frumtölur og frumþáttun

Rifjum upp skilgreininguna á deilanleika:

Skilgreining 2.1.1. Náttúrleg tala a er sögð vera deilanleg með náttúrulegu tölunni b ef til er náttúruleg tala x þannig að $a = bx$.

Allar tölur a eru deilanlegar með einum og sjálfri sér, því að $a = 1 \cdot a$. Flestar tölur hafa fleiri deila, t.d. er 12 deilanleg með þremur og fjórum og 15 er deilanleg með þremur og fimm.

Sumar tölur eru hinsvegar aðeins deilanlegar með einum og sjálfri sér. Slíkar tölur eru nefndar *frumtölur* (*prímtölur*), að einni undanskilinni. Talan 1 er ekki tekin með sem frumtala vegna tæknilegra ástæðna. Setjum skilgreininguna fram á formlegan hatt:

Skilgreining 2.1.2. Ef náttúruleg tala $p \geq 2$ er aðeins deilanleg með einum og sjálfri sér þá segjum við að p sé frumtala.

Nokkrar fyrstu frumtölurnar eru:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$$

Sérhverja náttúrlega tölu $a \geq 2$ má skrifa sem margfeldi frumtalna

$$a = p_1 p_2 p_3 \cdots p_m$$

þar sem sumar frumtölur p_j geta verið endurteknar. Sem dæmi getum við tekið

$$7 = 7, \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3, \quad 250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^3.$$

Þáttun á náttúrlegum tölum í frumtölur nefnist *frumþáttun*.

Engin skilvirk aðferð hefur verið fundin til að frumþátta stórar tölur. Í raun byggja flestar aðferðir einfaldlega á því að prófa hvort hver frumtala gegnur upp í gefna tölu. Algengustu aðferðinni verður lýst hér:

Frumþátta skal tölu n . Setjum $n_1 = n$ og stingum n_1 inní eftirfarandi algrím:

Gáum hvort að einhver frumtala minni en eða jöfn $\sqrt{n_i}$ gengur upp í n_i .

- *Ef slík frumtala finnst þá skírur við hana p_i og setjum $n_{i+1} = \frac{n_i}{p_i}$. Síðan skoðum við n_{i+1} eins og við skoðuðum n_i .*
- *Ef engin slík frumtala finnst þá er n_i sjálf frumtala. Þá endar algrímurinn. Við setjum $p_i = n_i$ og frumþáttun n er $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_i$*

Dæmi 2.1.1. a) Frumþáttidölun 273.

Lausn:

Látum $n_1 = 273$.

2 gengur ekki uppí 273 en 3 gerir það (sest með prófun), setjum því $p_1 = 3$ og $n_2 = \frac{273}{3} = 91$.

3 gengur ekki uppí 91, og 5 ekki heldur. 7 gengur hins vegar uppí 91. Við setjum því $p_2 = 7$ og $n_3 = \frac{91}{7} = 13$

Nú er þekkt að 13 er framtala svo við setjum $p_3 = 13$ og algrímurinn endar

Frumþáttunin er því $273 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 3 \cdot 7 \cdot 13$

b) Frumþáttidölun 101.

Lausn:

Látum $n_1 = 101$

2 gengur ekki uppí 101, heldur ekki 3, 5 og 7. Nú er $\sqrt{101} \approx 10,05$. Af þessu sést að engin framtala minni en $\sqrt{101}$ gengur uppí 101. 101 er því sjálf framtala, og frumþáttunin er því einfaldlega $101 = 101$

3 Brotareikningur

3.1 Ræðar tölur

Reikningur með heilar tölur er ófullkominn, meðal annars vegna þess að ekki er alltaf hægt að framkvæma deilingu án þess að þurfa að grípa til deilingar með afgangi. Til þess að bæta úr því er talnakerfið stækkað aftur með því að innleiða *ræðar tölur*, en þær samanstanda af öllum brotum $\frac{p}{q}$ þar sem p og q eru heilar tölur og $q \neq 0$. Talan p nefnist teljari brotsins en talan q nefnari þess.

Við lítum á heilu tölurnar sem hlutmengi í ræðu tölunum með því að skrifa $n = \frac{n}{1}$ fyrir sérhverja heila tölu n .

Oft geta mismunandi brot táknað sömu töluna:

Setning 3.1.1 Tvö brot $\frac{p}{q}$ og $\frac{r}{s}$ tákna sömu ræðu töluna þá og því aðeins að $p \cdot s = q \cdot r$.

Dæmi 3.1.1. Brotin $\frac{2}{7}$ og $\frac{6}{21}$ eru jöfn því að $21 \cdot 2 = 42$ og $6 \cdot 7 = 42$. Með öðrum orðum er $21 \cdot 2 = 6 \cdot 7$. Því má skrifa $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$.

Brotin $\frac{2}{7}$ og $\frac{3}{16}$ eru ekki jöfn því að $2 \cdot 16 = 32$ en $3 \cdot 7 = 21$. Á stærðfræðimáli er það skrifað $\frac{2}{7} \neq \frac{3}{16}$.

3.2 Fullstytt brot

Auðvelt er að sjá að ef a, b og t eru heilar tölur þá gildir $\frac{at}{bt} = \frac{a}{b}$. Þegar þessi aðgerð er framkvæmd segjum við að við höfum *stytt brotið*, ef við framkvæmum þessa aðgerð í „öfuga átt“ segjum við að við höfum *lengt brotið*.

Það getur verið ruglingslegt að hægt sé að tákna sömu töluna með óendanlega mörgum brotum. Því er góður siður að fullstyttu alltaf brotin sín. Fullstytt brot $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ eru nefnilega jöfn þá og því aðeins að $a = c$ og $b = d$.

Skilgreiningin á fullstyttu broti er svohljóðandi:

Skilgreining 3.2.1. Brot $\frac{p}{q}$ er sagt vera fullstytt ef $q > 0$ og ef um allar heilar tölur r, s þ.a. $s > 0$ og $\frac{r}{s} = \frac{p}{q}$ gildir að $s \geq q$

Þeim sem eru óvanir stærðfræði gæti fundist þessi skilgreining þung. Flestum nægir þó að muna aðferð til að fullstyttu brot. Einni slíkri aðferð verður lýst hér:

Fullstyttu skal brot $\frac{m}{n}$. Tekin verða fjögur skref:

1. Ef $n < 0$ skal margfalda bæði m og n með -1 og halda áfram í skref tvö. Ef $n > 0$ skal ekkert gera í þessu skrefi.
2. Frumþátta skal báðar tölurnar m og n . $m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_i$ og $n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_j$. Þá er $\frac{m}{n} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdots p_i}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_j}$.
3. Ef einhver frumtala finnst sem er bæði fyrir ofan og neðan strik má stytta hana í burtu. Allar mögulegar frumtölur eru styttaðar í burtu.
4. Frumtölurnar sem standa eftir fyrir ofan og neðan strik eru margfaldaðar aftur saman og eftir stendur fullstytt brot $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Dæmi 3.2.1. Fullstyttum brotið $\frac{525}{980}$

Lausn:

Hér munum við ganga í gegnum skrefin sem er lýst hér að ofan.

1. $980 > 0$ svo ekkert er gert í þessu skrefi.
2. Frumþáttum tölurnar eins og lýst er í kaflanum á undan. $525 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$ og $980 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$ Því má skrifa $\frac{525}{980} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7}$
3. Við sjáum að hægt er að stytta út eina fimmu og eina sjöu. Eftir stendur brotið $\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 7}$ sem hefur enga sameiginlega frumtölu fyrir ofan og neðan strik.
4. $3 \cdot 5 = 15$ og $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$. Fullstyttu brotið okkar er því $\frac{15}{28}$

Sumum gæti fundist við vera að eyða fullmiklu púðri í einfaldan hlut. Aðferðinni er skipt í fjögur skref til að einfalda útskýringuna. Sá sem er orðinn vanur reikningi gæti einfaldlega skrifað:

$$\frac{525}{980} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

3.3 Reiknireglur

Á ræðum tölum má leggja saman, draga frá, margfalda og deila. Þessar aðgerðir eru framkvæmdar svona:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs} \quad \text{og} \quad \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps - qr}{qs}.$$
$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} \quad \text{og} \quad \frac{p/q}{r/s} = \frac{ps}{qr}$$

Allar venjulegar reiknireglur gilda áfram um ræðar tölur.

Dæmi 3.3.1. Reiknum úr brotinu

$$\frac{(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{3}{2}}{5/2}$$

og fullstytthið það síðan.

