

Dæmi 9.3.2. Sýnum að fyrir allar jákvæðar rauntölur x gildir ójafnan $x + \frac{1}{x} \geq 2$

Lausn:

Stingum tölunum x og $\frac{1}{x}$ inní óhöfnuna um venjulegt og rúmfræðilegt meðaltal. Þá fáum við:

$$\frac{x + 1/x}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

Færum tvistinn yfir til að fá:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{1} = 2$$

10 Línur í plani

10.1 Punktar og línur í plani

Punktar og línur eru meðal þeirra viðfangsefna stærðfræðinnar (nánar til tekið flatarmyndfræðinnar) sem við höfum góða tilfinningu fyrir úr daglegu lífi. Einmitt þess vegna er mjög erfitt að gera sér grein fyrir hvar maður á að byrja þegar rætt er um slíka hluti: Við *vitum* öll hvað línur og punktar eru þannig að allar tilraunir til að skilgreina það formlega virka stirðar, klaufalegar og óþarfar við fyrstu sýn.

Málið er hins vegar ekki alveg jafn einfalt og ætla mátti. Til þess að geta með góðu móti stundað kerfisbundnar athuganir á rúmfræði þarf fólk að koma sér saman um nákvæmlega við hvað er átt og þar duga óljósar tilvísanir í alþekktu hluti skammt.

Sú leið sem þegar upp er staðið hefur orðið fyrir valinu til að fást við rúmfræði er að skilgreina *punkta* og *línur* út frá nokkrum einföldum grundvallareiginleikum þeirra, gefa sér að nokkrar einfaldar staðreyndir (svokallaðar *frumsendur*) gildi og vinna sig út frá þeim. Mikilvægustu frumsendurnar um punkta og línur í hefðbundinni flatarmyndfræði eru:

- Í gegn um tvo ólíka punkta liggur nákvæmlega ein lína.
- Í gegn um hvern punkt liggur nákvæmlega ein lína samsíða gefinni línu.

Á frumsendunum og því sem af þeim leiðir má síðan byggja afganginn af alþekktu rúmfræðinni sem við höfum tilfinningu fyrir úr daglegu lífi.

Punktar í rúmfræði hafa enga stærð og línur í rúmfræði teygja sig óendanlega langt í hvora átt. Ef A og B eru tveir punktar og ℓ er lína sem liggur um punktana þá er sá hluti línunnar sem liggur á milli punktanna kallaður *strikið* eða *línustrikið* frá A til B .

Yfirleitt er ekki gerður greinarmunur á línu annars vegar og mengi þeirra punkta sem liggja á línunni hins vegar. Um hvern punkt A liggja tvær hálfínur samsíða gefinni línu ℓ , ein í hvora átt, og samanstandur önnur af þeim punktum línunnar m sem liggur um A samsíða ℓ sem eru öðrum megin við A en hin af þeim sem eru hinum megin. Punkturinn A er sjálfur innihaldinn í báðum hálfínunum.

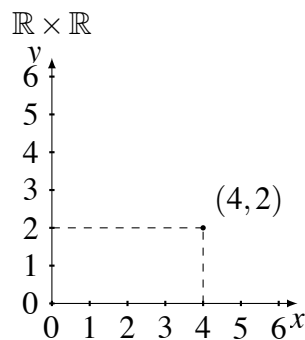
10.2 Hnitakerfið

Til að geta betur táknað punkta og línur í sléttunni þá innleiðum við hnitakerfi. Hnitakerfið er í raun sú mynd sem við gerum okkur af menginu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Tvær talnalínur eru lagðar í kross þannig að þær standi hornréttar á hvora aðra og skerist í núllpunktum sínum. Lárétta talnalínan er oftast kölluð x -ásinn og sú lóðrétta y -ásinn.

Til að marka punkt (a, b) inn á svona hnitakerfi þá teiknum við lóðrétta línu í gegnum punktinn a á x -ásnum og lárétta línu í gegnum punktinn b á y -ásnum. Þar sem línurnar skerast mörkum við punktinn (a, b) .

Á mynd til hliðar má sjá hvar punkturinn $(4, 2)$ hefur verið markaður inn í hnitakerfið.

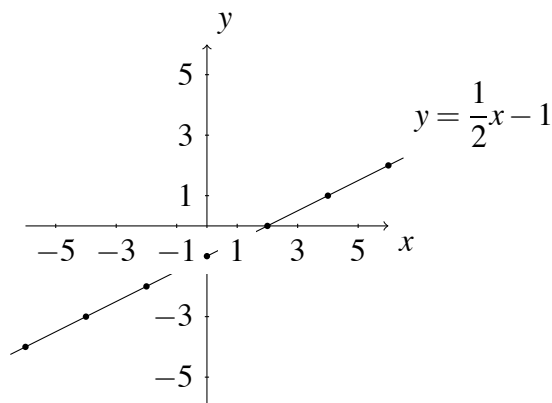


10.3 Jafna línu í hnitakerfinu

Til að tákna línur í hnitakerfinu er algengt að nota jöfnur.

Jafna línu er jafna af gerðinni $ax + by = c$ þar sem $a, b, c \in \mathbb{R}$ eru fastar.

Við skulum nú útskýra af hverju þessi jafna er sögð jafna beinnar línu.



Það verður best gert með dæmi:

Dæmi 10.3.1. Skoðum jöfnuna

$$-\frac{1}{2}x + y = -1$$

Hér er $a = -1/2$, $b = 1$ og $c = -1$ miðað við framsetninguna að ofan.

Finnum nú nokkur gildi á x og y sem uppfylla þessa jöfnu og mörkum samsvarandi punkta (x, y) í hnitakerfið.

Ef $x = 0$ og $y = -1$ þá stenst jafnan. Við mörkum því punktinn $(0, -1)$ í hnitakerfið.

Ef $x = 2$ og $y = 0$ þá stenst jafnan. Við mörkum því punktinn $(2, 0)$ í hnitakerfið.

Á sama hátt getum við markað punktana $(-6, -4)$, $(-4, -3)$, $(-2, -2)$, $(4, 1)$ og $(6, 2)$ í hnitakerfið því að ef að þessum hnitum er stungið inni jöfnuna þá stenst hún.

Það hefur verið gert hér til hliðar.

Þegar þessir punktar hafa verið markaðir inn sést að þeir liggja á beinni línu. Í ljós kemur að allir punktar sem eru lausn á þessari jöfnu liggja á þessari línu. Það sem meira er þá eru allir punktar á þessari línu lausn á upphaflegu jöfnunni. Þess vegna segjum við að jafnan

$$-\frac{1}{2}x + y = -1$$

sé jafna línunnar sem fram kemur á myndinni til hliðar.

Í mengjafræðilegum skilningi þá er myndin af línunni í hnitakerfinu í raun mynd af menginu

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; -\frac{1}{2}x + y = -1\}$$

10.4 Hallatala og skurðpunktur við ása

Ef $b \neq 0$ og breytan y er einangruð úr jöfnunni

$$ax + by = c$$

Þá fæst

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Við getum endurskýrt fastana í þessari jöfnu, setjum $h = -a/b$ og $s = c/b$ svo að jafnan líti betur út

$$y = hx + s$$

Miðað við þessa framsetningu þá er fastinn h oftast kallaður hallatala línunnar og fastinn s táknaður skurðpunkt við y -ás.

Auðvitað er ástæða fyrir þessum nafngiftum.

Fastinn h kallast hallatala línunnar því að með honum er hægt að túlka hversu mikið línan hallar. Nefnilega ef (x_0, y_0) er einhver punktur á línunni þá getum við fullyrt að punkturinn $(x_0, y_0) + (1, h) = (x_0 + 1, y_0 + h)$ sé á línunni.

Með öðrum orðum, ef að við vitum einn punkt á línunni þá getum við fundið þann næsta með því að færa okkur fyrst einn til hægri í hnitakerfinu og síðan h upp.

Formlega skilgreiningin á hallatölu línu er svohljóðandi:

Skilgreining 10.4.1. Ef l er lína í hnitakerfinu sem er ekki lóðrétt þá er til fasti h þannig að fyrir sérhverja tvo punkta (x_1, y_1) og (x_2, y_2) á línunni þá er

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = h$$

Þessi fasti kallast hallatala línunnar l .

Fastann s er auðveldara að útskýra. Þessa tölu köllum við skurðpunkt við y -ás af því að þessi tala segir okkur hvar línan sker y -ásinn. Línan mun skera ásin í punktinum $(0, s)$. Það sést af því að ef að punktinum $(x, y) = (0, s)$ er stungið inni jöfnuna

$$y = hx + s$$

Þá fæst

$$s = h \cdot 0 + s \quad \text{eða} \quad s = s$$

svo jafnan stenst.

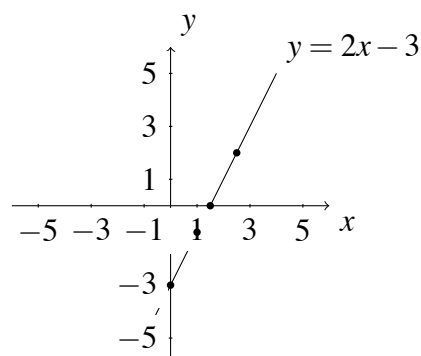
Skurðpunkt við x -ás er auðvelt að finna. Við einfaldlega setjum $y = 0$ inni jöfnu línunnar og leysum út x .

$$0 = hx + s \quad \text{gefur} \quad x = -\frac{s}{h}$$

Skurðpunktur línunnar við x -ásinn er því punkturinn $(-s/h, 0)$

Dæmi 10.4.1. Teiknið línuna

$$y = 2x - 3$$



Lausn:

Skurðpunktinn við y -ás fæst beint útúr jöfnunni. Hann hefur hnit $(0, -3)$. Við mörkum hann því inná hnitakerfið. Hallatala línunnar er tveir. Við færum okkur þess vegna einn til hægri og tvo upp frá skurðpunktinum og mörkum $(0+1, -3+2) = (1, -1)$ inná hnitakerfið.

Skv. jöfnu að ofan fæst svo að skurðpunktur við x -ás er $(-(-3)/2, 0) = (3/2, 0)$. Við mörkum hann líka inná hnitakerfið.

Hallatala línunnar er tveir við getum því markað punktinn $(3/2 + 1, 0 + 2) = (5/2, 2)$ inná hnitakerfið.

Nú erum við búin að marka fjóra punkta inná hnitakerfið og í gegnum þá má teikna línu. Athugum að tveir punktar nægja til að skilgreina línu, það hefði því verið nóg að finna einhverja tvo af þessum fjórum punktum sem fundnir voru í dæminu.

10.5 Meira um jöfnu línu

Stundum fáum við gefna tvo punkta (x_1, y_1) og (x_2, y_2) og þurfum að finna jöfnu línunnar sem gengur í gegnum þá. Það er gert á eftirfarandi hátt:

Finna skal jöfnu línu sem gengur í gegnum punkta (x_1, y_1) og (x_2, y_2) .

1. Hallatala línunnar, h , fæst með formúlunni

$$h = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Skurðpunktur við y -ás, s , fæst svo með formúlunni

$$s = y_1 - x_1 h$$

Jafna línunnar verður þá $y = hx + s$.

Auðvelt er að rökstyðja af hverju þetta virkar. Hallatalan er reiknuð beint útúr formlegu skilgreiningunni sem gefin var á henni að ofan.

Síðan þarf að reikna út fastan s . Við vitum að línan gengur í gegnum punktinn (x_1, y_1) svo jafnan $y_1 = hx_1 + s$ þarf að ganga upp. Við getum því einangrað s úr þessari jöfnu til að fá $s = y_1 - hx_1$.

Dæmi 10.5.1. Finnið jöfnu línunnar sem gengur í gegnum punktana $(1, 2)$ og $(13, 17)$.

Lausn:

1. Hallatala línunnar er

$$h = \frac{17 - 2}{13 - 1} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

2. Skurðpunktur við y -ás fæst með

$$s = 1 - 2 \cdot \frac{5}{4} = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

Jafna línunnar er þess vegna

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$$

Dæmi 10.5.2. Látum l vera línuna sem gengur í gegnum punktana $(-2, 3)$ og $(1, 12)$. Finnið jöfnu línu sem gengur í gegnum punktinn $(2, 2)$ og er samsíða línunni l .

Lausn:

Köllum línuna sem við erum að leita að m . Það að línurnar l og m séu samsíða þýðir að þær hafa sömu hallatölu. Til að finna hallatölu línunnar m nægir því að finna hallatölu línunnar l .

Hallatalan er:

$$h = \frac{12 - 3}{1 - (-2)} = \frac{9}{3} = 3$$

Jafna línunnar m er því af gerðinni

$$y = 3x + s$$

en við eigum eftir að finna s .

Gefið er að punkturinn $(2, 2)$ er á línunni svo jafnan þarf að standast þegar $(x, y) = (2, 2)$ er stungið inni hana. Með öðrum orðum er

$$2 = 3 \cdot 2 + s \quad \text{sem jafngildir} \quad s = 2 - 6 = -4$$

Jafna línunnar m er því

$$y = 3x - 4$$

10.6 Skurðpunktur línu

Oft getur verið gagnlegt að finna skurðpunkt tveggja lína sem eru ekki samsíða (ef þær eru samsíða þá er enginn skurðpunktur til).

Mjög gagnlegt er að þekkja jöfnu línanna ef markmiðið er að finna skurðpunkt þeirra.

G.r.f. að jöfnur línanna l og m séu gefnar:

$$l: \quad a_1x + b_1y = c_1$$

$$m: \quad a_2x + b_2y = c_2$$

Nú er litið á þessar jöfnur sem svo að fastarnir $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ séu þekktir. Því má líta á jöfnur línanna sem tvær jöfnur með tveimur óþekktum stærðum, x og y . Lausnin á jöfnuhneppinu verður skurðpunktur línanna, en hún er:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{og} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Dæmi 10.6.1. G.r.f. að l sé línun sem gengur í gegnum punktana $(1,2)$, $(3,3)$. Látum m vera línuna sem er gefin með jöfnunni $2x + 3y = 5$.

Finnið skurðpunkt l og m .

Lausn:

Byrjum á því að finna jöfnu línunnar l .

Hallatala hennar er

$$h = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$$

Jafna l er þá af gerðinni

$$l: y = \frac{1}{2}x + s$$

og s fæst með því að setja þekkta punkt á línunni inni þessa jöfnu. Vitað er að $(1,2)$ er á línunni svo að:

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + s \quad \text{sem gefur} \quad s = \frac{3}{2}$$

Jafna l er því

$$l: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Jafna m er þekkt

$$m: 2x + 3y = 5$$

Lítum á jöfnur línanna sem tvær jöfnur í tveimur óþekktum stærðum, x og y og reynum að leysa úr.

Við höfum nú þegar einangrað y úr jöfnu l . Stingum því inni jöfnu m :

$$2x + 3\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 5 \quad \text{sem jafngildir} \quad \frac{7}{2}x + \frac{9}{2} = 5$$

Sem gefur svo $x = 1/7$.

Ef þessu gildi á x er stungið inni jöfnu línunnar l fæst

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{2} = \frac{11}{7}$$

Skurðpunktur línanna er þess vegna:

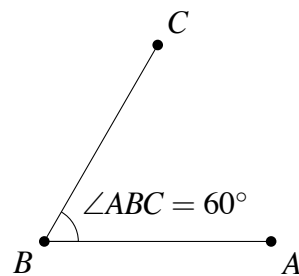
$$(x,y) = \left(\frac{1}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

11 Þríhyrningar og hornaföll

11.1 Horn

Horn nefnist sú mynd sem fæst þegar tvær hálflínur eru dregnar út frá sama punkti. Þessi punktur er kallaður oddpunktur hornsins, en hálflínurnar armar þess.

Stærð hornsins er mælt í *gráðum* eða *bogaeiningum*. Gráður eru táknaðar með merkinu „°“ en einfaldlega er skrifað „Rad“ fyrir bogaeiningar. Eins og er þá munum við nota gráður í alla reikninga okkar en í seinni köflum munum við skipta yfir í bogaeiningar sem í vissum skilningi er mun náttúrulegri mælieining á horn.



Ein gráða er skilgreind sem einn-þrjúhundruðogsextugasti hluti úr hring.

Með öðrum orðum er 360° heill hringur.

Þá verður horn sem er 180° bein lína og horn sem er 90° köllum við rétt horn.

Horn sem er stærra en 0° en minna en 90° köllum við hvasst horn en horn sem er stærra en 90° en minna en 180° köllum við gleitt horn.

Segjum að þrír punktar í sléttunni, A, B og C , séu gefnir. Hornið sem myndast þegar farið er frá A til B og svo í C er oft táknað með $\angle ABC$.

Lengd línustriksins milli punktana A og B er oft táknað með $|AB|$

11.2 Topphorn og grannhorn

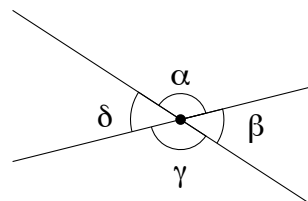
Þegar tvær línur skerast myndast fjögur horn. Hornin sem standa á móti horu öðru kallast topphorn. Horn sem standa hlið við hlið kallast grannhorn.

Á mynd til hliðar eru α og γ topphorn

β og δ eru líka topphorn.

α og β eru grannhorn.

Fleiri grannhorn eru β og γ , γ og δ eða α og δ .



Um topphorn og grannhorn gilda einfaldar reglur:

Setning 11.2.1 1. Topphorn eru jafnstór.

