

3. Skiptum út x fyrir $x/2$ í reglunni

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

og fáum

$$\cos(x) = 2\cos^2(x/2) - 1$$

einangrum $\cos(x/2)$ og fáum

$$\cos(x/2) = \pm \sqrt{\frac{\cos(x) + 1}{2}}$$

4. Skiptum út x fyrir $x/2$ í reglunni

$$\sin(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

og fáum

$$\sin(x) = 1 - 2\sin^2(x/2)$$

einangrum $\sin(x/2)$ og fáum

$$\sin(x/2) = \pm \sqrt{\frac{\sin(x) - 1}{2}}.$$

21 Formengi og varpmengi, eintækni og átækni

21.1 Myndir og bakmyndir

Látum $f : X \rightarrow Y$ vera einhverja vörpun.

Rifjum upp að mengið X kallast formengi vörpunarinnar og að mengið Y kallast bakmengi hennar.

Látum nú A vera eitthvað hlutmengi í X , og B vera eitthvað hlutmengi í Y .

Þá getum við skilgreint mengin:

$$f(A) := \bigcup_{a \in A} \{f(a)\} = \{f(a); a \in A\}$$

og

$$f^{-1}(B) := \{x \in X; f(x) \in B\}.$$

Mengið $f^{-1}(B)$ er í raun mengi allra þeirra staka sem vapast í mengið B .

Athugum að fyrir öll hlutmengi A og B mun gilda:

$$f(A) \subset Y \quad \text{og} \quad f^{-1}(B) \subset X.$$

21.2 Eintækar og átækar varpanir

Látum $f : X \rightarrow Y$ áfram vera einhverja vörpun.

Látum nú $y_0 \in Y$ vera eitthvað stak í bakmenginu. Oft er getur verið gagnlegt að vita hvort hægt sé að finna einhverja lausn á jöfnunni

$$f(x) = y_0$$

þ.e.a.s. hvort hægt sé að finna eitthvað $x_0 \in X$ þ.a. $f(x_0) = y_0$.

Ef að þessi jafna hefur lausn fyrir sérhvert $y_0 \in Y$ þá segjum við að vörpunin sé *átæk*.

Formlega:

Skilgreining 21.2.1. Vörpun $f : X \rightarrow Y$ er sögð vera átæk ef fyrir sérhvert $y \in Y$ er til $x \in X$ þannig að $f(x) = y$.

Skoðum nú aftur jöfnuna

$$f(x) = y_0$$

Oft getur verið gagnlegt að vita hvort þessi jafna hafi margar lausnir. Stundum getur það nefnilega verið til vandræða ef til eru tvö ólík stök x_1 og x_2 í X þ.a. $f(x_1) = f(x_2) = y_0$.

Við segjum að vörpunin sé *eintæk* ef að þessi jafna hefur í mesta lagi eina lausn fyrir sérhvert $y_0 \in Y$.

Formlega:

Skilgreining 21.2.2. Vörpun $f : X \rightarrow Y$ er sögð vera eintæk ef fyrir sérhvert $y \in Y$ er til í mesta lagi eitt $x \in X$ þannig að $f(x) = y$.

Skoðum nú jöfnuna einu sinni enn

$$f(x) = y_0$$

Ef að þessi jafna hefur nákvæmlega eina lausn fyrir sérhvert $y_0 \in Y$ þá segjum við að vörpunin sé gagntæk. Tökum eftir að það gerist bara ef vörpunin er bæði eintækt og átækt:

Skilgreining 21.2.3. Vörpun $f : X \rightarrow Y$ er sögð vera gagntæk ef hún er bæði eintæk og átæk.

Skoðum þessi hugtök aðeins betur í mengjafræðilegum skilningi.

Skilgreining 21.2.4. Látum $f : X \rightarrow Y$ vera vörpun.

Skilgreinum mengið $f^{-1}(\{y\})$ með:

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X; f(x) = y\}$$

Vörpunin f er sögð vera átæk ef að mengið $f^{-1}(\{y\})$ inniheldur a.m.k. eitt stak fyrir öll $y \in Y$.

Vörpunin f er sögð vera eintæk ef að mengið $f^{-1}(\{y\})$ inniheldur í mesta lagi eitt stak fyrir öll $y \in Y$.

Vörpunin f er sögð vera gagntæk ef að mengið $f^{-1}(\{y\})$ inniheldur nákvæmlega eitt stak fyrir öll $y \in Y$.