Lausn:

$$\frac{(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{3}{2}}{5/2} = \frac{\frac{1 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{4 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2}}{5/2} = \frac{\frac{11}{12} \cdot \frac{3}{2}}{5/2} = \frac{(11 \cdot 3)/(12 \cdot 2)}{5/2} = \frac{33/24}{5/2} = \frac{33 \cdot 2}{24 \cdot 5} = \frac{66}{120}$$

Fullstyttum nú brotið:

$$\frac{66}{120} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{11}{20}$$

3.4 Röðun ræðra talna

Á heilu tölunum hafa flestir mjög skýra hugmynd um hvað það þýðir að ein tala sé stærri en önnur. Við vitum til dæmis að 3468 er stærri en 2497 og við skrifum $3468 > 2497$. Þetta finnst flestum augljóst og því eru útskýringar á því af hverju þetta gildir oft flóknar eða vandræðalegar.

Á ræðu tölunum eru hlutir ekki jafn einfaldir. Til dæmis þykir ekki augljóst hvor af tölunum $\frac{13}{512}$ og $\frac{256}{1023}$ er stærri. Sá sem sér það í hendi sér verður að teljast góður í reikningi. Ein leiðin væri einfaldlega að slá báðar tölurnar inn í vasareikni og sjá að $\frac{13}{512} \approx 0,02539$ og $\frac{256}{1023} \approx 0,02542$. Þá sést að $\frac{256}{1023} > \frac{13}{512}$ því að $0,02542 > 0,02539$. Margir stærðfræðingar eru óhrifnir af þessari aðferð. Við viljum geta reiknað hlutina á blaði án vasareiknis.

Ef tvö brot hafa sama nefnara er auðvelt að skera úr um hvort þeirra er stærra. Við vitum að brotið $\frac{p}{s}$ er stærra en $\frac{q}{s}$ og skrifum $\frac{p}{s} > \frac{q}{s}$ ef $p > q$. Þetta getum við sagt því að brotin hafa sameiginlegan nefnara s . T.d. er $\frac{7}{3}$ stærra en $\frac{6}{3}$ því bæði brotin hafa nefnarann 3. Þessa staðreynd getum við nýtt okkur þegar reynt er að meta almennari gerðir af brotum. Aðferðinni verður lýst hér:

Bera skal saman brotin $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$.

1. Lengjum fyrra brotið með tölunni d og það seinna með tölunni b

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \quad \text{og} \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

2. Nú hafa bæði brotin sama nefnarann (sem er bd). Við getum því sagt að $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ef $ad > bc$ en ef $ad < bc$ segjum við að $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

Dæmi 3.4.1. Hvort brotið er stærra $\frac{3}{4}$ eða $\frac{5}{12}$?

Lausn:

Lengjum fyrra brotið með 12 og það seinna með 4

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 12} = \frac{36}{48} \quad \text{og} \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{20}{48}$$

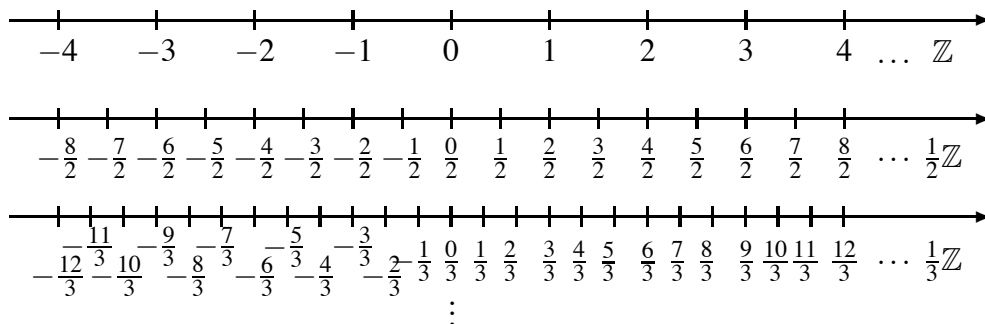
Nú hafa brotin sama nefnara, $36 > 20$ við segjum því að $\frac{3}{4} > \frac{5}{12}$

3.5 Talnalínan

Til að sjá betur fyrir sér röðu tölurnar er gagnlegt að geta staðsett þær á talnalínunni. Við þurfum að raða þeim þannig að $\frac{a}{b}$ sé hægra megin við $\frac{c}{d}$ þ.p.a.a. $\frac{a}{b}$ sé stærri en $\frac{c}{d}$.

Til að sjá fyrir sér hvar brotið $\frac{p}{q}$ er á talnalínunni er best að taka venjulegu talnalínuna fyrir heilar tölur og skipta svo bilinu milli 0 og 1 í q jafn stór bil. Byrjum nú í núlli og færum okkur til hægri á talnalínunni um eitt slíkt bil. Þennan punkt köllum við $\frac{1}{q}$. Ef við færum okkur aftur jafn langa vegalengd til hægri erum við staðsett í punktinum $\frac{2}{q}$. Þetta gerum við aftur og aftur þar til við erum búin að færa okkur p sinnum til hægri á talnalínunni. Þetta er punkturinn sem við köllum $\frac{p}{q}$.

Á mynd má sjá talnalínuna þrisvar sinnum. Fyrst með heilu tölunum merktar inn. Síðan brot með nefnara tvo og að lokum brot með nefnara þrjá.



Takið eftir að brot sem tákna sömu tölu lenda alltaf á sama stað á talnalínunni, eins og búast má við. Ef slíkt myndi ekki gilda værum við á villigötum.

4 Veldareikningur

4.1 Veldi

Það getur verið þreytandi að skrifa eitthvað eins og $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ aftur og aftur. Því innleiðum við *veldi* og skrifum a^5 í staðinn (af því að a kom fimm sinnum fyrir). Formleg skilgreiningin á heiltöluveldum er svona:

Skilgreining 4.1.1. Ef a er tala þá setjum við $a^0 = 1$
Ef $n > 0$ er heiltala setjum við $a^n = a \cdot a^{n-1}$
Ef $n < 0$ er heiltala setjum við $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

Talan a í stærðtákninu a^n nefnist *veldisstofn* og talan n nefnist *veldisvísir*.

Dæmi 4.1.1. (a) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

(b) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$.

4.2 Reiknireglur

Við höfum eftirtaldar reiknireglur fyrir veldi:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Dæmi 4.2.1.

$$2^2 \cdot 2^3 \cdot 5^5 = 2^{(2+3)} \cdot 5^5 = 2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100000.$$

4.3 Rætur

Ef q er jákvæð heiltala og a er jákvæð tala þá er til nákvæmlega ein tala $x \geq 0$ þannig að $x^q = a$. Þessi tala x nefnist q -ta rótin af a og er táknuð með $\sqrt[q]{a}$. Um rætur gilda eftirtaldar reglur:

$$\sqrt[q]{ab} = \sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b},$$

$$\sqrt[q]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}},$$

$$\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p,$$

$$\sqrt[sq]{a^{sp}} = \sqrt[q]{a^p},$$

$$\sqrt[sq]{a} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a}}.$$

Við táknum $\sqrt[q]{a}$ með $\sqrt{a}$ og nefnum þessa stærð *ferningsrót* eða *kvaðratrót*.

Ferningsrótin af a segir okkur hver kantlengdin er í ferningi með flatarmálið a . Talan $\sqrt[3]{a}$ er oft kölluð *teningsrót* eða *verpilrót*. Teningsrótin af a segir okkur hver kantlengdin er í reglulegum teningi með rúmmál a . Orðið *verpill* er gamalt og fallegt orð fyrir tening.

Athugið að ræturnar virða ekki samlagningu, þ.e.a.s. almennt er $\sqrt[q]{a+b} \neq \sqrt[q]{a} + \sqrt[q]{b}$. Það er raunar mjög algengt að fólk geri þá villu í útreikningum að setja jafnaðarmerki á milli þessara stærða.

Dæmi 4.3.1. $\sqrt[4]{16} = 2$ því að $2^4 = 16$

$\sqrt[3]{27} = 3$ því að $3^3 = 27$

$\sqrt{64} = 8$ því að $8^2 = 64$

4.4 Ræðar tölur í veldisvísi

Látum nú r vera ræða tölu og skrifum hana sem brot af heilum tölum $r = p/q$ þar sem q er náttúrleg tala. Síðan skilgreinum við a í veldinu r með jöfnunni

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Fjórða rótarreglan hér að framan segir okkur að skilgreiningin sé óháð því hvaða brot við veljum sem framsetningunni á ræðu tölunni r og þriðja reglan segir að $a^r = (\sqrt[q]{a})^p$. Með því að prjóna saman veldareglur og rótareglur er hægt að sýna fram á að veldareglurnar gilda einnig fyrir ræða veldisvísa, en þá þarf að gera ráð fyrir að veldisstofninn a sé jákvæður eða 0.