2. Summa grannhorna er 180° .

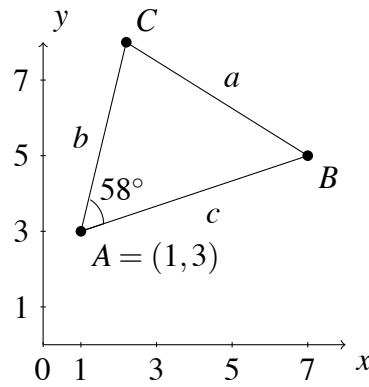
11.3 Þríhyrningar

Ferill sem samanstendur af þremur línustrikum sem mætast tvö og tvö í þremur hornum nefnist *þríhyrningur*.

Algengast er að tákna hornpunkta þríhyrningsins með stórum stöfum, oftast A, B og C . Hliðar þríhyrningsins eru táknaðar með litlum bókstöfum sem samsvara nöfnum hornpunkta. Þannig er hliðin sem stendur á móti hornpunktinum A oftast látin heita a , hliðin sem stendur á móti B látin heita b o.s.fr.

Algengt er að nefna þríhyrninga eftir hornpunktum sínum með lítið þríhyrningsmerki fyrir framan. Þannig er þríhyrningur með hornpunkta A, B og C oft kallaður þríhyrningurinn $\triangle ABC$.

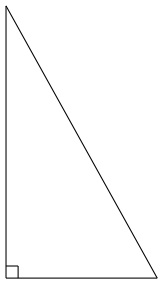
Athugum að hefð er fyrir því að tákna horn þríhyrninga með sama tákni og er notað fyrir hornpunktinn. Ímyndum okkur til dæmis þríhyrning í hnitakerfinu sem hefur hornpunkt í $(1,3)$ og samsvarandi horn 58° . Nefnum þennan hornpunkt A . Þá má bæði skrifa $A = (1,3)$ og $A = 58^\circ$. Við táknum semsagt bæði hornpunktinn og hornið sjálft með bókstafnum A . Þetta ætti ekki að valda misskilningi því að út frá samhengi á alltaf að sjást hvort um er að ræða hornið eða punktinn.



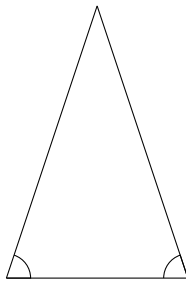
Þríhyrningur er sagður rétthyrndur ef eitthvert horna hans er rétt (sem er 90°).

Þríhyrningur er sagður jafnarma ef tvær hliðar hans eru jafnlangar.

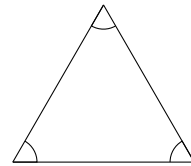
Þríhyrningur er sagður jafnhliða ef allar hliðar hans eru jafn langar.



Rétthyrndur þríhyrningur



Jafnarma þríhyrningur



Jafnhliða þríhyrningur

Á myndum er rétt horn yfirleitt táknað með litlum kassa í hornið eins og á myndinni hér að ofan.

Um þríhyrninga gilda þessar einföldu reglur:

Setning 11.3.1 1. Hornasumma þríhyrnings er 180° .

2. Þríhyrningur er jafnarma þ.p.a.a. tvö horn hans séu jafn stór. Hornin sem eru jafn stór standa á móti jafnstórum hliðum.

3. Þríhyrningur er jafnhliða þ.p.a.a. öll horn séu 60° .

Dæmi 11.3.1. Gefið er að $|AB| = 3$.

Einnig er gefið að punktarnir B, C og D liggja á beinni línu.

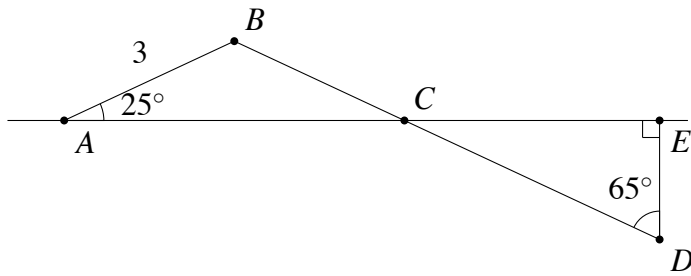
Finnið $|BC|$.

Lausn:

Hornasumma þríhyrnings er 180° . Við beytum þeirri reglu á þríhyrninginn DEC til að fá $\angle ECD = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$

Nú eru hornin $\angle ECD$ og $\angle ACB$ topphorn svo að þau eru jöfn. Við fáum því $\angle ACB = 25^\circ$.

Af þessu sést að þríhyrningurinn ABC er jafnarma. Skv. reglu um jafnarma þríhyrninga eru þá línustrikin AB og BC jafnlöng svo að $|BC| = 3$

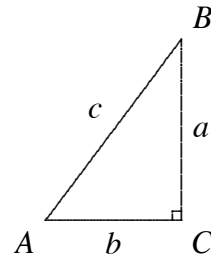


11.4 Regla Pýþagórasar

Regla Pýþagórasar er sáraeinföld, hún segir:

Setning 11.4.1 G.r.f. að c sé lengsta hliðin í rétthyrndum þríhyrningi og að a og b séu styttri hliðarnar, þá gildir

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Regla Pýþagórasar á sér líka andhverfu, hún hljómar svona:

Setning 11.4.2 G.r.f. að a , b og c séu hliðar í þríhyrningi og að þær uppfylli jöfnuna

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Þá er þríhyrningurinn rétthyrndur með rétt horn mótlægt hliðinni c .

Sönnunin á reglu Pýþagórasar er klassísk og verður gert skil á henni hér:

Röðum fjórum rétthyrndum þríhyrningum upp þannig að þeir myndi ferning eins og á myndinni til hliðar. Köllum flatarmál ferningsins F . Hægt er að mæla flatarmál þessa fernings á tvo mismunandi vegu. Í fyrsta lagi er flatarmál hans jafnt hliðarlengdinni í öðru veldi:

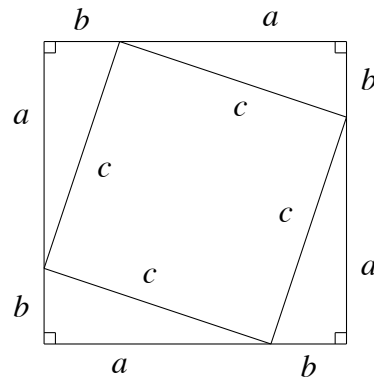
$$F = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Í öðru lagi er hægt að leggja saman flatarmál allra fjögurra þríhyrninganna og ferningsins í miðjunni sem hefur hliðarlengd c , en þá fæst að flatarmálið er

$$F = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$$

Nú höfum við fengið að

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2 \quad \text{sem gefur} \quad a^2 + b^2 = c^2.$$



Dæmi 11.4.1. Gefinn er rétthyrndur þríhyrningur með skammhlið 4 og langhlið 5. Finn-ið hina skammhlið þríhyrningsins.

Lausn:

Köllum óþekktu hliðina x . Af reglu Pýþagórasar fæst þá $5^2 = x^2 + 4^2$. Færum yfir jafn-aðarmerkið til að fá $x^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$.

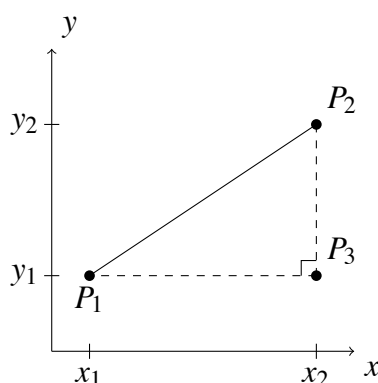
Þá er ljóst að $x = \sqrt{9} = 3$

Dæmi 11.4.2. Athugið hvort þríhyrningur með hliðarlengdir 5,6,7 er rétthyrndur.

Lausn:

Við notum reglu Pýþagórasar, þríhyrningurinn er rétthyrndur ef og aðeins ef $7^2 = 6^2 + 5^2$, en $7^2 = 49$ og $5^2 + 6^2 = 61$ svo að þríhyrningurinn er ekki rétthyrndur.

11.5 Fjarlægð milli punkta í hnitakerfi



Látum nú $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$ vera tvo punkta í hnitakerfinu. Nú er hægt að nota reglu Pýþagórasar til að finna fjarlægðina á milli þeirra.

Mörkum punktinn (x_2, y_1) inná hnitakerfið og köllum hann P_3 . Þá sést að punktarnir P_1, P_2, P_3 mynda rétthyrnd-an þríhyrning.

Fjarlægðin milli punktanna P_1 og P_3 er $|x_2 - x_1|$, m.ö.o. er $|P_1P_3| = |x_2 - x_1|$

Fjarlægðin milli punktanna P_2 og P_3 er $|y_2 - y_1|$, m.ö.o. er $|P_2P_3| = |y_2 - y_1|$

Þetta eru skammhliðarnar í þríhyrningnum, af reglu Pýþagórasar fæst nú beint eftirfarandi regla:

Setning 11.5.1 Fjarlægðin milli punktanna $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$ í hnitakerfinu er

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dæmi 11.5.1. Hver er fjarlægðin milli punktanna $(1, 2)$ og $(5, 7)$ í hnitakerfinu?

Lausn:

Hér er $x_1 = 1, x_2 = 5, y_1 = 2$ og $y_2 = 7$.

Setjum þetta inní jöfnuna að ofan og fáum að fjarlægðin milli punktanna er

$$\sqrt{(5-1)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} \approx 6,403124$$

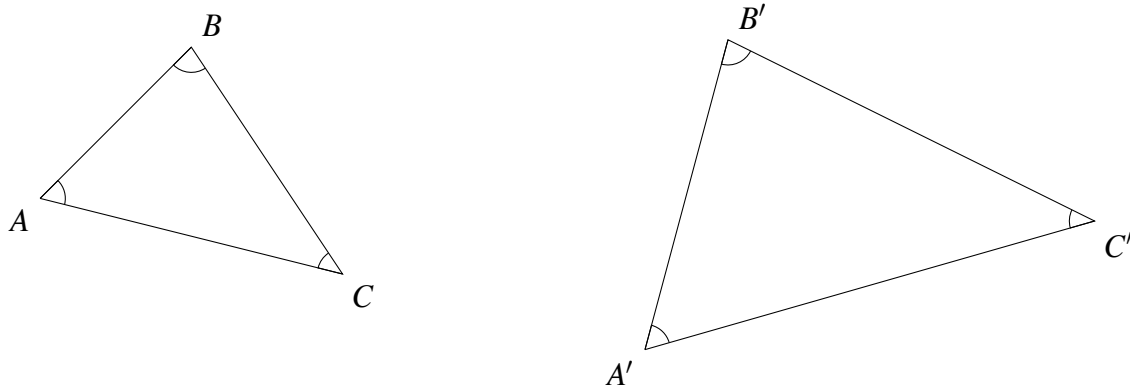
11.6 Einslaga þríhyrningar

Setjum fram skilgreininguna á einslaga þríhyrningum:

Skilgreining 11.6.1. Tveir þríhyrningar eru sagðir einslaga ef að öll hornin þeirra eru jafnstór.

Þessi skilgreining þýðir að tveir þríhyrningar eru einslaga ef þeir eru eins í laginu. Þeir mega vera misstórir og annar má snúa öðruvísi en hinn en það eina sem skiptir máli er að þeir hafi jafnstór horn.

Einslaga þríhyrningar



Um einslaga þríhyrninga gildir mjög mikilvæg regla:

Setning 11.6.1 Ef þríhyrningar $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ eru einslaga, hornið A er jafnt horninu A' , B er jafnt horninu B' og C er jafnt horninu C' . Þá er hlutfallið milli samsvarandi hliða í þríhyrningunum jafnt.

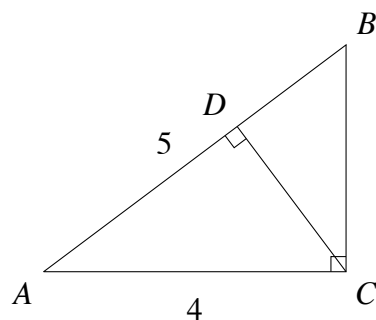
Þ.e.a.s.

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|}, \quad \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} \quad \text{og} \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|}$$

Athugum að ef tvö horn í þríhyrningi eru þekkt þá fæst það þriðja sjálfkrafa því að hornasúmma þríhyrnings er fasti, 180° . Þess vegna fæst að ef tveir þríhyrningar hafa tvö jafnstór horn þá verða sjálfkrafa síðustu hornin jafnstór. M.ö.o. það nægir að athuga hvort að tvö horn séu jafnstór til að skera úr um hvort þríhyrningarnir séu einslaga.

Dæmi 11.6.1. Gefinn er rétthyrndur þríhyrningur ABC með rétt horn í C . Gefið er að $|AC| = 4$ og $|AB| = 5$. Látum D vera punktinn á strikinu AB þannig að strikið DC verði hornrétt á AB .

Finnið $|CD|$



Lausn:

Notum reglu Pýþagórasar til að finna $|BC|$.

$$|BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

Við fáum þá $|BC| = \sqrt{9} = 3$

Berum nú saman þríhyrningana $\triangle ABC$ og $\triangle ACD$. Þeir hafa báðir eitt horn sem er 90° og þeir hafa eitt sameiginlegt horn. Nefnilega hornið $\angle BCA$. Þessir þríhyrningar hafa þess vegna tvö horn eins og eru því einslaga. Við getum þessvegna beitt reglunni að ofan. Maður verður að passa sig að velja hliðarnar rétt.

Hér samsvarar hliðin BC í $\triangle ABC$ hliðinni CD í $\triangle ACD$. Hliðin AB í $\triangle ABC$ samsvarar svo hliðinni AC í $\triangle ACD$. Samkvæmt reglu um einslaga þríhyrninga er því:

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

eða

$$|CD| = |AC| \frac{|BC|}{|AB|} = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

Dæmi 11.6.2. Látum ABC og DEF vera einslaga þríhyrninga með $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$. Látum $|AB| = 10$, $|DE| = 5$, $|BC| = 6$. Finn-ið $|EF|$.

Lausn:

Þar sem þríhyrningarnir eru einslaga vitum við að

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$$

sem umritast í

$$|EF| = \frac{|DE||BC|}{|AB|} = \frac{5 \cdot 6}{10} = 3.$$

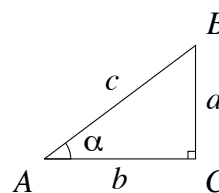
11.7 Hornaföllin

Í þessum kafla munum við skilgreina hornaföllin $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ og $\cot(\alpha)$ fyrir eitthvað horn α stærra en 0° en minna en 90° . Það þarfnast smá undirbúnings.

Látum α vera horn þ.a. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Teiknum nú einhvern rétt-hyrndan þríhyrning $\triangle ABC$ með rétt horn í C , þannig að hornið A sé jafnt horninu α . Merkjum hliðarnar sem a , b og c samkvæmt hefð. Skoðum nú hlutfallið a/c .

Tökum eftir því að þetta hlutfall er eingöngu háð horninu α en er ekki háð því hvernig rétthyrndi þríhyrningurinn var teiknaður.

Með öðrum orðum, hefðum við teiknað öðruvísi rétthyrndan þríhyrning $\triangle A'B'C'$ með rétt horn í C' og þannig að hornið A' er jafnt horninu α þá væru



Þríhyrningarnir $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ einslaga og því fengist

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$$

Þar sem að þetta hlutfall er eingöngu háð α en ekki sjálfum þríhyrningnum getum við þess vegna skilgreint

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

Þar sem $\triangle ABC$ er einhver þríhyrningur teiknaður eftir leiðbeiningunum að ofan.

Á sama hátt má sjá að hlutföllin b/c , a/b og b/a eru eingöngu háð upphaflega horninu α . Þess vegna skilgreinum við:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \text{mótlæg skammhlið deild með langhlið,}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \text{aðlæg skammhlið deild með langhlið,}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \text{mótlæg skammhlið deild með} \\ \text{aðlægri skammhlið,}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \text{aðlæg skammhlið deild með} \\ \text{mótlægri skammhlið.}$$

Hér er hliðin a kölluð mótlæg skammhlið því að það er skammhliðin sem liggur á móti horninu A . Hliðin b er kölluð aðlæg skammhlið út af svipuðum ástæðum og hliðin c er kölluð langhlið réttthyrnda þríhyrningsins eins og áður.

Athugasemd 1:

Á íslensku eru hornaföllin borin fram svona:

Hornafallið $\sin$ er borið fram „sínus”.

Hornafallið $\cos$ er borið fram „kósínus”.

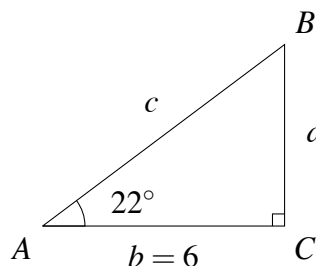
Hornafallið $\tan$ er borið fram „tangens”.

Hornafallið $\cot$ er borið fram „kótangens”.

Athugasemd 2:

Hornaföllin má finna á öllum alvöru vasareiknum. Áður en reiknað er með hornaföllum í vasareikni skal athuga hvernig vasareiknirinn er stilltur. Hægt er að stilla hann á gráður, radíönur eða aðrar mælieiningar á horn. Ef vasareiknirinn er stilltur á aðra mælieiningu en verið er að vinna með fást kolvitlausar niðurstöður.