Nú er mælt með því að nemendur rifji upp skilgreininguna á andhverfu vörpunnar.

Andhverfa vörpunnar f var í vissum skilningi „fallið sem gerir akkúrat öfugt við það sem f gerir”.

Með mengjafræðilegu skilgreininguna á gagntæku falli er hægt að setja fram nýja skilgreiningu á andhverfu vörpunnar

Ef vörpun $f : X \rightarrow Y$ er gagntæk þá skilgreinum við andhverfu hennar $f^{-1} : Y \rightarrow X$ á eftirfarandi hátt:

Fyrir sérhvert $y \in Y$ látum við $f^{-1}(y)$ vera ótvírætt ákvarðaða stakið í menginu $f^{-1}(\{y\})$.

Dæmi 21.2.1. Skerið úr um hvort eftirfarandi föll séu eintæk átæk eða gagntæk.

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

(b) $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad f(x) = x^2$

(d) $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad f(x) = x^2$

Lausn:

(a)

Jafnan $x^2 = -1$ hefur enga lausn í rauntölunum. Þess vegna er f ekki átækt.

Jafnan $x^2 = 1$ hefur tvær lausnir $x = 1$ og $x = -1$ þess vegna er f ekki eintækt.

Sér í lagi er f ekki gagntækt.

(b)

Jafnan $x^2 = -1$ hefur enga lausn í rauntölunum. Þess vegna er g ekki átækt.

Jafnan $x^2 = a$ hefur enga lausn ef a er ekki jákvætt en í mesta lagi eina jákvæða lausn ef a er jákvætt. Fallið g er þess vegna eintækt.

Fallið g er ekki gagntækt.

(c)

Fyrir sérhvert jákvætt $a \in \mathbb{R}$ þá hefur jafnan $x^2 = a$ lausn, fallið h er þess vegna átækt.

Jafnan $x^2 = 1$ hefur tvær lausnir, nefnilega $x = 1$ og $x = -1$. Þess vegna er fallið h ekki eintækt.

Fallið h er ekki gagntækt.

(d)

Fyrir sérhvert jákvætt $a \in \mathbb{R}$ þá hefur jafnan $x^2 = a$ nákvæmlega eina jákvæða lausn.

Fallið k er þess vegna gagntækt.

Sér í lagi er það átækt og eintækt.

22 Samskeyting falla

22.1 Samskeyting falla

Í þessum kafla kynnum við til sögunnar nýja aðgerð á mengi varpanna. Nefnilega samskeytingu þeirra.

Skilgreiningin telst frekar auðveld

Skilgreining 22.1.1. Látum $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow Z$ vera varpanir.

Við skilgreinum þá vörpun $g \circ f : X \rightarrow Z$ með:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \text{fyrir öll } x \in X.$$

Tökum eftir að bakmengi f og formengi g þarf að vera það sama. Annars myndi þessi skilgreining ekki virka.

Skoðum til dæmis vörpunina k sem varpar íslenskum orðum í fyrsta bókstaf sinn og fallið

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gefið með $f(x) = x^2$.

Hér myndi hvorki $f \circ g$ né $g \circ f$ vera skilgreint af augljósum ástæðum.

Við getum nú sett fram skilgreininguna á andhverfu falls enn einu sinni með aðstoð sam-
skeytingu varpanna.

Skilgreining 22.1.2. Látum $f : X \rightarrow Y$ vera vörpun. Vörpun $g : Y \rightarrow X$ kallast andhverfa vörpunarinnar f ef að:

$$g \circ f(x) = x \quad \text{fyrir öll } x \in X$$

og

$$f \circ g(y) = y \quad \text{fyrir öll } y \in Y$$

Andhverfa f er táknuð með f^{-1} ef hún er til.

Dæmi 22.1.1. Látum $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vera gefið með $f(x) = x^2 + x$

og $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vera gefið með $g(x) = x + 3$

Finnið $f \circ g$ og $g \circ f$

Lausn:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2 + (x + 3) = x^2 + 6x + 9 + x + 3 = x^2 + 7x + 12$$

og

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = (x^2 + x) + 3 = x^2 + x + 3.$$

23 Markgildi falls

23.1 Markgildi falls

Áður en að við skilgreinum markgildi falls formlega skulum við taka dæmi til að útskýra hver hugmyndin er.

Skilgreinum fall:

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Tökum eftir að við látum fallið g ekki vera skilgreint í punktinum $x = 0$ því að annars væri deilt með núlli.