Dæmi 4.4.1. Látum $a > 0$. Einfaldið $(a^{x+y})^z (a^{x-z})^y$.

Lausn:

Við beitum veldareglunum og fáum:

$$(a^{x+y})^z (a^{x-z})^y = a^{zx+zy} a^{yx-zy} = a^{zx+zy+yx-zy} = a^{zx+yx} = (a^{z+y})^x.$$

Dæmi 4.4.2. Látum $a, b > 0$. Einfaldið

$$\sqrt[3]{\sqrt{a^3} \sqrt[4]{b^6}}.$$

Lausn:

Hér beitum við reiknireglum fyrir rætur:

$$\sqrt[3]{\sqrt{a^3} \sqrt[4]{b^6}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} \sqrt[3]{\sqrt[4]{b^6}} = \sqrt{a} \sqrt[4]{b^2} = \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

5 Mengi

5.1 Nokkur grunnhugtök um mengi

Mengi er safn aðgreindra hluta eða hugtaka sem saman mynda eina heild. Hlutirnir eða hugtökin sem mynda mengið nefnast *stök* þess. Ef x er stak í menginu A , þá skrifum við $x \in A$ eða $A \ni x$. Ef x er ekki stak í menginu A þá skrifum við $x \notin A$ eða $A \not\ni x$.

Oft eru mengi sett fram sem upptalning á stökum. Til dæmis er

$\{1, 2, 3, \dots\}$ mengi náttúrlegra talna,

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$ mengið sem samanstendur af fimm fyrstu jákvæðu sléttu tölunum og

$\{2, 3, 5, 7, 11\}$ mengið sem samanstendur af fimm fyrstu frumtölunum.

Tvö mengi A og B eru sögð vera jöfn, ef þau innihalda sömu stök og við skrifum þá $A = B$. *Tómamengið* er mengi sem inniheldur ekkert stak. Það er táknað með $\emptyset$.

Mengið A er sagt vera *hlutmengi* í menginu B ef sérhvert stak í A er einnig stak í B . Við skrifum þá $A \subset B$ eða $A \subseteq B$. Athugið að hlutmengjatakinn $\subset$ og $\subseteq$ þýða það sama og eru notuð jöfnum höndum í stærðfræðitextum.

Dæmi 5.1.1. (a) Setjum $A = \{1, 2, \frac{2}{4}, \pi\}$, $B = \{\pi, 2, \frac{2}{4}, 1\}$ og $C = \{1, \frac{2}{4}\}$.

Þá er $A = B$ því að öll stök í A eru líka í B og öfugt. Punkturinn hér er sá að það skiptir ekki máli í hvaða röð stökin í menginu eru talin.

Hér gildir líka $C \subset A$ og $C \subset B$

(b) Setjum $A = \{\text{Klukkan, hestur, rauð Toyota}\}$ og $B = \{\text{hestur, græn Toyota, klukkan}\}$

Nú er $A \neq B$ því að Toyotan í A er rauð, en sú í B er græn.

5.2 Yrðingar til að skilgreina mengi

Stundum getur verið gagnlegt að skilgreina mengi með stökum sem öll hafa einhverja ákveðna eiginleika. Við þurfum að geta táknað þetta mengi á einfaldan hátt en stundum eru stökin óendanlega mörg og því ómögulegt að beinlínis telja þau upp eins og í dæmunum að ofan. Við leyfum okkur því að skilgreina mengi með því að skrifa svokallaðar yrðingar um x inni menngjasvigana og segja að x sé stak í menginu ef og aðeins ef allar yrðingarnar um það eru sannar.

Formlegri leið til að segja sama hlutinn er:

Hægt er að setja fram mengi með opinni yrðingu $p(x)$, þannig að mengið samanstandi af öllum stökum x þannig að $p(x)$ sé sönn yrðing.

Þetta verður best skýrt með dæmum.

Dæmi 5.2.1. (a) Látum $A = \{x \text{ er framtala ; } x \text{ hefur } 3 \text{ í einingasætinu}\}$ Nú getum við sagt að t.d. $3 \in A$, $13 \in A$ $103 \in A$. Því allar þessar tölur eru frumtölur með 3 í einingarsætinu.

Reyndar er hægt að sýna að A hefur óendanlega mörg stök.

33 er ekki stak í A (ritað $33 \notin A$) því að 33 er ekki framtala. 51 er heldur ekki stak í A því að hún hefur 1 í einingasætinu en ekki 3.

(b) Látum $B = \{x \text{ er bíll} ; x \text{ er Subaru} , x \text{ er hvítur}\}$

Bíll foreldra höfundar síðan í æsku er í þessu mengi því hann var hvítur Subaru (og sér í lagi var hann bíll). Bíllinn sem höfundur horfir á útum gluggan þegar þessi setning er skrifuð er ekki í menginu því hann er grænn.

(c) Látum $C = \{x \text{ er heiltala} ; x \text{ er slétt tala} , x \text{ er oddatala}\}$.

Hér er $C = \emptyset$ því að engin tala getur verið bæði slétt tala og oddatala í einu.

Athugasemd:

1. Þegar mengi er skilgreint með yrðingum verður að passa að þær eigi við. Til dæmis er merkingalaust að skrifa $A = \{x \text{ er heiltala} ; x \text{ er hvít}\}$ því að tölur hafa ekki liti. Fullyrðingin 2 er hvít tala er hvorki sönn né ósönn heldur er hún merkingalaus.
2. Hefð er fyrir því að láta fyrstu yrðinguna fjalla um hvernig hluti er verið að vinna með. Í (c)-lið er byrjað á því að taka fram að x sé heiltala. Ef það væri ekki tekið fram væri næsta yrðing, x er slétt tala, illa skilgreind miðað við athugasemdina á undan.

5.3 Þekkt mengi

Ýmis mengi eru táknuð með ákveðnum bókstöfum og ákveðnu lettri, t.d. talnakerfin. Þau sem við höfum þegar fjallað um eru:

$\mathbb{N}$ mengi náttúrlegra talna.

$\mathbb{Z}$ mengi heilla talna.

$\mathbb{Q}$ mengi ræðra talna.

Önnur mengi sem fjallað verður um seinna eru:

$\mathbb{R}$ mengi rauntalna.

$\mathbb{C}$ mengi tvinntalna.

Um talnakerfin gildir:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Við skilgreinum líka fleiri mengi:

$$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z}; x > 0\} \quad \mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0\} \quad \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$$

og

$$\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z}; x < 0\} \quad \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q}; x < 0\} \quad \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}.$$

5.4 Aðgerðir á mengjum

Ef A og B eru mengi þá táknum við mengi allra staka sem eru annaðhvort í A eða í B með $A \cup B$. Þetta mengi köllum við *sammengi* A og B .

Formlega skilgreiningin er:

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ eða } x \in B\},$$

Mengi allra staka sem eru bæði í A og B er táknað með $A \cap B$. Þetta mengi er kallað *Sniðmengi* A og B .

Formlega skilgreiningin er:

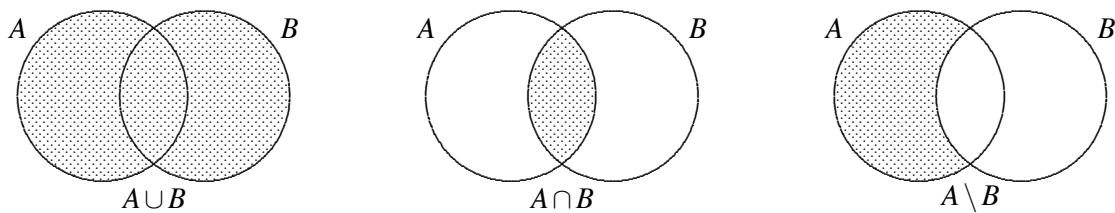
$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ og } x \in B\}$$

Mengi allra staka sem eru í A en ekki í B er kallað *mismunur* (eða *mengjamismunur*) A og B . Hann er táknaður með $A \setminus B$

Formlega skilgreiningin er:

$$A \setminus B = \{x; x \in A \text{ og } x \notin B\}.$$

Munið að samtengingin „eða“ er hér notuð eins og alltaf í stærðfræði í merkingunni „og/eða“.



Dæmi 5.4.1. Látum $A = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ er slétt tala}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ er oddatala}\}$ og $C = \{2, 3, 5, 6, 8\}$

Hér er $A \cup B = \mathbb{N}$ því að allar náttúrulegar tölur eru annað hvort sléttar tölur eða oddatölur.

$A \cap B = \emptyset$ því að engin tala er bæði slétt tala og oddatala.

$A \setminus B = A$ því að ekkert stak í A er líka í B og því er ekkert dregið frá.