Dæmi 11.7.1. Gefinn er réttthyrndur þríhyrningur $\triangle ABC$ með rétt horn í C . Gefið er að hornið A er 22° og $b = 6$. Finnið a og c .



Lausn:

Nú er

$$\tan(22^\circ) = \frac{a}{b} = \frac{a}{6}$$

svo að:

$$a = 6 \tan(22^\circ) \approx 2,42416$$

Einnig fæst

$$\cos(22^\circ) = \frac{b}{c} = \frac{6}{c}$$

svo að:

$$c = \frac{6}{\cos(22^\circ)} \approx 6,47121$$

Hornafallareglur

Um hornaföllin gilda nokkrar reglur sem auðvelt er að sanna:

Setning 11.7.1 Fyrir öll α þ.a. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ gildir:

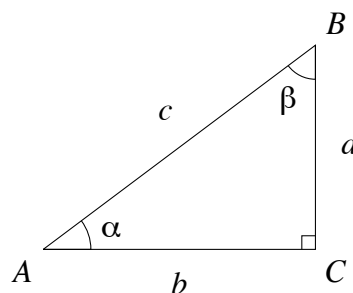
$$1. \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$2. \cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

$$3. \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$4. \sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$5. \cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$



Sönnum þetta:

Fyrir alla liðina munum við velja þríhyrning $\triangle ABC$ sem er þannig að hornið C sé 90° , hornið A sé jafnt α og við látum hliðarnar heita a , b og c í samræmi við hefð. Fyrir ofan er mynd af honum.

1. Skv. skilgreiningu þá er $\sin(\alpha) = a/c$, $\cos(\alpha) = b/c$ og $\tan(\alpha) = a/b$.

Því fæst:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = \tan(\alpha)$$

2. Skv. skilgreiningu þá er $\tan(\alpha) = a/b$ og $\cot(\alpha) = b/a$.

Því fæst:

$$\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{1}{a/b} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

3. Munum að þríhyrningurinn sem unnið er með er rétthyrndur svo um hliðar hans gildir $a^2 + b^2 = c^2$.

Við fáum þess vegna:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

4. Látum $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Tökum eftir því að í þríhyrningnum $\triangle ABC$ er $A = \alpha$, $C = 90^\circ$ og því fæst

$$B = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha = \beta.$$

Nú er hægt að finna $\sin(\beta)$ beint út frá skilgreiningu miðað við þríhyrninginn $\triangle ABC$.

Við höfum víxlað hornum, svo að aðlæg skammhlið víxlast við mótlæga skammhlið en langhliðin helst sú sama.

Því fæst:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin(\beta) = \frac{b}{c} = \cos(\alpha)$$

5. Röksemdarfærslan er sú sama og í lið fjögur.

11.8 Þekkt horn

Á þessu stigi í stærðfræði er frekar ómögulegt að reikna í höndunum sínusa eða kósínusa af flestum hornum. Því látum við yfirleitt vasareikninn sjá um það fyrir okkur.

Þó eru nokkur horn sem auðvelt er að reikna. Dæmi um slík horn eru 30° , 45° og 60° . Hér kemur tafla yfir gildi hornafallanna í þessum hornum.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Í þessum kafla munum við sýna hvernig útkomurnar $\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eru fengnar. Ef búið er að sýna þetta þá fæst afgangurinn af töflunni auðveldlega með því að nota reglurnar í kaflanum á undan. Við mælum með því að duglegir nemendur spreyti sig á því að fylla út töfluna.

Byrjum á $\sin(45^\circ)$:

Teiknum rétthyrndan þríhyrning $\triangle ABC$ sem hefur rétt horn í C , hornið A er 45° og hliðarlengdin b er 1.

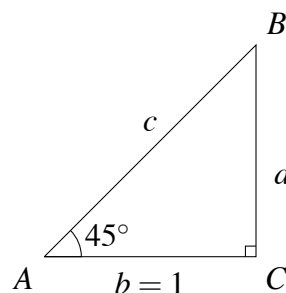
Skv. skilgreiningu er þá $\sin(45^\circ) = b/c = 1/c$.

Tökum eftir að $B = 45^\circ$.

Tvö horn þríhyrningsins eru jafn stór, og því er hann jafnarma, því er $a = 1$.

Nú notum við Pýþagóras til að fá $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ og að lokum fæst:

$$\sin(45^\circ) = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

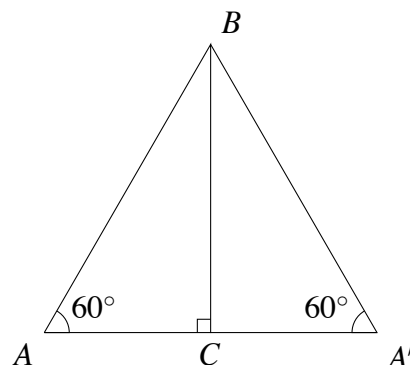


Reiknum nú $\sin(60^\circ)$

Teiknum rétthyrndan þríhyrning $\triangle ABC$ sem hefur rétt horn í C , hornið A er 60° og hliðarlengdin $|AC|$ er 1.

Þá er skv. skilgreiningu $\sin(60^\circ) = |BC|/|AB|$.

Speglum nú þríhyrningnum yfir hliðina BC og mörkum nýjan



punktur A' þar sem punkturinn A lendir.

Þá er $|CA'| = |AC| = 1$ og $|AA'| = 2$.

Tökum eftir að í þríhyrningnum, $\triangle ABA'$ eru tvö horn 60° svo það þriðja er líka 60° . Þríhyrningurinn $\triangle ABA'$ er þess vegna jafnhliða svo allar hliðar hans eru jafn langar. Við vitum að $|AA'| = 2$ svo að $|AB| = 2$.

Nú getum við notað Pýþagóras á þríhyrninginn $\triangle ABC$ til að finna hliðina $|BC|$.

$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

En nú höfum við allar upplýsingar til að reikna sínusinn

$$\sin(60^\circ) = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

11.9 Flatarmál þríhyrnings

Flestir nemndur ættu að þekkja klassísku jöfnuna til að reikna flatarmál þríhyrnings

Setning 11.9.1

$$\text{Flatarmál} = \frac{\text{grunnlína} \cdot \text{hæð}}{2}$$

Hún er notuð þannig að fyrst er valin hlið á þríhyrningnum sem við köllum grunnlínu. Næst er teiknað strik frá hornpunktinum sem er mótlægur grunnlínunni, niður á grunnlínuna þannig að grunnlínan og strikið eru horrétt. Þetta strik er kallað hæð þríhyrningsins og oftast táknað með h .

Míðað við þríhyrninginn til hliðar þá er grunnlínan hliðin c og hæðin nær uppí topppunktinn C . Hér yrði flatarmálið $\frac{ch}{2}$.

Í reikningi kemur oft fyrir að hæðin h er ekki gefin og þá getur verið vandasamt að reikna flatarmálið, í þeim tilfellum geta hornaföllin komið okkur til hjálpar.

Köllum fótþvert hliðarinnar í þríhyrningnum P_C . Með því að skoða þríhyrninginn ACP_C sést að

$$\sin(A) = \frac{h}{b} \quad \text{eða} \quad h = b \sin(A)$$

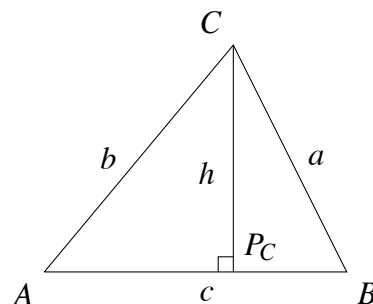
Flatarmál þríhyrningsins verður þess vegna

$$F = \frac{ch}{2} = \frac{1}{2}cb \sin(A).$$

Hér höfum við leitt út nýja reglu fyrir flatarmál þríhyrnings:

Setning 11.9.2 Ef $\triangle ABC$ er þríhyrningur með hliðar a, b og c merktar skv. hefð, þá er flatarmál hans

$$F = \frac{1}{2}ab \sin(C) = \frac{1}{2}ac \sin(B) = \frac{1}{2}bc \sin(A)$$



Dæmi 11.9.1. Gefinn er rétthyrndur þríhyrningur með langhlið 13 og skammhlið 5. Finnið flatarmál þríhyrningsins.

Lausn:

Við byrjum á að finna hina skammhliðina. Hún er $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$. Þá er auðvelt að reikna flatarmálið. $A = 12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 30$.

Dæmi 11.9.2. Gefinn er þríhyrningur $\triangle ABC$ með $a = 3$ $b = 8$ og $C = 60^\circ$. Finnið flatarmálið.

Lausn:

Skv. töflu að ofan þá er $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ því fáum við

$$F = ab \sin(C) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \sin(60^\circ) = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

11.10 Sínus- og kósínusreglurnar

Skoðum aðeins betur jöfnuna fyrir flatarmál þríhyrnings.

Hún gefur $\frac{1}{2}ab \sin(C) = \frac{1}{2}ac \sin(B) = \frac{1}{2}bc \sin(A)$

Ef við margöldum í gegnum þessa jöfnu með stærðinni $\frac{2}{abc}$ fæst fræg regla sem er oftast köllus sínusreglan:

Setning 11.10.1 Ef $\triangle ABC$ er þríhyrningur með hliðar a, b og c merktar skv. hefð, þá er

$$\frac{\sin(C)}{c} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(A)}{a}$$

Að lokum setjum við fram fræga reglu sem er oftast kölluð kósínusreglan:

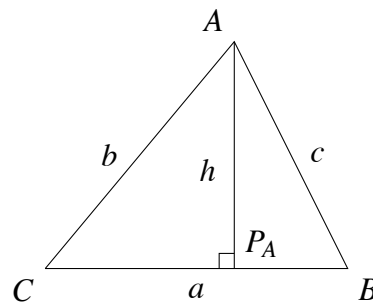
Setning 11.10.2 Ef $\triangle ABC$ er þríhyrningur með hliðar a, b og c merktar skv. hefð, þá er

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

Takið eftir hvað kósínusreglan líkist reglu Pýþagórasar. Þær eru eins fyrir utan að í kósínusreglunni bætist við liður $-2ab \cos(C)$. Í rauninni er regla Pýþagórasar bara sértílvik af kósínusreglunni. Í seinni köflum munum við nefnilega framlengja hornaföllin þannig að við getum reiknað kósínus af horni sem eru stærri en 90° . Þá kemur í ljós að $\cos(90^\circ) = 0$. Þannig að ef $C = 90^\circ$ er stungið inní kósínusjöfnunna fæst regla Pýþagórasar.

Það er ekki mjög flókið að sanna kósínusregluna:

Teiknum upp þríhyrninginn $\triangle ABC$ þannig að hann hafi hliðina a sem grunnlínu. Merkjum inn hæðina h og nefnum fótþunkt hæðarinnar P_A . Ef þríhyrningurinn $\triangle CAP_A$ er skoðaður sést að



$$\cos(C) = \frac{|CP_A|}{b} \quad \text{eða} \quad |CP_A| = b \cos(C)$$

Athugum einnig að $a = |CP_A| + |P_AB|$ svo að

$$|P_AB| = a - |CP_A| = a - b \cos(C)$$

Notum nú reglu Pýþagórasar á sitthvorn þríhyrninganna $\triangle CAP_A$ og $\triangle BAP_A$ til þess að fá

$$h^2 = b^2 - |CP_A|^2 \quad \text{og} \quad h^2 = c^2 - |P_AB|^2$$

Setjum þessatr jöfnur saman til þess að fá:

$$b^2 - |CP_A|^2 = c^2 - |P_AB|^2$$

Setjum nú inn gildin á $|CP_A|$ og $|P_AB|$ sem við vorum búin að reikna til þess að fá

$$b^2 - (b \cos(C))^2 = c^2 - (a - b \cos(C))^2$$

Þegar reiknað er uppúr sviganum sést að liðurinn $b^2 \cos^2(C)$ dettur út og eftir stendur

$$b^2 = c^2 - a^2 + 2ab \cos(C) \quad \text{sem jafngildir} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

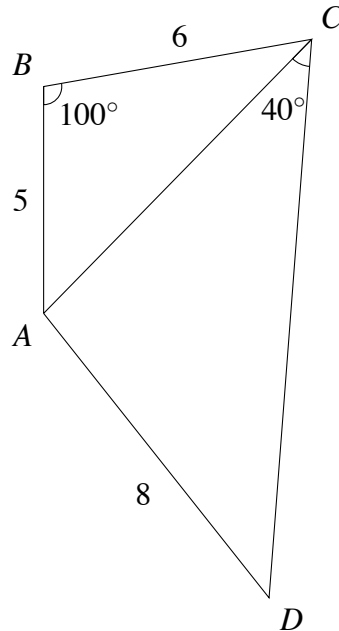
Dæmi 11.10.1. Hvasshyrndur þríhyrningur ABC hefur hliðarlengdir $c = |AB| = 5$, $a = |BC| = 6$, $b = |CA| = 7$. Finnið $\cos(\angle ABC)$.

Lausn:

Samkvæmt kósínusreglu er $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos(\angle ABC)$. Með því að færa yfir fáum við svo

$$\cos(\angle ABC) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

Dæmi 11.10.2. Teiknum ferhyrning $ABCD$ sem er þannig að $|AB| = 5$, $|BC| = 6$, $|AD| = 8$, $\angle ABC = 100^\circ$ og $\angle ACD = 40^\circ$. Finnið $|AC|$ og $\sin(\angle CDA)$.



Athugasemd:

Við erum ekki búin að skilgreina hvað $\cos(100^\circ)$ er því hornið er of stórt, við skulum samt leyfa okkur að stimpla því inní vasareinininn því að í raun gilda sínus og kósínusreglan fyrir öll horn.

Lausn:

Notum fyrst kósínusregluna á þríhyrninginn $\triangle ABC$ til að finna $|AC|$. Skv. henni gildir:

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos(\angle ABC) \\ &= 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos(100^\circ) = 61 - 60 \cos(100^\circ) \end{aligned}$$

svo að

$$|AC| = \sqrt{61 - 60 \cos(100^\circ)} \approx 8,450969806.$$

Notum nú sínusreglu á þríhyrninginn $\triangle ACD$ til að finna $\sin(\angle ADC)$:

$$\frac{\sin(\angle ADC)}{|AC|} = \frac{\sin(\angle ACD)}{|AD|}$$

svo að

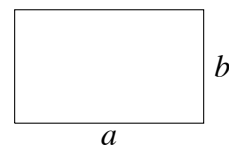
$$\sin(\angle ADC) = |AC| \frac{\sin(\angle ACD)}{|AD|} \approx \frac{\sin(40^\circ)}{8} \cdot 8,450969806 \approx 0,679022335.$$

12 Flatarmyndir, flatarmál og rúmmál

12.1 Flatarmál ýmissa forma

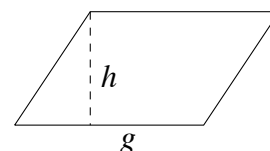
Flatarmál rétthyrnings:

$$F = a \cdot b$$



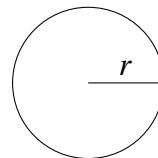
Flatarmál samsíðungs:

$$F = g \cdot h$$



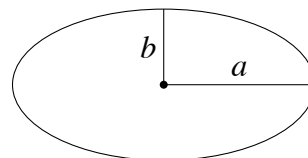
Flatarmál hrings:

$$F = r^2 \cdot \pi$$



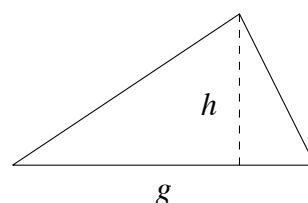
Flatarmál sporbaugs:

$$F = a \cdot b \cdot \pi$$



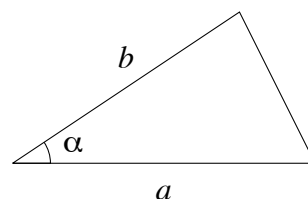
Flatarmál þríhyrnings:

$$F = \frac{g \cdot h}{2}$$



Flatarmál þríhyrnings (2):

$$F = \frac{1}{2} a \cdot b \sin(\alpha).$$



13 Föll

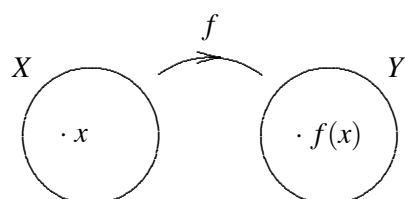
13.1 Varpanir og föll

Vörpun er eitt allra miklvægasta hugtak sem notast er við í stærðfræði. Mjög mikilvægt er að nemendur reyni að skilja þetta hugtak til fullnustu og geti tileinkað sér notkun þess. Útskýringar á vörpun eru því miður oftast frekar torskiljanlegar þeim sem eru óvanir stærðfræði, en með dæmum og æfingu skýrast hlutir betur.

Látum X og Y vera mengi. Vörpun frá X í Y er regla sem úthlutar sérhverju staki í X nákvæmlega einu staki í Y . Hefðin er að tákna slíka vörpun (reglu) með bókstaf.

Ef f er vörpun frá X í Y og $x \in X$, þá táknum við með $f(x)$ stakið í Y sem reglan (vörpunin) f úthlutar stakinu x .

Mengið X kallast *skilgreiningarmengi* eða *formengi* vörpunnarinnar og mengið Y *bakmengi* hennar.



Varpanir eru táknaðar með ýmsum hætti, til dæmis

$$f: X \rightarrow Y, \quad X \xrightarrow{f} Y \quad \text{eða} \quad X \rightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

Athugasemd:

Þegar bakmengið, Y , er hlutmengi í mengi rauntalna, $\mathbb{R}$, þá tölum við stundum um *fall*, en ekki

vörpun. Í raun er fall bara ákveðin gerð af vörpun.

Dæmi 13.1.1. (a)

Látum $X = \mathbb{R}$ og $Y = \mathbb{R}$. Skilgreinum nú vörpun (reglu) á $\mathbb{R}$. Sem segir að sérhverju staki x í $\mathbb{R}$ verði úthlutað stakinu x^2 í Y . Köllum þessa vörpun f

Þessi vörpun (regla) úthlutar t.d. stakinu 2 í X stakinu $2^2 = 4$ í Y , og hún úthlutar stakinu 9 í X stakinu $9^2 = 81$ í Y . Þess vegna skrifum við $f(2) = 4$ og $f(9) = 81$

Oftast vilja menn þó geta skrifað þessa reglu í táknmáli á fljótlegan hátt, og nenna ekki að skrifa textann sem hefur verið skrifaður í þessu dæmi. Fljótlegri leið til að skilgreina þessa vörpun hefði verið að skrifa:

$$f : X \rightarrow Y, \quad f(x) = x^2$$

Athugum að hér er bakmengið $\mathbb{R}$ svo að f er fall.

(b)

Varpanir eiga oft við um eitthvað annað en tölur, tökum dæmi um það:

Látum A vera mengi allra íslenskra orða og B vera mengi allra íslenskra bókstafa. Skilgreinum nú vörpun á A sem úthlutar sérhverju orði í A fyrsta bókstafnum í því. Köllum þessa vörpun g .

Þessi vörpun úthlutar orðinu „hundur” bókstafnum „h” og þess vegna skrifum við $g(\text{hundur}) = h$

Þessi vörpun úthlutar orðinu „kirkja” bókstafnum „k” og þess vegna skrifum við $g(\text{kirkja}) = k$.

Í liðnum á undan náðum við að skilgreina vörpunina f með formúlunni $f(x) = x^2$. Hér er engin formúla til og við verðum að láta okkur nægja að útskýra hana með orðum.

(c)

Stundum þegar við erum að vinna með endanleg mengi getum við skilgreint vörpun með því að ákveða hvað hún gerir stak fyrir stak. Tökum dæmi um þetta:

Látum $W = \{1, 2, 3\}$ og $Z = \mathbb{Q}$. Skilgreinum nú vörpun h frá W í Z með reglunni:

h varpar stakinu 1 í stakið $\frac{3}{7}$

h varpar stakinu 2 í stakið $\frac{11}{3924}$

h varpar stakinu 3 í stakið 8

Hér erum við búin að skilgreina vörpun (reglu) með því einfaldlega að ákveða hvað vörpunin (reglan) gerir við hvert stak í formenginu.

Fljótlegri leið til að gera sama hlutinn hefði verið að skrifa:

Látum h vera vörpunina frá W í Z sem er skilgreind með

$$h(1) = \frac{3}{7} \quad h(2) = \frac{11}{3924} \quad h(3) = 8$$

Athugum að hér er engin sjáanleg formúla eða regla til að tengja saman stökin tvö og tvö, reglan er bara búin til stak fyrir stak.

Athugasemd:

Í stærðfræði sem er á einhvern hátt hagnýt er langoftast hægt að skilgreina varpanirnar eða föllin sem unnið er með útfrá formúlu eins og í lið (a).

Mikilvægt er að skilja að aðrar varpanir og föll eru samt til.

13.2 Graf vörpunar

Graf vörpunarinnar f er hlutmengi í faldmenginu $X \times Y$ sem skilgreint er með

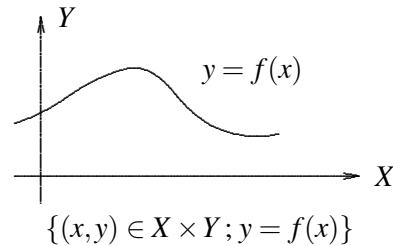
$$\{(x, f(x)) \in X \times Y; x \in X\}.$$

Athugum að samkvæmt skilgreiningu er graf ekkert nema mengi, en ekki eins konar mynd eins og margir gera sér hugmynd um.

Þegar f er fall frá $\mathbb{R}$ í $\mathbb{R}$ þá er hinsvegar hægt að sjá fyrir sér þetta graf myndrænt og oft er mjög gagnlegt að teikna upp mynd af grafinu sem hlutmengi í $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Þegar teiknuð er mynd af grafi falls, er í daglegu tali oftast talað um að teikna upp fallið.

Það að teikna upp fall er sáræinfallt:



Teikna skal mynd af fallinu f

1. Valdir eru nokkrir punktar $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ í $\mathbb{R}$.
(Í raun má velja þessa punkta hvernig sem er en ef maður vill fá góða mynd af fallinu er best að fara eftir ákveðnum reglum. Í seinni kafla eru útskýrðar reglur til að velja þessa punkta.)
2. Tölurnar $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$ eru reiknaðar út.
3. Punktarnir $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), \dots, (x_n, f(x_n))$ eru markaðir í hnitakerfið.
4. Ferill er teiknaður sem fer í gegnum alla punktana. Þessi ferill þarf að fara sem beinustu leið á milli punkta, en ekki telst góður siður að setja horn á ferilinn.
Reynt að fara ákveðinn milliveg milli þess að láta ferilinn fara sem beinustu leið á milli punkta og láta hann „beygja sem minnst“

13.3 Aðgerðir á föllum

Látum f og g vera einhver föll frá mengi X yfir í $Y = \mathbb{R}$. Þá getum við notað reikniaðgerðirnar á $\mathbb{R}$ til að skilgreina ný föll. Við skilgreinum *summu*, *mismun* og *margfeldi* fallana með:

Skilgreining 13.3.1.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x), & x \in X, \\(f-g)(x) &= f(x) - g(x), & x \in X \\(fg)(x) &= f(x)g(x), & x \in X.\end{aligned}$$

Ef $g(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in X$, þá getum við einnig skilgreint *kvóta* $\frac{f}{g}$ fallanna f og g með formúlunni

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in X$$

Athugasemd:

Sumum sem eru ekki orðnir vanir hugtakinu „fall” gæti fundist þessar skilgreiningar skrítnar, eða fundist við ekki vera að skilgreina neitt. Þetta er vissulega mjög augljós og náttúruleg skilgreining en samt nauðsynleg.

Tökum sem dæmi fyrsta liðinn $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Útskýrum í orðum hvað þetta þýðir.

Hér er verið að búa til nýtt fall (nýja úthlutunarreglu) á X . Nýja fallið (Nýju úthlutunarregluna) köllum við $f + g$. Það úthlutar sérhverju staki $x \in X$ stakinu sem er fengið með formúlunni $f(x) + g(x)$.

13.4 Lotubundin föll

Við segjum að fall sé lotubundið ef það í vissum skilningi endurtekur sjálft sig aftur og aftur, formleg skilgreining er:

Skilgreining 13.4.1. Fall $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er sagt vera lotubundið með lotu a ef $a \in \mathbb{R}$ og $f(x + a) = f(x)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$

Sérstaklega skal taka fram að þegar við segjum að einhver tala a sé lota einhvers falls f þá er ekki þar með sagt að það sé minnsta mögulega lotan. Fall með lotu 4 getur líka haft lotu 2.

Við sjáum líka að ef a er lota einhvers falls a þá verður $2a$ líka lota fallsins því að fyrir öll x fæst

$$f(x + 2a) = f((x + a) + a) = f(x + a) = f(x)$$

Auðvelt er að sjá að svona er hægt að halda áfram fyrir allar heilar tölur og við fáum reglu:

Setning 13.4.1 Látum $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ver lotubundið fall með lotu a , þá er $f(x + na) = f(x)$ fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$ og öll $x \in \mathbb{R}$.

Oft er þægilegt að notfæra sér þetta hugtak til að skilgreina ný föll:

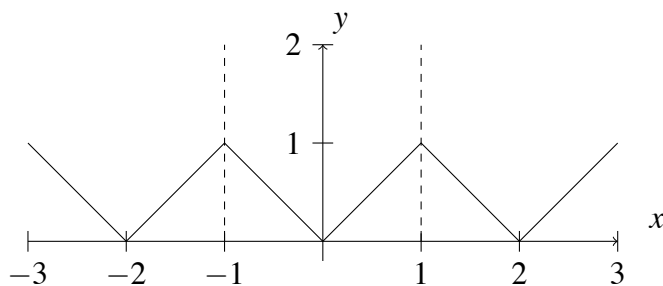
Dæmi 13.4.1. Látum $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vera fallið sem er með lotu 2 og er skilgreint með formúlunni:

$$f(x) = |x| \quad \text{ef} \quad x \in [-1, 1[$$

Tökum eftir að formúlan er aðeins tekin fram fyrir bilið $[-1, 1[$ en hún nægir samt til að skilgreina f ótvírætt á öllu $\mathbb{R}$ því ef x er tala sem er ekki á þessu bili getum við alltaf fundið $f(x)$ með því að notfæra okkur það að það er með lotu 2. Til dæmis ef reikna á $f(5)$ þá getum við notfært okkur lotu fallsins til að reikna:

$$f(5) = f(-1 + 3 \cdot 2) = f(-1) = |-1| = 1$$

Tökum eftir að við þurftum að „færa okkur” inn á svæði þar sem að formúlan fyrir f var gefin. Hér að neðan er mynd af fallinu. Upphaflega lotan sem gefin er með formúlu er mörkuð innan við punktalínur.



13.5 Jafnstæð og oddstæð föll

Skilgreinum jafnstæð og oddstæð föll:

Skilgreining 13.5.1. Látum $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall.

Við segjum að f sé jafnstætt ef $f(-x) = f(x)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$

Við segjum að f sé oddstætt ef $f(-x) = -f(x)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$

Skodum þessar skilgreiningar myndrænt.

Fall er sagt jafnstætt ef myndin af grafi þess er eins sitt hvoru megin við y -ásinn.

Fall er sagt oddstætt ef myndin af grafi þess verður spegluð um x -ás ef fært sig er yfir y -ásinn.

Dæmi 13.5.1. Skerið úr um hvort föllin séu jafnstæð, oddstæð eða hvorugt.

(a)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gefið með $f(x) = x^2$

(b)

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gefið með $g(x) = x^3$

(c)

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gefið með $h(x) = x^2 + x^3$

Lausn:

(a)

f er jafnstætt því að fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ gildir $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

(b)

g er oddstætt því að fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ gildir $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$

(c)

Hér er h hvorki jafnstætt né oddstætt. Til að sýna það þurfum við einfaldlega að finna dæmi um x þannig að $h(-x) \neq h(x)$ og $h(-x) \neq -h(x)$.

Ef að við prófum $x = 2$ fáum við að $h(2) = 12$, $h(-2) = -4$.

Við sjáum þá að $h(-2) \neq h(2)$ og $h(-2) \neq -h(2)$.

Dæmi 13.5.2. Skilgreinum fall $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ með:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } x \text{ er óræð tala} \\ 1 & \text{ef } x \text{ er ræð tala} \end{cases}$$

(a)

Skertið úr um hvort f er jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.

(b)

Finnið allar lotur fallsins f .

Með öðrum orðum, finnið einfalda framsetningu á menginu:

$$\{a \in \mathbb{R}; a \text{ er lota fallsins } f\}$$

Lausn:

(a)

Augljóst er að ef x er ræð tala þá er $-x$ líka ræð tala.

Við fáum þess vegna að fyrir allar ræðar tölur x er $f(x) = 1$ og $f(-x) = 1$. Þess vegna er $f(x) = f(-x)$ ef x er ræð.

Eins sést að $f(x) = f(-x)$ ef x er óræð tala.

Allar tölur eru annað hvort ræðar eða óræðar svo að við höfum fengið

$$f(-x) = f(x) \quad \text{fyrir öll } x \in \mathbb{R}$$

Með öðrum orðum þá er fallið jafnstætt.

(b)

Skiptum dæminu í tvo liði:

1. Sýnum fyrst að sérhver ræð tala er lota fallsins f .

Látum a vera ræða tölu.

Við þurfum að sýna að fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ þá gildi $f(x+a) = f(x)$.

Ef x er líka ræð tala þá er auðvelt að sjá að summan $x+a$ er líka ræð tala þess vegna fæst $f(x+a) = f(x)$ fyrir öll ræð x .

Ef x er óræð tala þá er auðvelt að sjá að $x+a$ er líka óræð. Þess vegna gildir $f(x+a) = f(x)$ fyrir öll óræð x .

Öll $x \in \mathbb{R}$ eru annaðhvort ræð eða óræð, og því höfum við sýnt að

$$f(x+a) = f(x) \quad \text{fyrir öll } x \in \mathbb{R}$$

Með öðrum orðum þá er a lota fallsins f .

2. Sýnum næst að engin óræð tala sé lota fallsins f .

Látum a vera óræða tölu.

Við þurfum að sýna að til er tala x_0 þ.a. $f(x_0+a) \neq f(x_0)$.

Látum $x_0 = -a$, þá er x_0 óræð svo að $f(x_0) = 0$.

Hinsvegar er $f(x_0+a) = f(-a+a) = f(0) = 1$ því að 0 er ræð tala.

Við höfum fengið að $f(x_0+a) \neq f(x_0)$ svo að fallið hefur ekki lotu a .

Af liðum 1. og 2. sést að a er lota fallsins f þ.p.a.a. a sé ræð tala.

Með öðrum orðum er

$$\{a \in \mathbb{R}; a \text{ er lota fallsins } f\} = \mathbb{Q}$$

13.6 Einhalla föll

Fall er sagt vera *vaxandi* ef myndin af grafi þess gerir ekkert nema vaxa.

Skilgreining 13.6.1. Látum $X \subset \mathbb{R}$, og $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall.

- Ef um sérhver $x_1, x_2 \in X$ sem eru valin þannig að $x_1 > x_2$ gildir

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Þá er f sagt vera vaxandi fall.

- Ef um sérhver $x_1, x_2 \in X$ sem eru valin þannig að $x_1 > x_2$ gildir

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Þá er f sagt vera minnkandi fall.

- Ef að ójöfnurnar fyrir fallgildin í skilgreiningunum væru strangar væri f sagt vera stranglega vaxandi/minnkandi fall.
- Fall sem er annað hvort vaxandi eða minnkandi er sagt vera einhalla.
- Fall sem er annað hvort stranglega vaxandi eða stranglega minnkandi er sagt vera stranglega einhalla.

14 Margliður

14.1 Margliður

Margliða er fall $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sem tákna má með formúlu af gerðinni

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Þar sem $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ stuðlarnir a_j eru rauntölur og $a_n \neq 0$.

Náttúrulega talan n kallast stig margliðunnar. Stig margliðu p er táknað með $\deg p$.

Margliðan er sögð vera stöðluð ef $a_n = 1$.

Um margliður gildir mikilvæg regla:

Setning 14.1.1 Látum $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ og $q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ vera maragliður af stigi n og m .

Ef $p(x) = q(x)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ þá er $n = m$ og

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_m$$

Þessi regla segir í töluðu máli að margliður eru jafnar þ.p.a.a. allir stuðlar þeirra séu jafnir. Til að sanna þessa reglu þarf annaðhvort þekkingu í línulegri algebru eða nota sér samfelldni margliðunnar og þrepun. Þetta eru hugtök sem er ekki búið að kynna ennþá og þess vegna verður sönnuninni sleppt hér.

Dæmi 14.1.1. (a)

$p(x) = 3x^5 + \pi x^2 - \frac{4}{5}$ er dæmi um margliðu. Hér er $a_0 = -\frac{4}{5}$, $a_2 = \pi$, $a_5 = 3$ og $a_1 = a_3 = a_4 = 0$. Þessi margliða hefur stig 5. Hún er ekki stöðluð því að $a_5 = 3$.

(b)

$g(x) = 3^x$ er ekki margliða.

14.2 Núllstöðvar margliða

Ef p er margliða og x_0 er tala þ.a. $p(x_0) = 0$ þá segjum við að x_0 sé *núllstöð* eða *rót* margliðunnar p .

Sumar margliður hafa engar núllstöðvar eins og t.d. margliðan $p(x) = x^2 + 1$ (sem sést af því að talan x^2 er stærri en 0 fyrir öll x).

Aðrar margliður hafa margar núllstöðvar, eins og til dæmis margliðan $q(x) = x^2 - 1$ sem hefur núllstöðvarnar $x = 1$ og $x = -1$.

Fjöldi núllstöðva margliða er þó takmarkaður eins og fram kemur í eftirfarandi reglu:

Setning 14.2.1 Látum p vera margliðu af stigi n . Fjöldi mismunandi núllstöðva margliðunnar p er þá í mesta lagi n .

Margliður koma oft fram þegar reynt er að lýsa náttúrunni með stærðfræði, og því teljast margliður vera mikilvæg föll.

Það er því mjög gagnlegt að geta fundið allar núllstöðvar gefinnar margliðu p . Þegar allar núllstöðvar margliðu p eru fundnar er í daglegu máli talað um að leysa margliðuna p .

Til eru einfaldar formúlur til að leysa allar fyrsta og annars stigs margliður. Þær verða útskýrðar í næstu köflum.

Einnig eru til aðferðir til að leysa þriðja og fjórða stigs margliður en þær eru töluvert flóknari og verða ekki skýrðar hér.