$A \cap C = \{2, 6, 8\}$

$C \setminus B = \{2, 6, 8\}$

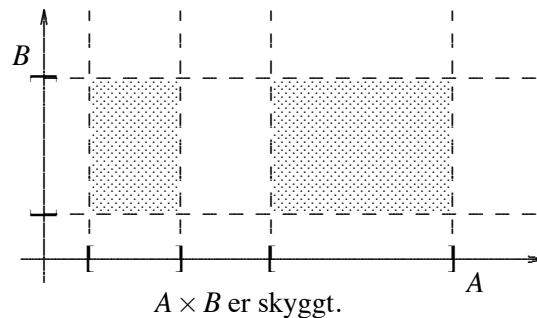
Athugasemd:

Takið eftir að í formlegu skilgreiningunum á $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$ er nostast við yrðingar. Fyrsta yrðingin í öllum skilgreiningunum er eins, hún segir ekkert nema „ x “. Það er til að virða hefðina sem sagt er frá í athugasemd 2 að ofan. Fyrst þarf að taka fram hvernig stök mengið getur innihaldið. Mengið sem verið er að skilgreina getur innihaldið hvers skonar stök sem er (við vitum ekki fyrirfram hvers skonar stök eru í A og B) og í staðin fyrir að skrifa „ x má vera hvað sem er“ ritum við einfaldlega „ x “.

5.5 Faldmengi

Faldmengi eða margfeldismengi $A \times B$ tveggja mengja A og B er skilgreint sem mengi allra para (a, b) af stökum þ.a. $a \in A$ og $b \in B$, með yrðingum er þetta skrifað:

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ og } b \in B\}.$$



Dæmi 5.5.1. Látum $A = \{2, 3, 6\}$

$(2, \frac{5}{4})$ er stak í $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$. Það er ritað $(2, \frac{5}{4}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$

$(2, \frac{5}{4})$ er líka stak í $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ því að $2 = \frac{2}{1}$ er í báðum mengjunum $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Q}$

$(2, \frac{5}{4})$ er líka stak í menginu $A \times \mathbb{Q}$

$(2, \frac{5}{4})$ er ekki stak í menginu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ því $\frac{5}{4}$ er ekki í $\mathbb{N}$

5.6 Fyllimengi

Þegar verið er að fjalla um hlutmengi A í ákveðnu mengi X , þá er mengið $X \setminus A$ oft nefnt *fyllimengi* hlutmengisins A , það er einnig táknað A^c eða $\complement A$. Takið eftir að í framsetningunni A^c kemur X ekki fram, þó að það skipti í raun höfuðmáli. Mengið X er kallað *almengi* og inniheldur alla hlutina sem verið er að vinna með. Oftast er ljóst af samhenginu hvað þetta almengi er.

Ef mengi er skilgreint með yrðingum er þumalputtaregla sem segir að almengið sé ákvarðað af fyrstu yrðingunni. Skv. fyrri athugasemdum er það einmitt yrðingin sem ákvarðar hvers konar hluti unnið er með.

Dæmi 5.6.1. (a) Setjum $A = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ er deilanleg með } 5\}$.

Hér má draga þá ályktun að almengið sé $\mathbb{N}$

Því er $A^c = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ er ekki deilanleg með } 5\}$

(b) Setjum $B = \{x \text{ er orð}; x \text{ er nafnorð}; x \text{ byrjar á bókstafnum } n\}$

Hér má draga þá ályktun að almengið sé mengi allra orða.

Því er $B^c = \{x \text{ er orð}; x \text{ er ekki nafnorð eða } x \text{ byrjar á öðrum bókstaf en } n\}$

Önnur leið til að skrifa B^c er:

$B^c = \{x \text{ er orð}; x \text{ er ekki nafnorð}\} \cup \{x \text{ er orð}; x \text{ byrjar ekki á bókstafnum } n\}$

5.7 Meira um aðgerðir á mengjum

Auðvelt er að sannfæra sig um eftirfarandi reiknireglur á mengjum:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Þessi regla segir að það skipti ekki máli í hvaða röð maður tekur sammengi og sniðmengi. Því má skrifa $A \cup B \cup C$ eða $A \cap B \cap C$ og sleppa öllum svigum. Sérstaklega skal taka fram að almennt gildir:

$$(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$$

Það er að segja það skiptir höfuðmáli hvaða aðgerð er gerð fyrst. Þegar sam- og sniðmengjum er blandað saman þarf því alltaf að nota sviga. Það að skrifa $A \cup B \cap C$ eða $A \cap B \cup C$ er algjörlega merkingarlaust.

Dæmi 5.7.1. Gefin séu mengin $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{2, 4, 6, 8, 10\}$ og $C := \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

a) Finnið $(A \cup B) \cap C$.

Lausn: Byrjum á að finna $A \cup B$. Það er mengi allra staka sem eru stök í öðru hvoru mengjanna A, B , þ.e. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$.

$(A \cup B) \cap C$ inniheldur síðan nákvæmlega þau stök sem eru bæði í $A \cup B$ og C . $(A \cup B) \cap C = \{6, 8, 10\}$.

b) Finnið $A \cup (B \cap C)$.

Lausn: Nú er $B \cap C = \{6, 8, 10\}$ og þá er $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$. Tökum eftir að $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$. Það er s.s. ekki sama í hvaða röð aðgerðirnar eru framkvæmdar ef bæði eru tekin sammengi og sniðmengi.

c) Finnið $(A \cap B) \cap C$.

Lausn: Nú er $A \cap B = \{2, 4\}$ og þá er $(A \cap B) \cap C = \{2, 4\} \cap C = \emptyset$.

5.8 Enn meira um aðgerðir á mengjum

Við skilgreinum líka sam- og sniðmengi af fleiri en tveimur mengjum. Ef $n \in \mathbb{N}$ og $A_1, A_2, \dots, A_n$ eru mengi þá skilgreinum við sammengi og sniðmengi þeirra með

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x; x \in A_i \text{ fyrir eitthvert } i = 1, \dots, n\}$$
$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x; x \in A_i \text{ fyrir sérhvert } i = 1, \dots, n\}.$$

Í raun er $\bigcup_{i=1}^n A_i$ bara önnur leið til að skrifa $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$ og $\bigcap_{i=1}^n A_i$ er bara önnur leið til að skrifa $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$.

Stundum kemur fyrir að stærðfræðingar vilja taka sammengi af óendanlega mörgum mengjum. Það getur orðið ruglingslegt að útskýra hvernig það er táknað í prenti en hér verður

gerð heiðarleg tilraun til að gera einmitt það:

Segjum að við höfum eitthvað safn af mengjum (eða mengi af mengjum) þannig að búið sé að merkja öll mengin með einhverjum *vísi* (*enska: index*) úr einhverju vísismengi I . Þ.e.a.s. öll mengin í safninu má tákna með A_i með $i \in I$. Þá er sammengi allra þessara mengja táknað með $\bigcup_{i \in I} A_i$.

Með yrðingum er þetta skilgreint:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x; x \in A_i \text{ fyrir eitthvað } i \in I\}$$

Eins eru sniðmengin skilgreind:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x; x \in A_i \text{ fyrir öll } i \in I\}$$

Tökum nokkur dæmi um þetta.

Dæmi 5.8.1. (a) Látum $\mathbb{P}$ tákna mengi allra frumtalna.

Fyrir sérhvert $p \in \mathbb{P}$ skulum við láta A_p vera mengi allra náttúrulegra talna sem p gengur uppí. Með yrðingum skrifum við:

$$A_p = \{n \in \mathbb{N}; p \text{ gengur uppí } n\}$$

Hér er vísismengið $\mathbb{P}$ og

$$\bigcup_{p \in \mathbb{P}} A_p = \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Það er af því að sérhver tala í $\mathbb{N}$ sem er stærri en 1 er deilanlegri með einhverri frumtölu, og er því í einhverju af mengjunum A_p .

(b) Fyrir sérhvert $n \in \mathbb{Z}$ skulum við láta B_n vera mengi allra almennra brota sem hafa n sem teljara þegar þau eru fullstýtt. Með yrðingum skilgreinum við þetta mengi:

$$B_n = \{r \in \mathbb{Q}; \text{Ef } r = \frac{a}{b} \text{ og } \frac{a}{b} \text{ er fullstýtt brot þá er } a = n\}$$

Hér er $\mathbb{Z}$ vísismengið og:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n = \mathbb{Q}$$

Af því að sérhvert almennt brot er í einhverju af mengjunum A_n .