Í langan tíma reyndu stærðfræðingar að leysa margliður af fimmsta stigi og hærra. Árið 1823 tókst manni að nafni Niels Henrik Abel hins vegar að sanna sláandi niðurstöðu. Honum tókst að sanna að ekki er hægt að leysa almennar margliður af stigi fimm og hærra. Það er niðurstaða sem gríðarlega flókið er að sanna. Það eitt að setja þessa niðurstöðu formlega fram telst vera allt of flókið fyrir þennan texta.

14.3 Fyrsta og annað stig margliða

Fyrsta stigs margliður

Fyrsta stigs margliða er fall af gerðinni $p(x) = ax + b$, þar sem $a \neq 0$ og $b \in \mathbb{R}$. Þessi margliða hefur í mesta lagi eina núllstöð. Þessa núllstöð er auðvelt að finna. Maður einangrar einfaldlega x úr jöfnunni $ax + b = 0$ og fær $x = -b/a$.

Dæmi 14.3.1. Finnið núllstöð margliðunnar $p(x) = 4x + 8$.

Lausn:

Leysum úr jöfnunni $4x + 8 = 0$. Fáum:

$$4x = -8 \quad \text{sem jafngildir} \quad x = -2$$

Margliðan hefur eina núllstöð $x = -2$

Annars stigs margliður

Látum $p(x) = ax^2 + bx + c$ þar sem $a \neq 0$ og $b, c \in \mathbb{R}$ vera margliðu af stigi tvö. Talan $D = b^2 - 4ac$ nefnist þá aðgreinir margliðunnar. Lausn margliðunnar p þarf að skipta í þrjú tilvik.

1. Ef $D < 0$ þá hefur margliðan p enga núllstöð
2. Ef $D = 0$ þá hefur margliðan p eina núllstöð $x = \frac{-b}{2a}$
3. Ef $D > 0$ þá hefur margliðan p tvær núllstöðvar:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Sönnunin á þessu er ekki ýkja flókin:

Einangra þarf x útúr jöfnunni $ax^2 + bx + c = 0$. Ef deilt er með a báðu megin jafnaðarmerkis fæst jafnan

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Nú leggjum við töluna $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ við báðu megin jafnaðarmerkis til að fá

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Ferningsreglan er notuð vinstra megin jafnaðarmerkisins og hægri megin eru brotin lögð saman til að fá:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Skiptum nú í þrjú tilvik:

1. Ef $b^2 - 4ac < 0$ þá er stærðin vinstra megin jafnaðarmerkisins jákvæð en sú sem er hægra megin er neikvæð. jafnan hefur því enga lausn.
2. Ef $b^2 - 4ac = 0$ þá stendur eftir jafnan:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \text{sem jafngildir} \quad x + \frac{b}{2a} = 0.$$

Þetta gefur svo $x = \frac{-b}{2a}$

3. Ef $b^2 - 4ac > 0$ þá má taka rót báðu megin jafnaðarmerkis til að fá:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sem jafngildir

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dæmi 14.3.2. Leysið jöfnuna $2x^2 + 3x - 5 = 2$.

Lausn:

Við komum jöfnunni á staðlað form með því að færa yfir jafnaðarmerkið, þ.e.

$2x^2 + 3x - 7 = 0$. Þá getum við stungið öllu saman inn í lausnarformúlu annars stigs jöfnu. Hér er $a = 2$, $b = 3$ og $c = -7$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4}.$$

Lausnirnar eru $\frac{-3 - \sqrt{65}}{4}$ og $\frac{-3 + \sqrt{65}}{4}$.

14.4 Þáttun margliða

Ef tvær margliður p og q eru lagðar saman eða önnur dregin frá hinnari verður útkoman ný margliða. Margfeldið pq verður einnig ný margliða, en það sama verður ekki sagt um deilingu. Ef p og q eru margliður þá er fallið $\frac{p}{q}$ almennt ekki margliða.

Þetta svipar dáltilið til heilu talnanna og alveg eins og með heilar tölur getum við skilgreint að ein margliða gangi upp í annari:

Skilgreining 14.4.1. Látum p og q vera margliður. Ef að til er margliða h þannig að $p = hq$ þá segjum við að margliðan q gangi upp í margliðunni p . Þá skrifum við líka $\frac{p}{q} = h$ eða $p/q = h$

Athugum að sérhver margliða p gengur uppí sjálfa sig því að $p = 1 \cdot p$
 Það að skrifa margliðu q sem margfeldi margliða af lægra stigi kallast *þáttun* margliðu.
 Margliða q er sögð *óþáttanleg* ef engin margliða af lægra stigi en q gengur upp í q .
 Margliða er sögð vera *fullþáttuð* ef að búið er að skrifa hana sem margfeldi af óþáttanlegum margliðum.
 Það getur verið mjög gagnlegt að þátta margliður. Þess vegna er gagnlegt að vita fyrirfram hvort það sé í höfuð hægt að þátta margliðu. Eftirfarandi regla segir til um það:

Setning 14.4.1 Sérhver margliða sem hefur stig hærra en tveir er þáttanleg.
 Með öðrum orðum, ef q er margliða af stigi $n \geq 3$ þá eru til margliður q_1 og q_2 sem eru ekki fastar og $q = q_1 q_2$

Það getur verið erfitt að þátta margliður, eftirfarandi regla gerir manni þó lífið töluvert léttara:

Setning 14.4.2 Látum p vera margliðu. Þá gengur margliðan $x - a$ uppí margliðunni p þá og því aðeins að $p(a) = 0$

Þessi regla nýtist vel við að þátta margliður. Sértilvik af þessari reglu er nefnilega:

Setning 14.4.3 Ef p er stöðluð margliða af stigi n og hún hefur n ólíkar rætur, $a_1, a_2, \dots, a_n$. Þá má skrifa $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$

Dæmi 14.4.1. Fullþáttið $p(x) = x^2 + 2x - 5$.

Lausn:

Hér er $a = 1$, $b = 2$ og $c = -5$. Stingum þessu inní lausnarformúlu annars stigs jöfnu.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$$

Samkvæmt reglu getum við því þáttað:

$$p(x) = (x - (-1 + \sqrt{6}))(x - (-1 - \sqrt{6})) = (x + 1 - \sqrt{6})(x + 1 + \sqrt{6}).$$

14.5 Deiling með afgangi

Eins og á heiltölunum er deiling á margliðum ekki fullkomin í þeim skilningi að ef einni margliðu er deilt með annari fæst ekki alltaf margliða út. Við skilgreinum því deilingu með afgangi til að hjálpa okkur:

Skilgreining 14.5.1. Látum p og q vera margliður. Þá eru til margliður s og r þannig að

$$p = qs + r \quad \text{og} \quad \deg r < \deg q$$

Það að finna þessar margliður s og r kallast deiling með afgangi.

Hægt er að nota aðferð sem er mjög lík löngudeilingu með heiltölur til að deila margliðum með afgangi.

Dæmi 14.5.1. Deilið með margliðunni $q(x) = x + 4$ í margliðuna $p(x) = x^4 + 2x - 4$ með afgangi.

Lausn:

Með löngudeilingu fæst eftirfarandi

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 16x - 62. \\ x+4 \overline{) \begin{array}{r} x^4 - 4 \\ -x^4 - 4x^3 \\ \hline -4x^3 \\ 4x^3 + 16x^2 \\ \hline 16x^2 + 2x \\ -16x^2 - 64x \\ \hline -62x - 4 \\ 62x + 248 \\ \hline 244 \end{array}} \end{array}$$

Þetta segir okkur að $s(x) = x^3 - 4x^2 + 16x - 62$ og $r(x) = 244$. Við getum nú skrifað:

$$x^4 + 2x - 4 = (x + 4)(x^3 - 4x^2 + 16x - 62) + 244.$$

Dæmi 14.5.2. Finnið allar rætur margliðunnar $p(x) = x^3 + x - 10$. Gefið er að $x = 2$ er rót.

Lausn:

Við vitum að þar sem $x = 2$ er rót á margliðunni þá gengur margliðan $x - 2$ uppí margliðunni p . Notum margliðudeilingu til að þátta p .

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 5 \\ x-2 \overline{) x^3 + x - 10} \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ 2x^2 + x \\ \underline{-2x^2 + 4x} \\ 5x - 10 \\ \underline{-5x + 10} \\ 0 \end{array}$$

Af þessu sjáum við að

$$p(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 5)$$

Finnum nú núllstöðvar margliðunnar $x^2 + 2x + 5$. Við notum til þess lausn annars stigs margliðu. Fáum:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Við sjáum að aðgreinir annars stigs margliðunnar er minni en $-16 < 0$.

Margliðan $x^2 + 2x + 5$ hefur því engar núllstöðvar. $x = 2$ er því eina núllstöð upprunalegu margliðunnar p .

14.6 p/q-aðferð

Engin almenn leið er til sem að leysir margliður af háum stigum. Eftirfarandi regla getur þó nýst okkur stundum:

Setning 14.6.1 Látum $r(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ vera margliðu af stigi n ($a_n \neq 0$) með heiltölustuðla. Ef að ræð tala p/q er núllstöð margliðunnar r þá gengur p uppí a_0 og q gengur uppí a_n .

Þessi regla segir okkur að ef að við viljum finna einhverja núllstöð margliðu $r(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ þá er ráðlagt að „giska“ fyrst á núllstöðvarnar af gerðinni $\frac{p}{q}$ þar sem p gengur uppí a_0 og q gengur uppí a_n .

Dæmi 14.6.1. Finnið einhverja núllstöð á margliðunni $r(x) = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 9$

Lausn:

Mengi allra talna sem gengur uppí tölunni 2 er $A = \{1, -1, 2, -2\}$. Mengi allra talna sem

gengur uppí tölunni 27 er $B = \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$

$\frac{p}{q}$ -aðferð segir okkur að við eigum að giska á núllstöð af gerðinni $\frac{p}{q}$ þar sem $p \in B$ og $q \in A$.

Öll möguleg brot af slíkri gerð eru $4 \cdot 6 = 24$ talsins, hins vegar má í raun sleppa öllum mínustölum í öðru hvoru menginu því annars tvíteljum við margar tölur. Sleppum mínustölunum í A og þá eru 12 möguleikar:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{9}{1}, \frac{9}{2}, \frac{-9}{1}, \frac{-9}{2}$$

Stingum öllum þessum tölum inní margliðuna r :

$$r\left(\frac{1}{1}\right) = r(1) = -14$$

$$r\left(\frac{1}{2}\right) = -10$$

$$r\left(\frac{-1}{1}\right) = r(-1) = -4$$

$$r\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{35}{4}$$

$$r\left(\frac{3}{1}\right) = r(3) = 0$$

$$r\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{81}{4}$$

$$r\left(\frac{-3}{1}\right) = r(-3) = 270$$

$$r\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{27}{2}$$

$$r\left(\frac{9}{1}\right) = r(9) = 9306$$

$$r\left(\frac{9}{2}\right) = 315$$

$$r\left(\frac{-9}{1}\right) = r(-9) = 16596$$

$$r\left(\frac{-9}{2}\right) = \frac{4905}{4}$$

Með þessari aðferð fundum við eina núllstöð. Nefnilega núllstöðina $x = 3$ því að $r(3) = 0$.

15 Inngangur að ræðum föllum

15.1 Ræð föll

Ef r er fall sem tákna má með formúlu af gerðinni

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

Þá segjum við að r sé *rætt fall*.

Í þessari formúlu er $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, stuðlarnir a_i og b_i eru rauntölur fyrir öll i og fremstu stuðlarnir mega ekki vera 0, þ.e.a.s. $a_n, b_m \neq 0$.

Þetta er bara önnur leið til að segja að fallið r kallist rætt fall ef til eru margliður p og q þ.a.

$$r = \frac{p}{q}$$

Stofnbrotisliðun

Látum p og q vera margliður og látum $r = \frac{p}{q}$. Ef margliðurnar p og q eru af háum stigum getur ræða fallið r oft verið erfitt viðureignar. Þá er gagnlegt að geta skrifað r sem summu af einfaldari ræðum föllum. Eftirfarandi regla getur þá stundum verið gagnleg:

Setning 15.1.1 Látum p og q vera margliður af stigi n og m .

G.r.f. að margliðan q hafi m ólíkar rætur $a_1, a_2, \dots, a_m$

Þá er til margliða s og fastar $b_1, b_2, \dots, b_m$ þ.a.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2} + \dots + \frac{b_m}{x-a_m}$$

Þegar þessari reglu er beitt þá segjumst við vera að *stofnbrottsliða* ræða fallið p/q .

Við sönnum þessa reglu ekki beint en lýsum aðferðinni til að stofnbrottsliða hér:

Stofnbrottsliða skal ræða fallið $\frac{p}{q}$ þar sem p og q eru margliður og

$$q(x) = c_m x^m + \dots + c_1 x + c_0$$

er af stigi m

1. *Finnum allar núllstöðvar margliðunnar q .*

Ef margliðan hefur færri en m núllstöðvar hættum við því að þá virkar þessi aðferð ekki.

Ef m ólíkar núllstöðvar finnast köllum við þær $a_1, a_2, \dots, a_m$.

2. *Deilum margliðunni q uppí margliðuna p með afgangi til þess að finna margliður s og p_1 sem eru þannig að $\deg p_1 < \deg q$ og $p = sq + p_1$. Þá má skrifa:*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

3. *Skilgreinum nýja margliðu q' með því að setja*

$$q'(x) = mc_m x^{m-1} + (m-1)c_{m-1} x^{m-2} + \dots + 2 \cdot c_2 x + 1 \cdot c_1$$

4. *Reiknum út stuðlana $b_1, b_2, \dots, b_m$ með formúlunni*

$$b_i = \frac{p_1(a_i)}{q'(a_i)} \quad \text{fyrir öll } i$$

5. *Nú má skrifa*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2} + \dots + \frac{b_m}{x-a_m}$$

Athugasemd

Þeir sem eru komnir aðeins lengra í stærðfræði og þekkja diffrun munu taka eftir að í aðferðinni að ofan þá er nýja margliðan q' diffurkvótinn af margliðunni q .

Dæmi 15.1.1. Stofnbrottsliðið ræða fallið

$$\frac{x^4 - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

Lausn:

Hér er $p(x) = x^4 - 2$ og $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

1. Finnum núllstöðvar q .

p/q -aðferð sem lýst var í síðasta kafla segir okkur að við eigum að prófa hvort tölurnar $-1, 1, -2, 2$ séu núllstöðvar margliðunnar q :

$$q(-1) = 0 \quad q(1) = 0 \quad q(-2) = 0 \quad q(2) = 12$$

Hér fundum við þrjár mismunandi núllstöðvar, q hefur stig 3 svo við getum haldið áfram. Við setjum $a_1 = -1, a_2 = 1$ og $a_3 = -2$.

2. Deilum q uppí p með afgangi:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x - 2 \overline{) x^4 - 2} \\ \underline{-x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x} \\ -2x^3 + x^2 + 2x - 2 \\ \underline{2x^3 + 4x^2 - 2x - 4} \\ 5x^2 - 6 \end{array}$$

Skv. þessu getum við skrifað

$$p(x) = (x - 2)q(x) + (5x^2 - 6)$$

Við setjum $p_1(x) = 5x^2 - 6$ og $s(x) = x - 2$.

3. Skilgreinum margliðuna

$$q'(x) = 3x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 1x^{1-1} = 3x^2 + 4x - 1$$

4. Reiknum út:

$$b_1 = \frac{p_1(a_1)}{q'(a_1)} = \frac{p_1(-1)}{q'(-1)} = \frac{5 \cdot (-1)^2 - 6}{3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{p_1(a_2)}{q'(a_2)} = \frac{-1}{6} \quad \text{og} \quad b_3 = \frac{p_1(a_3)}{q'(a_3)} = \frac{14}{3}$$

5. Lausnin okkar er þess vegna:

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} &= x - 2 + \frac{1/2}{x + 1} + \frac{-1/6}{x - 1} + \frac{14/3}{x + 2} \\ &= x - 2 + \frac{1}{2(x + 1)} - \frac{1}{6(x - 1)} + \frac{14}{3(x + 2)}. \end{aligned}$$

16 Vísisföll

16.1 Vísisföll

Vísisfall er fall $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sem skrifa má með formúlu af gerðinni

$$f(x) = a^x$$

Þar sem $a \geq 0$ er rauntala.

Það er fátt hægt að segja um vísisföll eins og er. Höfundur ráðleggur nemendum að rifja upp veldareglurnar sem segir frá í kaflanum um veldareikning.

17 Andhverfur falla

17.1 Andhverfa vörpunar

Skilgreining á andhverfu vörpunnar er svohljóðandi:

Skilgreining 17.1.1. Látum A og B vera gefin mengi og $f : A \rightarrow B$ vera vörpun. Ef til er vörpun $g : B \rightarrow A$ þannig að

$$f(g(b)) = b \quad \text{fyrir öll} \quad b \in B$$

og

$$g(f(a)) = a \quad \text{fyrir öll} \quad a \in A$$

þá kallast fallið g andhverfa vörpunarinnar f .

Andhverfa vörpunarinnar f er oft táknuð með f^{-1} .

Í vissum skilningi er andhverfa vörpunarinnar f sú vörpun sem gerir „akkúrat öfugt“ við það sem vörpunin f gerir.

Ef við förum aftur í orðalag kaflans um varpanir og föll þá er vörpunin f^{-1} sú regla sem úthlutar sérhverju staki $f(a)$ í B stakinu a í A .

Tökum dæmi um þetta:

Dæmi 17.1.1. Látum A vera mengi allra Íslendinga og B vera mengið sem inniheldur allar íslenskar kennitölur.