(c) Látum T vera mengið sem hefur sem stök öll tré í heiminum. Ef $t \in T$ er eitthvað tré látum við mengið L_t vera mengi allra laufblaða á trénu t . Með yrðingum skrifum við:

$$L_t = \{l \text{ er laufblað}; l \text{ er á trénu } t\}$$

Hér er T vísismengið og

$$\bigcup_{t \in T} L_t = \{l \text{ er laufblað}; l \text{ er á einhverju tréi}\}$$

5.9 Nokkur dæmi

Dæmi 5.9.1. Látum $A \subset X$ og $B \subset Y$. Táknið fyllimengi $A \times B$ í $X \times Y$.

Lausn:

Fyllimengið samastendur af öllum tvenndum (a, b) þar sem annaðhvort $a \notin A$ eða $b \notin B$ eða bæði, þ.e.

$$(A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c).$$

Einnig má tákna fyllimegnið á fleiri vegu, t.d. með $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$.

Dæmi 5.9.2. Táknið $A \setminus B$ með því að nota sniðmengi og fyllimengi.

Lausn:

Öll stök í A eru annaðhvort í B eða B^c . Þau stök sem eru í A en ekki B eru því bæði í A og B^c , þannig að $A \setminus B = A \cap B^c$.

Dæmi 5.9.3. Látum $p_1, p_2, \dots, p_n$ vera náttúrlegar tölur. Táknun með $p_i \mathbb{Z}$ mengi þeirra heiltalna sem p_i gengur upp í þar sem $1 \leq i \leq n$. Táknið mengi þeirra talna sem eru deilanlegar með öllum tölunum $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Lausn:

Mengi þeirra talna sem eru deilanlegar með öllum tölunum $p_1, \dots, p_n$ er sniðmengi talna sem eru deilanlegar með $p_1, p_2, \dots, p_n$. Þ.e.

$$\bigcap_{i=1}^n p_i \mathbb{Z}.$$

6 Talnakerfin

6.1 Talnakerfin

Nú þegar höfum við kynnt nokkur talnakerfi til sögunnar. Við skulum rifja þau upp:

1. Fyrst var mengi *náttúrulegra* talan kynnt til sögunnar. Það er mengið $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ og við táknun það með stafnum $\mathbb{N}$. Á þessu mengi er hægt að leggja saman, og margfalda. Við ræddum um frumþáttun á þessu mengi, og einnig hvernig deila skal með afgangi.
2. Á náttúrulegu tölunum er ekki alltaf hægt að framkvæma aðgerðina frádrátt. Þess vegna bættum við neikvæðu heilu tölunum í talnakerfið okkar ásamt tölunni 0. Þetta talnakerfi köllum við *heilu tölurnar* og táknun með stafnum $\mathbb{Z}$. Á því má gera sömu hluti og á $\mathbb{N}$ og þar að auki er hægt að draga frá.
3. Heilu tölurnar eru ófullkomnar í þeim skilningi að ekki er hægt að framkvæma raunverulega deilingu á þeim. Þess vegna voru *ræðu tölurnar* búnar til. Þær eru táknaðar með $\mathbb{Q}$. Á ræðu tölunum er hægt að leggja saman, draga frá, margfalda og deila. Frumþáttun verður hins vegar merkingarlaust hugtak á þessu mengi.

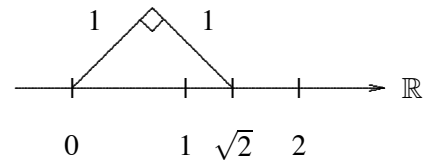
6.2 Rótin af tveimur

Í fornöld héldu menn lengi að allar tölur væru ræðar tölur. Forn-grikkir túlkuðu nær alla stærðfræðina sína á rúmfræðilegan máta og þeir héldu að lengdina á sérhverju línustriki væri hægt að tákna sem brot heilla talna, a/b .

Fræg þjóðsaga segir að dag nokkurn í forn-Grikklandi hafi maður að nafni Hippasus fundið tölu sem er ekki hægt að tákna sem almennt brot. Hann hafði nefnilega fundið töluna $\sqrt{2}$ og fullyrti að ekki væru til heiltölur a og b þannig að $\sqrt{2} = a/b$.

Honum var drekkt fyrir að láta sér detta slíka frásinnu í hug.

Töluna $\sqrt{2}$ má túlka rúmfræðilega sem lengd langhliðar í rétthyrndum þríhyrningi með skammhliðar af lengd 1. Ef þríhyrningurinn hefur skammhliðar $a = 1$ og $b = 1$ og langhlið c segir regla Pýþagórasar okkur nefnilega að $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



Það kemur í ljós að Hippasus hafði rétt fyrir sér. Það eru ekki til heiltölur a og b þannig að $\sqrt{2} = a/b$. Sönnunin á því er frekar einföld og hún verður látin fylgja með fyrir áhugasama lesendur:

Þetta verður sannað með mótsögn.

Gerum ráð fyrir að til séu heilar tölur a og b þannig að $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Fullstýttum nú brotið, þ.e.a.s. skrifum $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ þar sem $\frac{c}{d}$ er fullstýtt brot.

Þar sem $\frac{c}{d}$ er fullstýtt getur frumtalan 2 í mesta lagi gengið uppí aðra af tölunum c og d því ef hún gengi upp í þær báðar þá væri brotið $\frac{c}{d}$ ekki fullstýtt.

Nú fæst

$$\sqrt{2} = \frac{c}{d} \quad \text{sem jafngildir} \quad d\sqrt{2} = c$$

Ef stæðurnar beggja vegna jafnaðarmerkisins eru settar í annað veldi fæst:

$$2d^2 = c^2$$

Nú sést að frumtalan 2 gengur uppí töluna c^2 . Því hlýtur 2 líka að ganga upp í töluna c svo til er heiltala c' þannig að $c = 2c'$.

en þá er

$$2d^2 = c^2 = (2c')^2 = 4(c')^2 \quad \text{sem jafngildir} \quad d^2 = 2(c')^2$$

Við sjáum því að frumtalan 2 gengur uppí töluna d^2 og þar af leiðandi upp í töluna d .

Þetta er mótsögn af því að við höfum nú þegar sýnt að 2 gengur uppí c en 2 getur ekki gengið uppí bæði c og d því að $\frac{c}{d}$ var fullstýtt brot.

Upphaflega forsendan okkar hlýtur því að vera röng!

Við komumst að þeirri niðurstöðu að ekki eru til heilar tölur a og b þannig að $\sqrt{2} = a/b$.

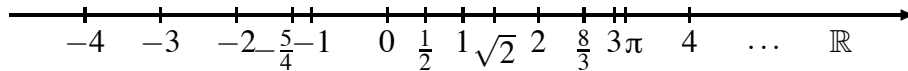
6.3 Rauntölurnar

Af kaflannum á undan sést að mengi ræðu talnanna $\mathbb{Q}$ er ekki alveg fullkomið. Það er eins og það vanti tölur inn á milli. Mengi ræðra talna er því stækkað svo að „engar tölur vanti“. Þetta stækkaða mengi köllum við *Rauntölur* og táknum með stafnum $\mathbb{R}$.

Tölurnar sem ekki er hægt að skrifa sem brot heilla talna köllum við *óræðar tölur*. Við þekkjum margar óræðar tölur, t.d. er talan $\sqrt{p}$ óræð fyrir allar frumtölur p . Talan π er líka óræð. Ekkert tákni er notað fyrir óræðar tölur, heldur táknum við það einfaldlega með mengjamismuninum $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Á vissan hátt má færa rök fyrir því að óræðu tölurnar séu miklu fleiri en ræðu tölurnar. Sá rökstuðningur verður hins vegar að bíða betri tíma.

Á mynd má sjá ýmsar tölur staðsettar á talnalínunni:



Athugasemd:

Hér var mengi rauntalna ekki skilgreint formlega. Sú skilgreining er allt of flókin til að setja fram hér.

6.4 Reiknireglur

Á mengi rauntalna má leggja saman, draga frá, margfalda og deila. Sömu reiknireglur gilda á rauntölunum og á hinum talnakerfunum, við skulum rifja þær upp:

$(a + b) + c = a + (b + c)$	(tengiregla samlagningar),
$(ab)c = a(bc)$	(tengiregla margföldunar),
$a + b = b + a$	(víxlregla samlagningar),
$ab = ba$	(víxlregla margföldunar),
$a(b + c) = ab + ac$	(dreifiregla),
$a + 0 = a$	(0 er samlagningarhlutleysa),
$1a = a$	(1 er margföldunarhlutleysa),
$0a = 0$	(margföldun með núllu gefur núll).

Á mengi rauntalna er líka röðun. Um þessa röðun gilda nokkrar reglur sem auðvelt er að sanna:

ef $a < b$ og $b < c$, þá er $a < c$	(röðun er gegnvirk),
ef $a < b$ þá er $a + c < b + c$	(röðun er óbreytt við samlagningu),
ef $a < b$ og $c > 0$, þá er $ac < bc$	(röðun er óbreytt við margföldun með jákvæðri tölu),
ef $a < b$ og $c < 0$, þá er $bc < ac$	(röðun snýst við þegar margfaldað er með neikvæðri tölu).