Skilgreinum nú vörpun $k : A \rightarrow B$ sem úthlutar sérhverjum Íslendingi kennitölu sinni.

Þá er andhverfan $k^{-1} : B \rightarrow A$ og hún úthlutar sérhverri íslenskri kennitölu Íslendingnum sem á þá kennitölu.

Dæmi 17.1.2. Skilgreinum fall $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ með formúlunni $f(x) = x^2$.

Finnið andhverfu fallsins f .

Lausn:

Skilgreiningarmengið er hér jákvæðu rauntölurnar, rótarfallið var í raun skilgreint sem andhverfa þessa falls.

Andhverfan er $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, staðfestum það:

Fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}_+$ er $(\sqrt{x})^2 = x$.

Fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}_+$ er $\sqrt{x^2} = x$.

Andhverfan hefur verið staðfest.

Dæmi 17.1.3. Skilgreinum fall $f : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+$ með formúlunni $f(x) = x^2$.

Finnið andhverfu fallsins f .

Lausn:

Tökum eftir að þetta er ekki alveg sama fallið og í dæminu á undan því að skilgreiningarmengið er annað, nú er skilgreiningarmengið neikvæðu rauntölurnar. Við sjáum að ef x er neikvæð rauntala þá er $\sqrt{x^2} = -x$.

Til dæmis ef $x = -3$ þá fæst $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3) = -x$.

Þess vegna er andhverfufallið í þetta skiptið $f^{-1} = -\sqrt{x}$.

Staðfestum það:

Fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}_+$ þá er $(-\sqrt{x})^2 = (\sqrt{x})^2 = x$

Fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}_-$ þá er $-\sqrt{x^2} = -(-x) = x$

Þetta staðfestir andhverfunna.

Dæmi 17.1.4. Látum $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall gefið með formúlunni

$$f(x) = x + 4$$

Finnið andhverfu fallsins.

Lausn:

Skrifum y í staðin fyrir $f(x)$ í formúlu fallsins.

$$y = x + 4$$

Einangrum x úr þessari jöfnu

$$x = y - 4$$

Þetta gefur okkur að andhverfa f er

$$f^{-1}(x) = x - 4.$$

Dæmi 17.1.5. Látum f vera fall gefið með formúlunni

$$f(x) = \frac{x+5}{x-2}$$

Finnið andhverfu fallsins.

Lausn:

Skrifum y í staðin fyrir $f(x)$ í formúlu fallsins

$$y = \frac{x+5}{x-2}$$

Einangrum nú x í þessari jöfnu:

Fáum

$$y(x-2) = x+5$$

Margföldum uppúr sviganum og færum yfir jafnaðarmerkið til að fá

$$yx - x = 5 + 2y$$

Tökum x útfyrir sviga vinstra megin

$$x(y-1) = 5+2y$$

Deilum í gegn með $(y-1)$ til að fá

$$x = \frac{5+2y}{y-1}$$

Nú höfum við einangrað x úr upphaflegu jöfnunni. Andhverfufallið okkar er þá

$$f^{-1}(x) = \frac{5+2x}{x-1}$$

(Athugum að þegar skilgreiningarmengi falls er ekki tilgreint má gera ráð fyrir að það sé stærsta mögulega skilgreiningarmengið. Skilgreiningarmengi f yrði þess vegna hér $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Tveir er dregið frá menginu því annars yrði deilt með núlli. Skilgreiningarmengi andhverfufallsins f^{-1} yrði $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ útaf sömu ástæðu.)

18 Lograr

18.1 Lograr

Látum a vera jákvæða rauntölu og $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vera vísisfall gefið með formúlunni

$$f(x) = a^x$$

Þetta fall á sér andhverfu sem að við köllum a -logrann og er táknaður með

$$\log_a$$

Skv. skilgreiningu á andhverfu í kaflanum á undan er a -logrinn þess vegna fallið sem uppfyllir:

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{fyrir öll } x \in \mathbb{R}$$

og

$$a^{\log_a(x)} = x \quad \text{fyrir öll } x \in \mathbb{R}_+$$

Þegar nemandi er beðinn um að reikna út töluna $\log_a(x)$ fyrir gefin x og a er spurningin í töluðu máli þessi:

„Í hvaða veldi þarf að setja a svo að útkoman verði x ?”

Þar sem að við vinnum í tugakerfi á þessari jörð þá er talan tíu stundum hafin yfir aðrar tölur. Þess vegna er tíu-logrinn oftast bara kallaður logrinn án þess að taka fram töluna tíu og hann er táknður með $\log$ í staðin fyrir $\log_{10}$.

Dæmi 18.1.1. Reikinð

(a) $\log_2(8)$

(b) $\log_3(81)$

(c) $\log(10^6)$

Lausn:

(a)

Í töluðu máli er spurningin þessi:

„Í hvaða veldi þarf að setja tvo svo að útkoman verði átta?”

Auðvelt er að reikna að $2^3 = 8$, svarið er þess vegna 3 og þess vegna skrifum við

$$\log_2(8) = 3$$

(b)

Auðvelt er að staðfesta að $3^4 = 81$, þess vegna er

$$\log_3(81) = 4$$

(c)

Hér er engin tala sett í index svo að við drögum þá ályktun að við séum að vinna með tíu-logrann. Svarið er eiginlega gefið í sjálfri spurningunni því að í töluðu máli er spurningin þessi;

„Í hvaða veldi þarf 10 að vera til þess að útkoman verði 10^6 ”

Það ætti að vera ljóst að svarið er 6 og þess vegna skrifum við

$$\log(10^6) = 6.$$

18.2 Lograreglur

Um logra gilda nokkrar reglur:

Setning 18.2.1 Fyrir $a, b, x, y \in \mathbb{R}_+$ og $r \in \mathbb{R}$ gildir:

1. $\log_a(1) = 0$

2. $\log_a(1/x) = -\log_a(x)$
3. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
4. $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$
5. $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$
6. $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

Sönnum þessar reglur og tökum svo nokkur dæmi:

1. Fyrir sérhvert $a \in \mathbb{R}_+$ þá er $a^0 = 1$, þess vegna er

$$\log_a(1) = 0$$

2. Við þurfum að sýna að ef talan a er hafin upp í veldið $-\log_a(x)$ þá verði útkoman $1/x$.

Það fæst beint af veldareglum og skilgreiningu á logra:

$$a^{-\log_a(x)} = (a^{\log_a(x)})^{-1} = x^{-1} = 1/x$$

3. Við þurfum að sýna að ef talan a er hafin upp í veldið $\log_a(x) + \log_a(y)$ þá verði útkoman xy .

Það fæst beint af veldareglunum og skilgreiningu á logra:

$$a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = xy$$

4. Fæst beint af liðum 2 og 3 nefnilega:

$$\log_a(x/y) = \log_a(x) + \log_a(1/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

5. Við þurfum að sýna að ef talan a er hafin upp í veldið $r\log_a(x)$ þá fæst útkoman x^r :

$$a^{r\log_a(x)} = (a^{\log_a(x)})^r = x^r$$

6. Við þurfum að sýna að ef talan a er hafin upp í veldið $\log_b(x)/\log_b(a)$ þá fæst útkoman x .

Athugum að fyrir öll $a, b \in \mathbb{R}_+$ gildir $a = b^{\log_b(a)}$. Þess vegna fæst:

$$a^{\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}} = (b^{\log_b(a)})^{\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}} = b^{\log_b(a) \cdot \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}} = b^{\log_b(x)} = x$$

Athugum að á flestum vasareiknum er ekki hægt að reikna alla logra. Yfirleitt er bara takki fyrir tíu-logrann sem er táknaður með $\log$. Þess vegna er reikniregla sex hér að ofan mjög mikilvæg því að hún segir sér í lagi að fyrir sérhvert $a \in \mathbb{R}_+$ er

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

Dæmi 18.2.1. Reiknið án vasareiknis:

(a) $\log_5(50) + \log_5(\frac{1}{2})$

(b) $\log_2(49) \cdot \log_7(2)$

(c) $(\log_{12}(1))^{12}$

Reiknið með vasareikni:

(d) $\log_7(22)$

(e) $\log_2(5)$

Lausn:

(a)

Við notum reiknireglur þrjú og fjögur:

$$\log_5(50) + \log_5(\frac{1}{2}) = \log_5(5^2 \cdot 2) - \log_5(2) = \log_5(5^2) + \log_5(2) - \log_5(2) = \log_5(5^2) = 2$$

(b)

Notum reiknireglu sex:

$$\log_2(49) \cdot \log_7(2) = \frac{\log_7(49)}{\log_7(2)} \cdot \log_7(2) = \log_7(49) = \log_7(7^2) = 2$$

(c)

Notum reiknireglu eitt:

$$(\log_{12}(1))^{12} = 0^{12} = 0$$

(d)

Notum reiknireglu sex, stingum stærðinni $\log(22)/\log(7)$ inní vasareikninn og fáum

$$\log_7(22) \approx 0,629532003$$

(e)

Notum reiknireglu sex, stingum stærðinni $\log(5)/\log(2)$ inní vasareikninn og fáum

$$\log_2(5) \approx 2,321928095.$$

19 Hornaföll og einingarhringurinn

19.1 Bogaeiningar

Hingað til höfum við í öllum reikningum okkar notað mælieininguna *gráður* til þess að mæla horn. Samkvæmt skilgreiningu þá skiptir hún hringnum í þrjúhundruð-og-sextíu jafna hluta og einn slíkur hluti er kallaður ein gráða.

Hvernig talan 360 varð fyrir valinu er ekki vitað fyrir víst. Kenningar segja að þessi tala sé komin frá Babilon sem notuðu tugakerfi byggt á tölunni 60 en ekki á tölunni 10 eins og við. Sumir benda á að í tunglmánuði séu 30 dagar, og að í árinu séu 12 mánuðir, og halda að talan $360 = 12 \cdot 30$ sé komin þaðan.

Stærðfræðilega séð þykir talan 360 ekkert merkilegri en aðrar tölur og því engin ástæða til að búa til mælieiningakerfi byggt á henni. Í raun er til miklu náttúrulegri leið til að skilgreina nýja mælieiningu á horn. Þessa nýju mælieiningu köllum við *bogaeiningu* og hún er skilgreind á eftirfarandi máta:

Skilgreining 19.1.1. Látum α vera horn. Köllum oddpunkt hornsins O .

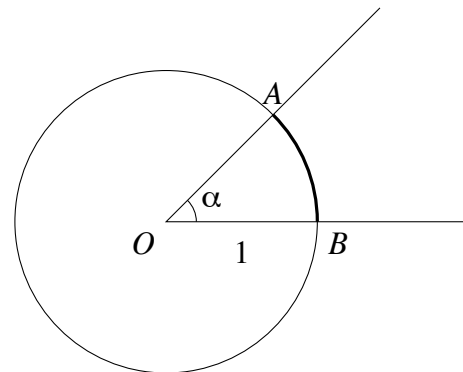
Teiknum hring með geisla 1 með miðju í punktinum O . Armar hornsins skera hringinn í tveimur punktum A og B .

Stærð hornsins α er þá jafnt lengd bogans á milli punktanna A og B . (lengd hans eins og hann væri mældur með málbandi.)

Á myndinni til hliðar sést mynd af horni α . Búið er að teikna inn einingarhring á myndina og merkja inn skurðpunktana A og B . Stærð hornsins α er jafnt lengd bogans milli A og B sem er feitletraður.

Samkvæmt þessari skilgreiningu þá verður heill hringur 2π bogaeiningar því að það er ummál hrings með geisla 1.

Horn beinnar línu er π bogaeiningar og rétt horn er $\frac{\pi}{2}$ bogaeiningar.



Stundum er mælieiningin *Rad* notuð fyrir bogaeiningar. Í hreinni stærðfræði er samt sterkari hefð fyrir því að láta horn vera einingalaus og skrifa einfaldlega $\angle ABC = x$ í staðin fyrir $\angle ABC = x \text{ Rad}$.

Vesnlin milli gráða og bogaeininga er svona:

$$x \text{ Rad} = \left(x \cdot \frac{360}{2\pi} \right)^\circ \quad \text{og} \quad x^\circ = x \cdot \frac{2\pi}{360} \text{ Rad}.$$

Dæmi 19.1.1. (a) Skrifðu $\frac{\pi}{6} \text{ Rad}$ í gráðum.

(b) Skrifðu 70° í bogaeiningum.

Lausn:

(a)

$$\frac{\pi}{6} \text{ Rad} = \left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{360}{2\pi} \right)^\circ = 30^\circ$$

(b)

$$70^\circ = 70 \cdot \frac{2\pi}{360} \text{ Rad} = \frac{7}{18} \pi \text{ Rad}.$$

19.2 Einingarhringurinn og hornaföllin

Munum að hringurinn sem er miðju í punktinum $(0,0)$ í hnitakerfinu og geisla einn er kallaður einingarhringurinn.

Í þessum kafla munum við nota einingarhringinn og bogaeiningar til að skilgreina hornaföllin á nýjan máta.

Nú er markmiðið að skýra stærðirnar $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ og $\cot(\alpha)$:

Eftirfarandi útskýring virkar aðeins ef unnið er í bogaeiningum:

Teiknum einingahring í hnitakerfið.

Setjum blýantinn okkar í punktinn $(1, 0)$ og færum hann rangsælis eftir einingarhringnum þar til blýanturinn er búinn að færist um vegalengdina α . (Ef α er neikvæð tala förum við réttsælis um vegalengdina $-\alpha$).

Hér er í lagi þó að α sé stór tala og við förum marga hringi í kringum einingahringinn.

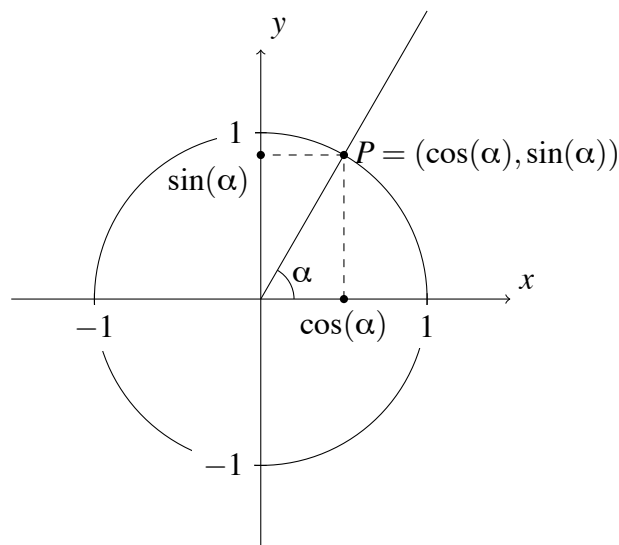
Þegar blýanturinn er búinn að ferðast um vegalengdina α þá stoppum við og mörkum punktinn P inná hnitakerfið þar sem stoppað var.

Kósínus af hornina α er nú skilgreindur sem x -hnit punktsins P , og sínus af horninu α er skilgreindur sem y -hnit punktsins P .

Við skilgreinum svo $\tan(\alpha)$ og $\cot(\alpha)$ með forúlunum

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (\cos(\alpha) \neq 0)$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \quad (\sin(\alpha) \neq 0)$$



Skoðum aðeins hvernig þessi útskýring tengist hornum.

Þegar við færum blýantinn eftir einingarhringnum erum við í rauninni að mæla hornið sem hefur oddpunkt í hnitinu $(0, 0)$, hefur jákvæða hluta x -ássins sem arm og hefur stærðina α ef það er mælt í bogaeiningum. Við höfum teiknað þetta horn inná myndina og þar sést að efri armurinn gengur í gegnum punktinn P sem fékkst í útskýringunni hér að ofan.

Setjum fram formlegri skilgreiningu á hornaföllum:

Skilgreining 19.2.1. Ef $0 \leq \alpha \leq \pi$ þá látum við $E = (1, 0)$ og $O = (0, 0)$.

Veljum nú punktinn P sem er í fjarlægðinni einn frá O , sem hefur y -hnit sem er ekki neikvætt og er þannig að $\angle EOP = \alpha$.

Við skilgreinum $\cos(\alpha)$ sem x -hnit punktsins P .

Við skilgreinum $\sin(\alpha)$ sem y -hnit punktsins P .

$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er 2π -lotubundna jafnstæða fallið sem uppfyllir skilgreininguna að ofan

fyrir $\alpha \in [0, \pi]$

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er 2π -lotubundna oddstæða fallið sem uppfyllir skilgreininguna að ofan fyrir $\alpha \in [0, \pi]$

Taka skal fram að þessi skilgreining er algjörlega í samræmi við skilgreiningu hornafalla sem sett var fram í kaflanum um þríhyrninga.

19.3 Þekkt gildi á hornaföllum

Skoðum nú nokkur gildi á α í samhengi við útskýringuna á hornaföllum hér að ofan.

Munið að við látum blýant byrja í punktinum $(1, 0)$ og færum okkur eftir einingarhringnum eins langt og α segir til um, og endum í punkti P .