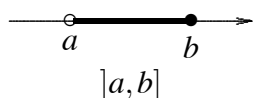
6.5 Óendanleiki

Öll þau talnakerfi sem við höfum rætt hér, náttúrlegu tölurnar, heilu tölurnar, ræðu tölurnar og rauntölurnar, eru *óendanleg og ótakmörkuð*, ýmist í eina eða tvær áttir. Í efri áttina þýðir það að fyrir hverja tölu a í einhverju þessara mengja má finna aðra tölu b í sama mengi þannig að $a < b$. Þegar við viljum hagnýta okkur þennan eiginleika þurfum við því

að taka í notkun nýtt tákn ∞ , sem við köllum óendanleikatákn. Við getum hugsað okkur að það bætist við rauntölurnar þannig að $\infty > a$ fyrir öll $a \in \mathbb{R}$ (og þar með öll $a \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ vegna þess að við lítum á þau sem hlutmengi í $\mathbb{R}$). Á sama hátt og neikvæðu tölurnar eru fengnar frá hinum jákvæðu höfum við $-\infty$ þannig að $-\infty < a$ fyrir öll $a \in \mathbb{R}$.

Hafa ber í huga að ∞ og $-\infty$ eru ekki tölur og ekki er rétt að nota þær sem slíkar. Við getum ekki án frekari umhugsunar notað þessi tákn í útreikningum þó freistingin geti verið mikil. Sem dæmi um óvænta hegðun þessara tákna þarf $-\infty$ alls ekki að vera samlagningarandhverfa ∞ , þ.e. jafnan $-\infty + \infty = 0$ þarf ekki að gilda.

6.6 Bil í rauntölunum



Látum I vera hlutmengi í $\mathbb{R}$. Við köllum hlutmengið I *bil* ef „engin göt eru í I “. Með öðrum orðum, við segjum að mengið I sé bil ef að við getum táknað það á talanlínunni með breiðu línustriki með engum götum. Á hvorn endapunkt striksins setjum við annað hvort fylltan hring eða tóman, eftir því hvort sá endapunktur sé með í bilinu eða ekki. Ef punkturinn á að vera

með setjum við fylltan hring, annars tóman.

Formlega skilgreiningin á bili er svohljóðandi:

Skilgreining 6.6.1. Hlutmengi I í $\mathbb{R}$ kallast bil ef að fyrir sérvert $a, b \in I$ og $c \in \mathbb{R}$ þ.a. $a < c < b$ þá gildir $c \in I$

Til að tákna bil í prenti þarf að nota tvær tölur og hornklofana $[$ og $]$. Hér verða nokkur bil útskýrð í töluðu máli:

Bilið $[a, b]$ er mengi allra rauntalna sem eru á milli a og b , meðtaldar eru tölurnar a og b .

Bilið $]a, b[$ er mengi allra rauntalna sem eru á milli a og b en hér eru a og b frátaldar.

Bilið $]a, \infty[$ er mengi allra talna sem eru stærri en a , hér er a ekki tekið með.

Síðan er hægt að snúa hornklofunum á allskonar vegu til að fá allskyns bil.

Hér er tæmandi listi yfir allar gerðir af bilum skilgreind með yrðingum:

Ef $a, b \in \mathbb{R}$ og $a < b$, þá skilgreinum við:

$$\begin{aligned}]a, b[&= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} && (\text{opið bil}), \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} && (\text{lokað bil}), \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} && (\text{hálf-opið bil}), \\]a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} && (\text{hálf-opið bil}), \\]-\infty, a[&= \{x \in \mathbb{R}; x < a\} && (\text{opin hálf lína}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\} && (\text{lokuð hálf lína}), \\]a, \infty[&= \{x \in \mathbb{R}; x > a\} && (\text{opin hálf lína}), \\ [a, \infty[&= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\} && (\text{lokuð hálf lína}), \\]-\infty, \infty[&= \mathbb{R} && (\text{öll rauntalnalínan}), \\ [a, a] &= \{a\} && (\text{eins punkts bil}). \end{aligned}$$

6.7 Efri og neðri mörk

Einn af grundvallareiginleikum rauntalna er setningin um efra og neðra mark.

Setning 6.7.1 • Gerum ráð fyrir að A sé hlutmengi í $\mathbb{R}$ og að það sé takmarkað að ofan.

Þá er til ótvírætt ákvörðuð tala $S \in \mathbb{R}$ sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði

1. Ef $a \in A$ þá gildir $S \geq a$.
2. Ef $L \in \mathbb{R}$ er einhver önnur tala sem uppfyllir skilyrði eitt þá er $S \leq L$.

Þessi tala S er kölluð efra mark mengisins A og við skrifum

$$\sup A = S$$

• Gerum ráð fyrir að A sé hlutmengi í $\mathbb{R}$ og að það sé takmarkað að neðan.

Þá er til ótvírætt ákvörðuð tala $s \in \mathbb{R}$ sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði

1. Ef $a \in A$ þá gildir $s \leq a$.
2. Ef $l \in \mathbb{R}$ er einhver önnur tala sem uppfyllir skilyrði eitt þá er $s \geq l$.

Þessi tala s er kölluð neðra mark mengisins A og við skrifum

$$\inf A = s$$

Talan S er kölluð efra mark mengisins A útaf eiginleika hennar, í töluðu máli er hún minnsta talan sem er stærri en eða jöfn sérhverju staki í A .

Eins er tala s í stærsta talan sem er minna en eða jöfn sérhverju staki í A .

Þar sem rauntölurnar voru ekki skilgreindar formlega er ómögulegt að sanna þessa reglu hér. Þó er hægt að segja að í vissum skilningi þá var skilgreiningin á rauntölunum valin þannig að hægt væri að sanna þessa reglu.

6.8 Nokkur dæmi

Dæmi 6.8.1. Gerum ráð fyrir að a sé ræð tala n sé náttúruleg tala og að $x > 0$ sé óræð. Skerið úr um hvort eftirfarandi tölur eru ræðar eða óræðar:

(a) $a + x$

(b) ax

(c) $\sqrt[n]{x}$

Lausn:

Þar sem a er ræð má skrifa $a = p/q$ þar sem p og q eru heilar tölur. Í lausninni munum við því alltaf skrifa p/q í staðin fyrir a

(a)

Gerum ráð fyrir að $p/q + x$ sé ræð tala og sýnum að það leiði til mótsagnar.

Þar sem $p/q + x$ er ræð þá eru til heilar tölur r og s þ.a.

$$\frac{p}{q} + x = \frac{r}{s} \quad \text{sem jafngildir} \quad x = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{qr - sp}{sq}$$

En það er mótsögn því að $qr - sp$ og sq eru heilar tölur, og þarsem x er óræð á ekki að vera hægt að skrifa x sem brot af heilum tölum. Því hlýtur upphaflega forsendan okkar að vera röng og því hlýtur $p/q + x$ að vera óræð tala.

(b)

Gerum ráð fyrir að $\frac{p}{q}x$ sé ræð tala.

Þá eru til heilar tölur r og s þ.a.

$$\frac{p}{q}x = \frac{r}{s} \quad \text{sem jafngildir} \quad x = \frac{r/s}{p/q} = \frac{rq}{ps}$$

En það er mótsögn því að x er óræð. Því er $\frac{p}{q}x$ óræð tala.

(c)

Gerum ráð fyrir að $\sqrt[n]{x}$ sé ræð.

Þá eru til heilar tölur r og s þ.a.

$$\sqrt[n]{x} = \frac{r}{s} \quad \text{sem jafngildir} \quad x = \left(\frac{r}{s}\right)^n = \frac{r^n}{s^n}$$

sem er mótsögn því x er óræð. Því er $\sqrt[n]{x}$ óræð tala.

Dæmi 6.8.2. Látum $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}; r > 0\}$. Fyrir sérhvert $r \in \mathbb{R}_+$ þá skilgreinum við mengið $A_r = [-r, r]$.

Lýsið menginu

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}_+} A_r$$

Á einfaldan hátt.

Lausn:

Tökum eftir að fyrir allar jákvæðar tölur r þá er $0 \in [-r, r]$. Með öðrum orðum þá er $0 \in A_r$ fyrir öll $r \in \mathbb{R}_+$. En þá er $0 \in \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+} A_r$ skv. skilgreiningu.

Gerum nú ráð fyrir að x sé einhver tala sem er stærri en 0. Þá er ljóst að $x \notin [-x/2, x/2]$.