1. Ef $\alpha = 0$ þá færum við okkur ekki neitt. Við endum í sama punkti og við byrjum í og þess vegna verður $P = (1, 0)$. Þess vegna er $\cos(0) = 1$ og $\sin(0) = 0$.
2. Ef $\alpha = \pi/2$ þá færum við okkur rangsælis um fjórðung af hringnum (ummál hringsins er 2π). Við endum sem sagt í topppunkti hringsins sem hefur hnit $P = (0, 1)$ svo $\cos(\pi/2) = 0$ og $\sin(\pi/2) = 1$
3. Ef $\alpha = \pi$ þá færum við okkur rangsælis um hálfan hring. Þá erum við stödd í punktinum $P = (-1, 0)$ svo að $\cos(\pi) = -1$ og $\sin(\pi) = 0$

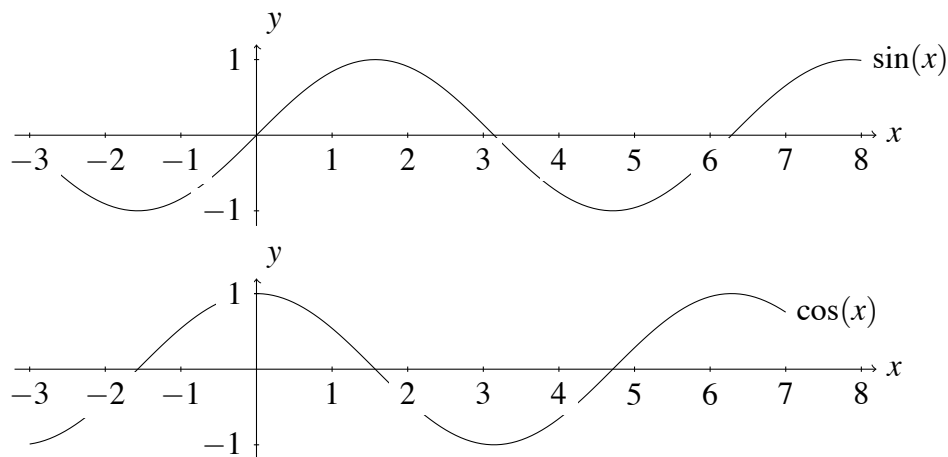
Svona gætum við lengi haldið áfram.

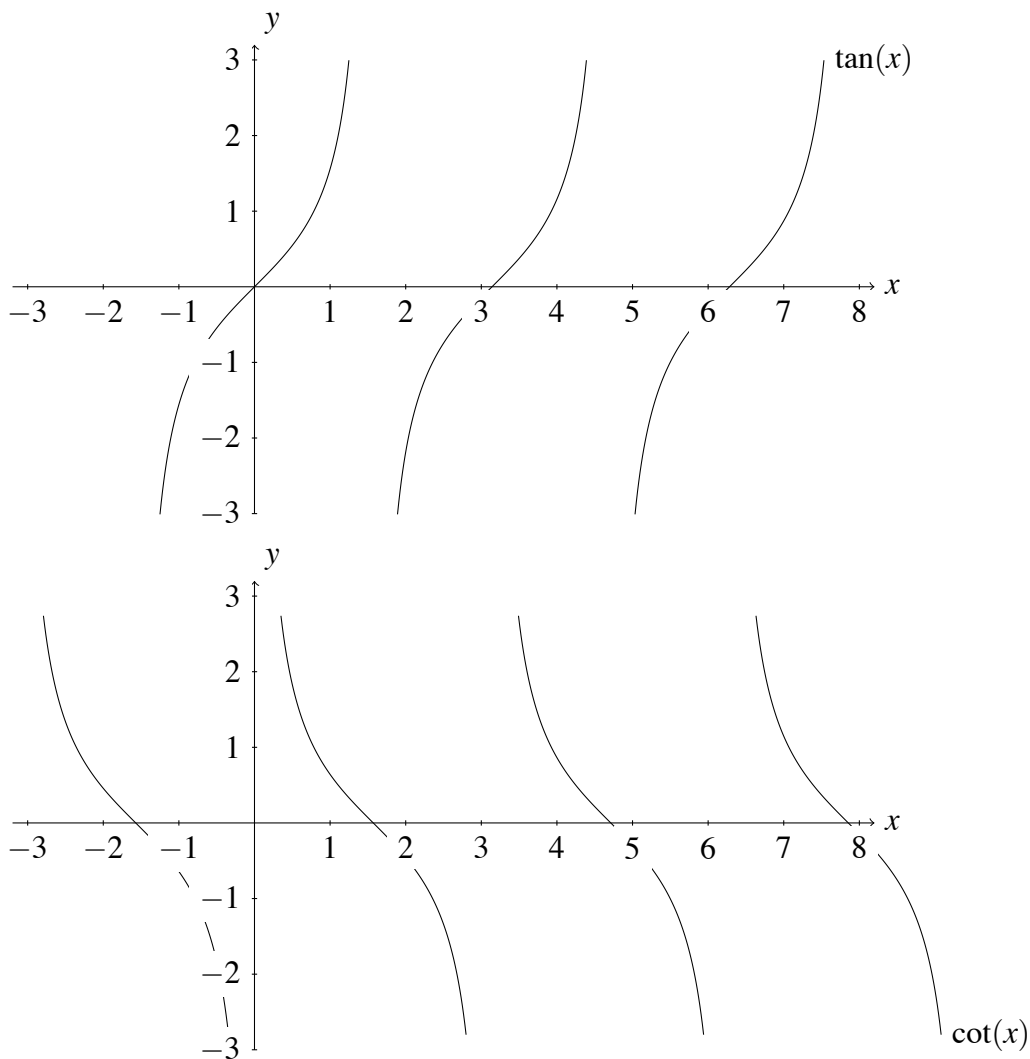
Í kaflanum um þríhyrniga leiddum við út sínus fyrir tvö horn í viðbót, setjum upp töflu

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
0	0	1	0	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0

19.4 Myndir af hornaföllum

Mikilvægt er að nemandi geti séð fyrir sér hornaföllin á marga mismunandi vegu. Ein leiðin er að sjá fyrir sér einingarhringinn, en það er einnig mikilvægt að þekkja myndirnar af grafi þeirra ef litið er á þau sem venjuleg föll. Þau líta svona út:





Takið eftir að öll föllin eru lotubundin með lotu 2π .

Takið líka eftir að kósínusinn lítur næstum alveg eins út og sínusinn, eini munurinn á gröfnum er að búið er að hliðra öðru til hliðar um π miðað við hitt.

Sínusinn og kósínusinn eru takmörkuð föll, takmörkuð af einum að ofan og mínus einum að neðan.

Tangensinn og kótangensinn eru ekki takmörkuð heldur stefna þau á plús eða mínus óend-
anlegt á sumum stöðum. Það eru staðirnir sem kósínusinn eða sínusinn eru núll

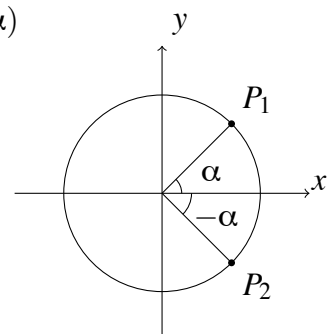
19.5 Hornafallareglur

Um hornaföllin gilda margar reglur sem gagnlegt er að muna, margar þeirra er hægt að sjá fyrir sér myndrænt með einingahringnum. Við skulum taka dæmi um nokkrar slíkar, og rökstyðja þær í samræmi við útskýringuna að ofan

(1) Rökstyðjum að

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) \quad \text{og} \quad \sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$$

Við byrjum í punktinum $(1,0)$. Færum okkur fyrst rangsælis eftir einingahringnum um vegalengdina α og mörkum þar punktinn P_1 , færum okkur svo rangsælis um α og mörkum þar inn P_2 . Auðvelt er að sjá fyrir sér að punktarnir munu hafa sömu x -hnit en y -hnit annars



hefur gagnstætt formerki miðað við y -hnit hins. En það er einmitt það sem að við erum að reyna að rökstyðja.

(2) Rökstyðjum að

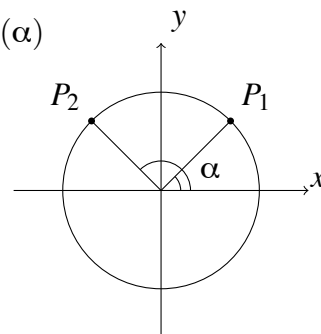
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \text{og} \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

Við mörkum inn tvo punkta inná hnitakerfið.

P_1 mörkum við með því að færa okkur um hornið $\pi - \alpha$, en það er gert með því að færa sig fyrst rangsælis um π en svo aftur til baka réttsælis um hornið α .

P_2 mörkum við inná hnitakerfið með því að færa okkur um hornið α rangsælis.

Þá er auðvelt að sjá að P_1 og P_2 hafa sömu y -hnit en x -hnit þeirra hafa gagnstæð formerki. En það er einmitt það sem við erum að reyna að rökstyðja.



Það er hægt að rökstyðja allskonar fleiri reglur á auðveldan máta.

Hér verða nokkrar slíkar settar fram, höfundur hvetur nemendur til að reyna að sjá þessar reglur fyrir sér myndrænt.

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta, \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta \\ \sin(\pi - \theta) &= \sin \theta, \\ \cos(\theta + \pi) &= -\cos \theta \\ \sin(\theta + \pi) &= -\sin \theta, \\ \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) &= \sin \theta \\ \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) &= \cos \theta, \end{aligned}$$

Athugum að allar reglur sem voru settar fram í kaflanum um þríhyrninga gilda einnig almennt fyrir hornaföll.

19.6 Andhverfur hornafallanna

Skoðum aðeins jöfnuna

$$\sin(x) = 0$$

Segjum að við myndum vilja einangra x útúr þessari jöfnu. Nú gæti einhver stungið upp á að $x = 0$ sé lausnin því að $\sin(0) = 0$.

Það er þó aðeins að hluta til rétt því að þessi jafna hefur í raun óendanlega margar lausnir. $x = \pi$ er líka lausn á þessari jöfnu og einnig $x = 2\pi$.

Raunin er að $n \cdot \pi$ er lausn á þessari jöfnu fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$.

Það sem meira er þá eru þetta allar lausnirnar. Þess vegna skrifum við stundum

$$\sin^{-1}(0) = \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$$

Þetta gildir um fleiri tölur en 0. Jafnan $\sin(x) = a$ hefur nefnilega óendanlega margar lausnir í x fyrir öll $a \in [-1, 1]$.

Hinsvegar er auðvelt að sjá að nákvæmlega ein af þessum lausnum er tekin af bilinu $[-\pi/2, \pi/2]$.

Við skilgreinum þess vegna nýtt fall Arcsin sem að er þannig að

$$\text{Arcsin}(a) = x_0$$

Þá og því aðeins að x_0 sé talan af bilinu $[-\pi/2, \pi/2]$ sem uppfyllir jöfnuna

$$\sin(x_0) = a$$

Arcsin er þessvegna hálfgerð andhverfa sínusfallsins vegna þess að

$$\sin(\text{Arcsin}(x)) = x \quad \text{fyrir öll } x \in [-1, 1]$$

hún nær þó ekki að verða algjör andhverfan því að það öfuga gildir ekki. Þ.e.a.s. ekki er hægt að fullyrða að $\text{Arcsin}(\sin(x))$ sé jafnt og x .

T.d. er $\sin(2\pi) = 0$ og $\text{Arcsin}(0) = 0$ og því fæst

$$\text{Arcsin}(\sin(2\pi)) = \text{Arcsin}(0) = 0$$

Við skulum nú skilgreina andhverfur allra hornafallanna formlega:

Skilgreining 19.6.1. 1. $\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$
er fallið sem uppfyllir

$$\sin(\text{Arcsin}(x)) = x \quad \text{fyrir öll } x \in [-1, 1]$$

2. $\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
er fallið sem uppfyllir

$$\cos(\text{Arccos}(x)) = x \quad \text{fyrir öll } x \in [-1, 1]$$

3. $\text{Arctan} : [-\infty, \infty] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$
er fallið sem uppfyllir

$$\tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \text{fyrir öll } x \in [-\infty, \infty]$$

4. $\text{Arccot} : [-\infty, \infty] \rightarrow [0, \pi]$
er fallið sem uppfyllir

$$\cot(\text{Arccot}(x)) = x \quad \text{fyrir öll } x \in [-\infty, \infty]$$

Tökum sérstaklega eftir bakmengjum fallanna.

Hér er bakmengi Arcsin fallsins bilið $[-\pi/2, \pi/2]$ því að $\text{Arcsin}(a)$ er lausnin á jöfnunni $\sin(x) = a$ sem er tekin af því bili.

Hinsvegar er annað bakmengi fyrir fallið Arccos því að $\text{Arccos}(a)$ er lausnin á jöfnunni $\cos(x) = a$ sem er tekin af bilinu $[0, \pi]$

Bakmengi Arctan og Arccot eru valin af sömu ástæðum.

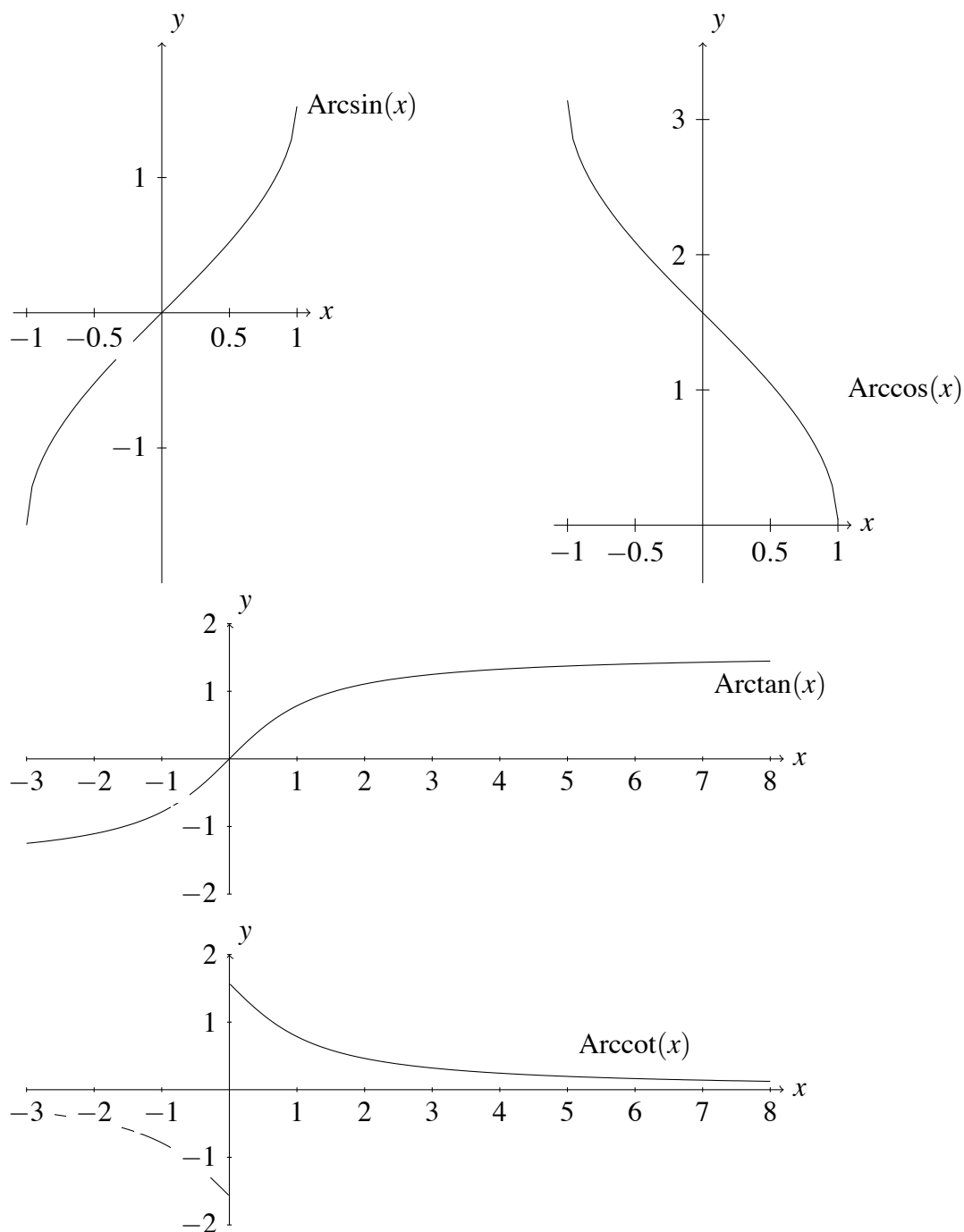
Tökum einnig eftir formengjunum.

Formengið fyrir Arcsin og Arccos er bilið $[-1, 1]$ því að föllin $\cos$ og $\sin$ taka bara gildi á því mengi. Jafnan $\sin(x) = 2$ er til dæmis óleysanleg því að sínusfallið er alltaf minna en einn.

Formengið fyrir Arctan og Arccot er hinsvegar bilið $[-\infty, \infty]$ það er af því að þessi föll eru ótakmörkuð, jafnan $\tan(x) = a$ hefur lausn fyrir öll a . Samanber myndina af grófum fallanna fyrir ofan.

Mikilvægt er að geta séð fyrir sér andhverfur hornafallanna á mynd.

Hér eru myndir af þeim:



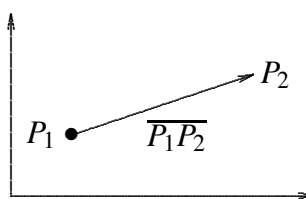
20 Vigrar

20.1 Vigrar

Látum $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$ vera tvo punkta í plani og drögum strik frá P_1 til P_2 og gefum því stefnu frá P_1 til P_2 . Þetta stefnubundna strik nefnist *vigurinn frá P_1 til P_2* og er táknað með $\overrightarrow{P_1P_2}$ og á mynd teiknum við hann sem ör frá P_1 til P_2 . Talan $x_2 - x_1$ nefnist *láhnnit* eða *x-hnit* vigursins og talan $y_2 - y_1$ nefnist *lóðhnnit* eða *y-hnit* hans. Raðtvenndin $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ nefnist hnit vigursins. Í sumum bókum eru hnit vigra aðgreind frá hnitum punkta með því að skrifa þau með annars konar svigum $[a, b]$ eða sem dálka $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Þetta skiptir litlu máli, því á samhenginu á alltaf að vera ljóst hvort raðtvennd er hnit punkts eða hnit vigurs.

Hugsum okkur nú að við tökum einhverja aðra punkta P_3 og P_4 . Ef stefnubundna strikið frá P_3 til P_4 er þannig, að þegar P_3 er hliðrað yfir P_1 , þá hliðrast P_4 í P_2 , þá segjum við að $\overrightarrow{P_1P_2}$ og $\overrightarrow{P_3P_4}$ skilgreini sama *vigur*. Ef þetta gerist þá eru hnit $\overrightarrow{P_1P_2}$ þau sömu og hnit $\overrightarrow{P_3P_4}$. Vigur er því stefnubundið strik sem hefur engan fastan upphafs- eða lokapunkt. Ef hann er ritaður í planið sem vigur frá einum punkti til annars, þá eru hnit hans þau sömu hvar sem hann er teiknaður. Venja er að tákna vigra með feitu letri **a**, **b**, **c**, ... Núllvigurinn **0** er vigurinn sem hefur hnitin $(0, 0)$.

Sérhver punktur P í planinu skilgreinir vigurinn $\overrightarrow{OP}$ frá upphafspunkti O til P . Hann nefnist *staðarvigur* punktsins P . Hnit hans eru þau sömu og hnit punktsins P .



20.2 Pólhnnit vigra

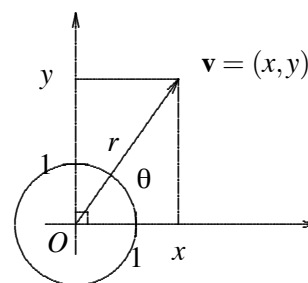
Algengast er að tákna vigur með rétthyrndum hnitum (x, y) þar sem x táknar lárétta færslu og y táknar lóðrétta færslu sem vigurinn stendur fyrir eins og lýst er að ofan.

Stundum er þó hentugra að tákna vigurinn með svokölluðum *pólhnnitum* af gerðinni $(r, \theta)_{\text{pól}}$.

Í pólhnnitaframsetningu er fyrra hnnitið, r , látið standa fyrir *lengd* vigursins.

Seinna hnnitið, θ , er látið standa fyrir *stefnuhorn* vigursins, en stefnuhorn vigurs er skilgreint sem hornið sem vigurinn myndar miðað við jákvæða hluta x -ássins ef upphafspunktur hans er settur í upphafspunkt hnitakerfisins O .

Með auðveldri þríhyrningafræði sést að vensl milli rétthyrndu hnitakerfis og pólhnnita gefins vigurs eru gefin með



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

Dæmi 20.2.1. (a) Finnið pólhnnit vigursins $(4, 3)$.

(b) Finnið pólhnnit vigursins $(-4, 3)$.

(c) Finnið rétthyrnd hnit fyrir vigur með pólhnnit $(5, \pi/3)_{\text{pól}}$

Lausn:**(a)**

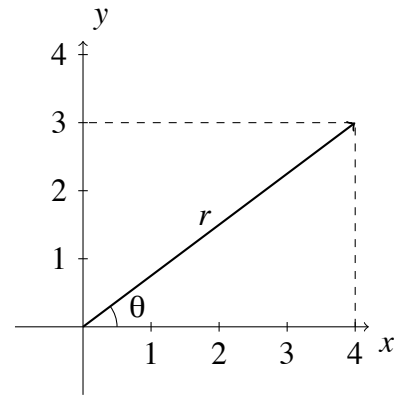
Ef vigurinn er teiknaður upp sést að stefnuhorn hans, θ er á bilinu $[0, \pi/2]$ ef mælt er í bogaeiningum.

Með einfaldri þríhyrningafræði sést að $\tan(\theta) = \frac{3}{4}$ svo að $\theta = \text{Arctan}(\frac{3}{4}) \approx 0.643501108$.

Lengd vigursins er $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Hnit vigursins í pólhnitum eru þess vegna

$$(5, 0.643501108)_{\text{pól}}.$$

**Lausn:****(b)**

Hér sést á mynd að stefnuhornið (sem er merkt á mynd með θ) er á bilinu $[\pi/2, \pi]$.

Hornið sem er merkt með α inn á myndina er auðvelt að finna með þríhyrningafræði. Við höfum $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ svo að

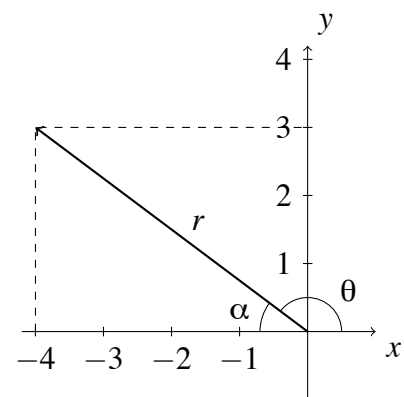
$$\alpha = \text{Arctan}(\frac{3}{4}) = 0.643501108$$

$$\text{En þá er } \theta = \pi - \alpha = 2.498091545$$

Lengd vigursins fæst síðan með jöfnunni

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ Pólhnit hans eru þess vegna}$$

$$(5, 2.498091545)_{\text{pól}}.$$

**Lausn:****(c)**

Mun einfaldara að skipta úr pólhnitum í rétthyrnd hnit en öfugt.

Hér setjum við einfaldlega inn í jöfnurnar

$$x = r \cos(\theta) = 5 \cos(\frac{\pi}{3}) = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y = r \sin(\theta) = 5 \sin(\frac{\pi}{3}) = 5 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Svo rétthyrndu hnitin eru

$$(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}).$$

20.3 Vigrareikningur

Á mengi vigra í plani getum við skilgreinum við aðgerðirnar samlagningu og frádrátt. Við skilgreinum einnig margföldun vigurs við tölu.

Skilgreining 20.3.1. Látum $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ vera vigra. Látum $t \in \mathbb{R}$ vera rauntölu. Summa og frádráttur vigranna eru skilgreind með

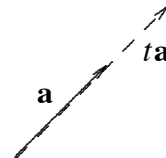
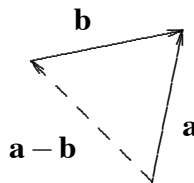
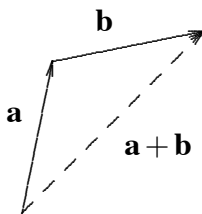
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

Margföldun við tölu er síðan skilgreind með

$$t \cdot \mathbf{a} = (ta_1, ta_2)$$

Þessar stærðir eiga sér rúmfræðilegar túlkanir.



Summu tveggja vigranna $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ má túlka rúmfræðilega sem vigurinn sem nær frá upphafspunkti vigursins $\mathbf{a}$ til endapunkts vigursins $\mathbf{b}$ eftir að upphafspunktur $\mathbf{b}$ hefur verið staðsettur í endapunkti $\mathbf{a}$.

Vigurinn $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ má túlka rúmfræðilega sem vigurinn sem nær frá upphafspunkti $\mathbf{a}$ til upphafspunkts $\mathbf{b}$ ef þeir eru staðsettir þannig að þeir hafi sama lokapunkt.

Vigurinn $t\mathbf{a}$ má túlka rúmfræðilega sem vigurinn sem hefur sömu stefnu og vigurinn $\mathbf{a}$ en er t -sinnum lengri.

Nokkrar reiknireglur gilda um vigra sem eru sannaðar með því að beita tilsvareandi reiknireglur fyrir rauntölur:

Setning 20.3.1 Látum $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ vera vigra og $t, s \in \mathbb{R}$ vera rauntölur. Þá gildir:

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	(tengiregla samlagningar),
$(st)\mathbf{a} = s(t\mathbf{a})$	(tengiregla margföldunar),
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	(víxlregla samlagningar),
$t(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t\mathbf{a} + t\mathbf{b}$	(dreifiregla),
$(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$	(dreifiregla),
$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	(0 er samlagningarhlutleysa),
$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$	(1 er margföldunarhlutleysa).

Dæmi 20.3.1. Reiknið $(1, 2) + 5(-2, 5)$.

Lausn:

Við byrjum á að margfalda og leggjum síðan saman hnit fyrir hnit:

$$(1, 2) + 5(-2, 5) = (1, 2) + (-10, 25) = (-9, 27).$$

20.4 Innfeldi vigra og horn

Innfeldi vigra er aðgerð á vigrum sem úthlutar tveimur vigrum $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ rauntölunni sem er gefin með formúlunni

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Horn milli vigra $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er skilgreint þannig að þeim er hliðrað í sameiginlegan upphafspunkt og út frá hvorum fyrir sig er óendanleg hálf lína dregin. Hornið milli hálf línanna er skilgreint sem hornið milli $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.

Lengd vigursins $\mathbf{a}$ er svo eins og fyrr var sagt gefin með formúlunni

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Við fyrstu sýn er ekki augljóst að innfeldi vigra hafi einhverja rúmfræðilega túlkun. Í ljós kemur þó að innfeldið er mjög nátengt lengd vigra og horninu á milli þeirra. Í þessum kafla verður fjallað um þessi tengsl.

Byrjum á því að setja fram þrjár einfaldar reglur:

1. $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$
2. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
3. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

Sönnum þær:

1. $|\mathbf{a}|^2 = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 = a_1^2 + a_2^2 = a_1 a_1 + a_2 a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$
2. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |(a_1 + b_1, a_2 + b_2)|^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2$
 $= a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_2 b_2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)$
 $= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
3. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |(a_1 - b_1, a_2 - b_2)|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$
 $= a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_2 b_2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)$
 $= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

Skoðum nú aðeins betur jöfnuna í reglu þrjú hér að ofan. Ef innfeldið $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ er einangrað útúr þessari jöfnu fæst jafnan

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2)$$

Hægra megininn jafnaðarmerkis í þessari jöfnu koma einungis fram lengdir á vigrum og ljóst er að þær breytast ekki þó svo að við snúum eða hliðrum hnitakerfinu. Því sjáum við að eftirfarandi regla gildir:

Setning 20.4.1 Innfeldi tveggja vigra er óbreytt þó svo að hnitakerfinu sé snúið í kringum þá.

Með þessa reglu sér til hjálpar er auðvelt að sanna aðalreglu þessa kafla. En hún segir einfaldlega

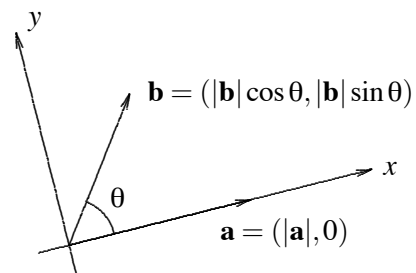
Setning 20.4.2 Látum θ vera hornið á milli vigranna $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Þá gildir:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta)$$

Sönnum þetta:

Látum $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ vera vigra og θ vera hornið á milli þeirra. Eftir að hnitakerfinu hefur verið hliðrað og snúið í kringum þá má gera ráð fyrir að vigurinn $\mathbf{a}$ sé samstefna x -ásnum. Þá verður θ stefnuhorn vigrans $\mathbf{b}$ og hnit þeirra verða þá gefin með

$$\mathbf{a} = (|\mathbf{a}|, 0) \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = (|\mathbf{b}|\cos(\theta), |\mathbf{b}|\sin(\theta))$$



En þá er innfeldi vigranna

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta)$$

Sértilvik af þessari reglu er oft notað í stærðfræði, það er sértilvikið þegar vigrarnir $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ eru hornréttir hvor á annan. Þekkt er að kósínus af réttu horni er núll og þess vegna getum við sett fram eftirfarandi aukasetningu:

Setning 20.4.3 Vigrar eru hornréttir þá og því aðeins að innfeldi þeirra sé núll.

Dæmi 20.4.1. a) Reiknið innfeldi vigranna $(1, 1)$ og $(2, 1)$?

b) Reiknið $(1, 2) \cdot ((-2, 1) - (12, 0))$.

Lausn:

(a)

Við reiknum $(1, 1) \cdot (2, 1) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 + 1 = 3$.

(b)

Reiknum:

$$(1, 2) \cdot ((-2, 1) - (12, 0)) = (1, 2) \cdot (-14, 1) = 1 \cdot (-14) + 2 \cdot 1 = -12$$

Dæmi 20.4.2. Finnið kósínusinn af horninu θ milli $(1, 2)$ og $(2, 1)$.

Lausn:

Við notum jöfnuna $(1, 2) \cdot (2, 1) = |(1, 2)|| (2, 1)| \cos(\theta)$ og með því að einangra fáum við

$$\cos(\theta) = \frac{(1, 2) \cdot (2, 1)}{|(1, 2)|| (2, 1)|} = \frac{2 + 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

20.5 Þríhyrningsójafnan

Auðséð er að í þríhyrningi er sérhver hliðarlengd minni en eða jöfn summu hinna tveggja. Ein þekktasta ójafna stærðfræðinnar er þríhyrningsójafnan, en hún lýsir þessari staðreynd í búningi vigra:

Setning 20.5.1 Látum $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ vera vigra.

Þá gildir:

1. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ (þríhyrningsójafnan)
2. $||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$

Sönnum þetta.

1. Það er þekkt staðreynd að $|\cos(\theta)| \leq 1$.

Með aðstoð reglunnar að ofan fáum við þess vegna:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\theta) \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

Af þessu fæst svo:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$$

Nú eru báðar stærðirnar $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ og $(|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)$ jákvæðar svo að

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

2. Með því að nota liðinn á undan fæst

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{b}| = |(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}| + |\mathbf{b}|$$

færum yfir jafnaðarmerkið og fáum

$$|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \quad (*)$$

Á sama hátt fæst

$$|\mathbf{b}| - |\mathbf{a}| \leq |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

En sú jafna jafngildir

$$-(|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|) \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \quad (**)$$

Nú fæst af $(*)$ og $(**)$ að

$$||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

20.6 Vigrar og hornaföll

Látum θ vera eitthvað horn og skoðum vigurinn

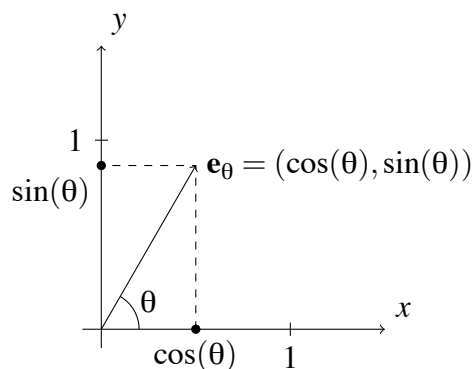
$$\mathbf{e}_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

Þekkt hornafallaregla segir að $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ fyrir öll θ og þess vegna er auðvelt að finna lengd $\mathbf{e}_\theta$

$$|\mathbf{e}_\theta| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

Skv. skilgreiningu á hornaföllum sést líka að stefnuhorn vigursins $\mathbf{e}_\theta$ er θ (sjá mynd.)

Þessar upplýsingar munum við notfæra okkur til að sanna summureglur fyrir hornaföllin:



Setning 20.6.1 Fyrir öll $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gildir:

1. $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
3. $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
4. $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

Sönnunum þetta:

1. *Skoðum vigranna*

$$\mathbf{e}_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_\beta = (\cos(\beta), \sin(\beta))$$

Annar hefur stefnuhorn α en hinn β svo hornið á milli þeirra er $|\alpha - \beta|$.
Samkvæmt reglu að ofan fæst þess vegna

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = |\mathbf{e}_\alpha| |\mathbf{e}_\beta| \cos(|\alpha - \beta|)$$

Nú vitum við að lengdir þeirra er einn og innfeldið reiknum við út frá hnitunum.
Við fáum:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(|\alpha - \beta|)$$

Nú er kósínus jafnstætt fall svo að af þessu fæst

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

2. *Stingum $-\beta$ inn fyrir β í regluna í liðnum á undan til þess að fá*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) + \sin(\alpha)\sin(-\beta)$$

Nú er kósínus jafnstætt fall og sínus er oddstætt fall svo að

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

3. Í kaflanum um hornaföll voru settar fram reglurnar

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{og} \quad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Við munum nota þessa reglu í tvígang og við munum einnig nota liðinn á undan:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

4. Stingum inn $-\beta$ í staðin fyrir β í regluna á undan

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(-\beta) - \cos(\alpha)\sin(-\beta)$$

Nú er kósínus jafnstætt fall og sínus oddstætt fall svo að

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Nú er mjög auðvelt að sanna reglurnar um tvöföld og hálf horn:

Setning 20.6.2 Fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ gildir

1. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - \sin^2(x)$
2. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
3. $\cos(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$
4. $\sin(x/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$

Sönnum þetta:

1. Stingum inn $\alpha = x$ og $\beta = x$ í lið tvö í reglunni á undan og fáum

$$\cos(2x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Nú notum við þekkту regluna $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Af henni fæst annarsvegar:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = (1 - \sin^2(x)) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

og hinsvegar:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$$

2. Stingum inn $\alpha = x$ og $\beta = x$ í lið fjögur í reglunni á undan og fáum

$$\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$