Með öðrum orðum er $x \notin A_{x/2}$. Sér í lagi er x ekki í öllum mengjunum A_r , $r \in \mathbb{R}_+$. En þá er $x \notin \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+} A_r$.

Á svipaðan hátt sést að ef $x < 0$ þá er $x \notin \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+} A_r$.

Við höfum því séð að 0 er eina talan sem er í menginu $\bigcap_{r \in \mathbb{R}_+} A_r$

Við getum því skrifað

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}_+} A_r = \{0\}$$

Dæmi 6.8.3. (a)

Finnið efra mark mengisins

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x \text{ er stærra en núll og } x^2 \leq 2\}.$$

(b)

Finnið efra mark mengisins

$$B = \{x \in \mathbb{R}; x \text{ er stærra en núll og } x^2 < 2\}.$$

Lausn:

(a)

Með örlitlu innsæi er auðvelt að giska á að $S = \sqrt{2}$ gæti verið efra markið. Við skulum sýna að svo er. Til að gera það þurfum við að sýna að $\sqrt{2}$ uppfylli báða eiginleikana í skilgreiningunni.

1. Látum $a \in A$. Þá er $a^2 \leq 2$ skv. skilgreiningunni á menginu A . En þá er líka $a \leq \sqrt{2}$ svo að fyrri skilyrðið er uppfyllt.
2. Gerum ráð fyrir að L sé eitthvað annað stak sem að er þannig að $L \geq a$ fyrir öll $a \in A$.
Við vitum að talan $\sqrt{2}$ er í A því að $(\sqrt{2})^2 = 2 \leq 2$ svo að sér í lagi gildir $L \geq \sqrt{2}$.
Seinna skilyrðið er þess vegna einnig uppfyllt.

Við sjáum nú að $\sqrt{2}$ er efra mark á A og við skrifum þess vegna

$$\sup A = \sqrt{2}$$

(b)

Við byrjum á svipaðan hátt og í (a)-lið. Við giskum meira segja á sömu töluna. Seinni liðurinn verður aðeins þyngri.

1. Látum $a \in A$. Þá er $a^2 < 2$ skv. skilgreiningunni á menginu A . En þá er líka $a < \sqrt{2}$ það hefur sér í lagi í för með sér $a \leq \sqrt{2}$ svo að fyrri skilyrðið er uppfyllt.
2. Látum nú L vera aðra tölu sem er þannig að $L \geq a$ fyrir öll $a \in A$. Við viljum sýna að $L \geq \sqrt{2}$.
Gerum ráð fyrir að $L < \sqrt{2}$ og sýnum að það leiði til mótsagnar.
Þar sem $L < \sqrt{2}$ þá er til tala u sem er þannig að $L < u < \sqrt{2}$.
Þá er $u^2 \leq (\sqrt{2})^2 = 2$ svo að $u \in A$.
Fyrst að $u \in A$ þá er $L \geq u$. En það er mótsögn því að u var valið minna en L .
Forsendan $L < \sqrt{2}$ hlýtur því að vera röng og við komumst að þeirri niðurstöðu að $L \geq \sqrt{2}$.

Við sjáum nú að $\sqrt{2}$ er efra mark á B og við skrifum þess vegna

$$\sup B = \sqrt{2}$$

7 Stæður

7.1 Summu- og margfeldistáknið

Stundum kemur fyrir að stærðfræðingar vilja leggja saman marga liði.

Til dæmis

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 \quad \text{eða} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{87}$$

Í báðum þessum dæmum ætti að vera augljóst hvað summan þýðir þó að svona þrípunktur sé ekki alvöru stærðfræðitákn.

Í fyrri dæminu er verið að leggja saman allar tölur frá einum uppí hundrað og í seinna dæminu er verið að leggja saman einn á móti sérhverri tölu frá fjórum uppí áttatíu-og-sjö.

Stundum vinnum við samt með flóknari gerðir af summum og þá dugar svona táknmál

skammt.

Þess vegna innleiðum við summutáknið $\sum$

Segjum að við viljum leggja saman allar tölur af gerðinni $n(n+1)$ þar sem n gengur frá einum uppí hundrað. Einhverjum gæti dottið í hug að skrifa

$$1 \cdot (1+1) + 2 \cdot (2+1) + 3 \cdot (3+1) + 4 \cdot (4+1) + \dots + 100 \cdot (100+1) = 2 + 6 + 12 + 20 + \dots + 10100$$

en þetta þykir ekki snyrtileg leið að tákna summu. Þess vegna skrifum við frekar

$$\sum_{n=1}^{100} n(n+1)$$

Fyrir neðan summutáknið stendur $n = 1$ sem merkir að breytistærðin sem við vinnum í er n og að við byrjum í einum. Fyrir ofan summutáknið stendur hundrað sem þýðir að við endum summuna þegar $n = 100$. Hægra megin við summutáknið stendur síðan formúlan fyrir sérhvern lið í summunni.

Summurnar sem teknar voru fram í byrjun kaflans yrðu táknaðar með

$$\sum_{n=1}^{100} n = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

og

$$\sum_{n=4}^{87} \frac{1}{n}$$

Stundum lendum við í sömu vandræðum með löng margfeldi. Þess vegna innleiðum við margfeldistáknið $\prod$ sem er notað á sama hátt og summutáknið en bara fyrir margfeldi.

Þannig er

$$\prod_{n=1}^{100} n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 100 \quad \prod_{n=4}^{87} \frac{1}{n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdots \frac{1}{100}$$

og

$$\prod_{n=1}^{100} n(n+1) = 1(1+1) \cdot 2(2+1) \cdot 3(3+1) \cdots 100(100+1) = 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdots 10100$$

Dæmi 7.1.1. (a) Reiknið:

$$\sum_{n=-3}^5 n^2$$

(b) Reiknið:

$$\prod_{n=1}^4 (1+n)$$

Lausn:

(a)

$$\sum_{n=-3}^5 n^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$= 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 69$$

(b)

$$\prod_{n=1}^4 (1+n) = (1+1)(1+2)(1+3)(1+4) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

8 Jöfnur

8.1 Liðun og þáttun

Liðun kallast það þegar stærðtákn sem samanstendur af einum lið er breytt í fleiri liði. Dreifireglan segir okkur hvernig liðun er framkvæmd. Lítum á nokkrar reglur um liðun:

Setning 8.1.1

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= ac + ad + bc + bd, \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{(ferningsregla fyrir summu),} \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && \text{(ferningsregla fyrir mismun),} \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 && \text{(samokaregla),} \\ (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3, \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3. \end{aligned}$$

Hér höfum við skrifað niður jöfnur sem segja að stærðtáknin sem standa beggja vegna jafnaðarmerkisins séu sama talan fyrir öll möguleg gildi á breytunum a , b , c og d . Við skulum skoða í smáatriðum hvernig reiknireglunum er beitt til þess að sýna fram á að fyrsta jafnan gildi:

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= (a+b)c + (a+b)d && \text{(dreifiregla),} \\ &= c(a+b) + d(a+b) && \text{(víxlregla fyrir margföldun),} \\ &= ca + cb + da + db && \text{(dreifiregla),} \\ &= ac + bc + ad + bd && \text{(víxlregla fyrir margföldun),} \\ &= ac + ad + bc + bd && \text{(víxlregla fyrir samlagningu).} \end{aligned}$$

Þáttun er andhverf aðgerð við liðun. Þá er stærðtákn með fleiri en einum lið breytt í jafngilt stærðtákn sem samanstendur aðeins af þáttum. Það má hugsa sér að þáttun snúist um að beita dreifireglunni afturábak, $ab + ac = a(b+c)$, og taka þætti sem eru sameiginlegir öllum liðum út fyrir sviga.

Dæmi 8.1.1. Liðið $(x-1)(x+1)^2$.

Lausn:

Við byrjum á að margfalda saman tvo sviga, notum samokareglu til að margfalda saman tvo fyrstu svigana

$$\begin{aligned} (x-1)(x+1)^2 &= (x-1)(x+1)(x+1) = (x^2-1)(x+1) = x(x^2-1) + (x^2-1) \\ &= x^3 - x + x^2 - 1 = x^3 + x^2 - x - 1. \end{aligned}$$

Dæmi 8.1.2. Liðið $(x+4)^2(x-4)^2$.

Lausn:

Notum samokareglu og síðan ferningsreglu $((a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2)$:

$$(x+4)^2(x-4)^2 = ((x+4)(x-4))^2 = (x^2 - 16)^2 = x^4 - 2 \cdot 16x^2 + 16^2 = x^4 - 32x^2 + 256.$$

Dæmi 8.1.3. Þáttið $x^3 - 2x^2 + x$.

Lausn:

Við sjáum strax að x gengur upp í margliðunni og eftir að hafa tekið x útfyrir má nota ferningsreglu $((a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2)$.

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2.$$

Dæmi 8.1.4. Þáttið $x^4 - 1$.

Lausn:

Við beitum samokareglunni og fáum

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x+1)(x-1).$$

Margliðan $x^2 + 1$ er óþættanleg í rauntölunum.

9 Ójöfnur og tölugildi

9.1 Tölugildistáknið

Látum x vera rauntölu. Fjarlægð tölunnar x frá núllpunktinum á talnalínunni köllum við *tölugildi* eða *algildi* tölunnar x . Við táknum það með $|x|$. Athugum að fjarlægð getur ekki verið neikvæð svo að $|x| \geq 0$ fyrir öll x .

Frekar augljóst þykir að ef x er jákvæð þá er $|x| = x$. Ef hinsvegar x er neikvæð þá fæst tölugildi hennar með því að „taka mínusinn af henni“. Í raun er jafngilt að margfalda hana með -1 því að þá, „hverfur mínusinn af henni“. Með táknmáli er tölugildið skilgreint svona:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ef } x \geq 0 \\ -x & \text{ef } x < 0 \end{cases}$$

Dæmi 9.1.1. $5 \geq 0$ svo að $|5| = 5$.

$-3 < 0$ svo að $|-3| = (-1) \cdot (-3) = 3$.

9.2 Reiknireglur fyrir tölugildistáknið

Um tölugildismerkið gilda nokkrar reglur:

Setning 9.2.1 Látum a og b vera rauntölur. Þá gildir eftirfarandi:

$$a \leq |a| \quad (\text{tölugildi getur aðeins stækkað tölu})$$

$$|a| = |-a| \quad (\text{tölugildi eru óháð formerki})$$

$$|a| \cdot |b| = |ab| \quad (\text{tölugildi varðveitir margföldun}),$$

$$|a|^2 = a^2 \quad (\text{önnur veldi eyða tölugildi}),$$

$$|a| + |b| \geq |a + b| \quad (\text{þríhyrningsójafna}),$$

Tökum sérstaklega eftir þríhyrningsójöfnunni. Almennt gildir ekki $|a| + |b| = |a + b|$.

Það sést til dæmis ef við prófum að setja inn $a = -3$ og $b = 8$

$$\text{þá er } |a| + |b| = |-3| + |8| = 3 + 8 = 11$$

$$\text{en } |a + b| = |-3 + 8| = |5| = 5$$

Þetta er þó í samræmi við þríhyrningsójöfnuna því að $11 \geq 5$

Athugum að fyrir tölur a og b þá má túlka töluna $|a - b|$ sem fjarlægð a frá b á talnalínunni.

T.d. ef $a = 3$ og $b = 10$ þá er fjarlægðin á milli þessara talna á talnalínunni 7. Það er í samræmi við reikninga okkar

$$|3 - 10| = |-7| = 7 \text{ og } |10 - 3| = |7| = 7.$$

Dæmi 9.2.1. Finnið öll x sem uppfylla $|x + 4| = 10$.

Lausn:

Við komum með tvær lausnir:

(a) Jafnan $|x + 4| = |x - (-4)| = 10$ segir okkur að fjarlægðin milli x og tölunnar -4 er 10. Því er ljóst að $x = -14$ eða $x = 6$.

(b) Jafnan $|x + 4| = 10$ þýðir:

$$\text{Annað hvort er } x + 4 = 10 \text{ eða } x + 4 = -10$$

Fyrri jafnan hefur lausnina $x = 6$ og sú seinni $x = -14$.

Dæmi 9.2.2. Finnið öll x sem uppfylla $|x - 3| = |x + 7|$.

Lausn:

Við komum með þrjár lausnir:

(a) Rúmfraðilega þýðir jafnan $|x - 3| = |x - (-7)|$ að fjarlægð tölunnar x frá 3 er jöfn fjarlægðar x frá -7 . Þá hlýtur x að vera talan sem er mitt á milli 3 og -7 á talnalínunni. Með öðrum orðum er x meðaltal þessara talna:

$$x = \frac{3 + (-7)}{2} = -2$$

(b) Skiptum í þrjú tilvik:

1. Ef $x < -7$ þá er $x - 3 < 0$ og $x + 7 < 0$

Samkvæmt skilgreiningu er því

$$|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3 \text{ og}$$

$$|x + 7| = -(x + 7) = -x - 7.$$

Eftir stendur jafnan $-x + 3 = -x - 7$ sem jafngildir $3 = -7$ sem er fráleitt.

Jafnan hefur því enga lausn x sem uppfyllir $x < -7$

2. Ef $-7 \leq x < 3$ þá er $x - 3 < 0$ og $x + 7 \geq 0$

Samkvæmt skilgreiningu er því $|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$ og

$$|x + 7| = x + 7.$$

Eftir stendur jafnan $-x + 3 = x + 7$ sem hefur lausnina $x = -2$.

3. Ef $x \geq 3$ þá er $x - 3 \geq 0$ og $x + 7 > 0$

Samkvæmt skilgreiningu er því

$|x - 3| = x - 3$ og $|x + 7| = x + 7$ Eftir stendur jafnan $x - 3 = x + 7$ sem jafngildir $-3 = 7$ sem er fráleitt.

Jafnan hefur því enga lausn sem uppfyllir $x \geq 3$

(c) Setjum báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi. Þá eyðast tölugildin skv. reiknireglu og eftir stendur:

$$(x - 3)^2 = (x + 7)^2$$

sem jafngildir

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 14x + 49$$

eða

$$-20x = 40$$

$$x = -2$$

Ef þessari lausn er stungið inní upphaflegu jöfnuna þá sést að þetta er lausn sem virkar.

Athugasemd:

Takið eftir að í lausn (c) í dæminu hér á undan þá enda ég á því að prófa lausnina sem ég fékk. Það er af því að þegar jöfnur eru settar í annað veldi geta skapast „falskar lausnir”. Því þarf alltaf að athuga hvort lausnirnar sem fengust séu raunverulegar lausnir.

Skoðum til dæmis jöfnuna $4x = 8$.

Þessi jafna hefur augljóslega bara eina lausn $x = 2$.

Ef einhver myndi asnanst til að setja þessa jöfnu í annað veldi fengi hann jöfnuna $16x^2 = 64$ sem jafngildir $x^2 = 4$ eða $x = \pm 2$.

Hér skapaðist falska lausnin -2 sem er ekki lausn á upprunalegu jöfnunni. Upphaflega lausnin er hinsvegar ennþá til staðar.

9.3 Venjulegt og rúmfræðilegt meðaltal

Flestir kannast við venjulegt meðaltal talna:

Skilgreining 9.3.1. Ef $a_1, a_2, \dots, a_n$ eru tölur þá er venjulegt meðaltal þeirra talan

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Væntanlega hafa færri heyrt um rúmfræðilegt meðaltal. Það er meðaltal sem er frekar notað í prósentu eða vaxtareikningi. T.d. þegar bankar tala í daglegu talu um meðalvexti á lánum þá eru þeir í raun að tala um rúmfræðilega meðaltalið.

Skilgreining 9.3.2. Ef $a_1, a_2, \dots, a_n$ eru jákvæðar rauntölur þá er rúmfræðilegt meðaltal þeirra talan

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Um þessi meðaltöl gildir fræg ójafna sem segir að venjulegt meðaltal af jákvæðum rauntölum er alltaf stærra en rúmfræðilega meðaltalið. Í táknmáli skrifum við þetta sem:

Setning 9.3.1 Ef $a_1, a_2, \dots, a_n$ eru jákvæðar rauntölur þá er

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Mjög auðvelt er að sanna þetta fyrir tvær tölur. Við skulum gera það hér en sleppum sönnuninni fyrir fleiri tölur:

Þekkt er að tala í öðru veldi er alltaf jákvæð. Ef a og b eru jákvæðar rauntölur gildir því

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Ef reiknað er uppúr öðru veldinu fæst:

$$(a - 2\sqrt{ab} + b) \geq 0$$

Færum nú $2\sqrt{ab}$ yfir jafnaðarmerkið og deilum í gegn með 2 til að fá

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Dæmi 9.3.1. Finnum venjulegt og rúmfræðilegt meðaltal talnanna

$$2, 3, 8, 27$$

Lausn:

Venjulegt meðaltal þeirra er

$$\frac{2 + 3 + 8 + 27}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Rúmfræðilegt meðaltal þeirra er

$$\sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 27} = \sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{6^4} = 6$$

Athugum að þetta er í samræmi við ójöfnuna um venjulegt og rúmfræðilegt meðaltal.