Það getur hinsvegar verið áhugavert að skoða hvernig fallið hagar sér nálægt punktinum $x = 0$.

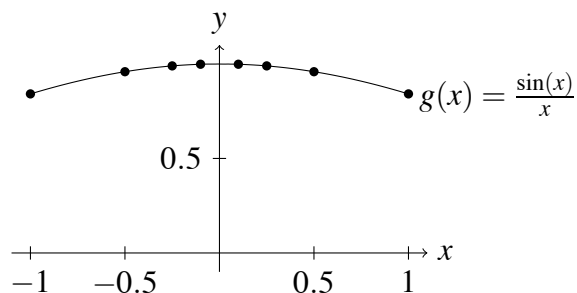
Teiknum mynd af fallinu g :

Við notum vasareikninn okkar til að reikna nokkur gildi á g og merkjum inná hnitakerfið punktana $(x, g(x))$.

Athugum að fallið er jafnstætt svo að $g(-x) = g(x)$ fyrir öll x .

$$g(-1) = g(1) \approx 0,841470984$$

$$g(-0,5) = g(0,5) \approx 0,958851077$$



$$g(-0, 25) = g(0, 25) \approx 0,989615837$$

$$g(-0, 1) = g(0, 1) \approx 0,998334166.$$

Takið sérstaklega eftir því að fallið virðist ekki fara upp eða niður í óendanleikann þegar við nálgumst gildið $x = 0$.

Öllu heldur þá virðist fallið stefna á gildið 1!

Til staðfestingar skulum við reikna út eitt gildi á g í viðbót sem er mjög nálægt núlli:

$$g(0,001) \approx 0,9999833.$$

Við höfum séð að ef x_0 er tala sem er mjög nálægt núlli þá verður fallgildið $g(x_0)$ mjög nálægt því að verða 1.

Munum að fallið g er ekki skilgreint í núlli, hins vegar höfum við sér orðalag fyrir svona tilvik.

Við segjum að *markgildi* fallsins g í núlli sé einn.

Einnig má segja að $g(x)$ stefni á einn þegar x stefnir á núll.

Á táknmáli er skrifað

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1.$$

Þetta er hægt að gera almennt.

Látum nú $I \subset \mathbb{R}$ vera eitthvað bil í $\mathbb{R}$ og $a \in I$.

Látum $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ vera eitthvað fall og $b \in \mathbb{R}$ vera tölu.

Við segjum að markgildi fallsins f í punktinum $x = a$ sé b ef að fyrir allar tölur x_0 sem eru nálægt tölunni a þá er talan $f(x_0)$ nálægt tölunni b .

Þá skrifum við

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Sumum þykir formlega skilgreiningin á markgildi heldur þung. Nemendur eru hvattir til að hugsa um hana í dálitla stund og reyna að átta sig á því hvað hún þýðir, meðal annars með því að bera hana saman við útskýringuna hér að framan:

Skilgreining 23.1.1. G.r.f. að $I \subset \mathbb{R}$ sé bil í $\mathbb{R}$ og að $a \in I$ sé punktur á bilinu sem er hvorugur endapunktur þess.

G.r.f. að $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ sé fall og að $b \in \mathbb{R}$ sé tala.

Við segjum að markgildi fallsins f í punktinum a sé b og ritum

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

ef að eftirfarandi gildir:

Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $\delta > 0$ þannig að ef

$$|x - a| < \delta$$

þá er

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Í þessari skilgreiningu má ímynda sér að ε og δ séu rosalega litlar tölur.

Ójafnan $|x - a| < \delta$ þýðir þá að x sé rosalega nálægt því að vera a og ójafnan $|f(x) - b| < \varepsilon$

þýðir að $f(x)$ er rosalega nálægt því að vera b .
Til að reyna skýra hugtakið betur munum við taka dæmi.

Dæmi 23.1.1. (a)

Látum $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vera gefið með $f(x) = x$ og látum $\varepsilon = 0,01$.

Finnið δ þ.a. ef $|x - 1| < \delta$ þá er $|f(x) - 1| < 0,01$.

(b)

Látum $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vera gefið með $g(x) = x^2$ og látum $\varepsilon = 0,01$.

Finnið δ þ.a. ef $|x - 2| < \delta$ þá er $|g(x) - 4| < 0,01$.

(c)

Látum $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vera gefið með $h(x) = \sqrt{x}$ og látum $\varepsilon = 0,01$.

Finnið δ þ.a. ef $|x - 2| < \delta$ þá er $|h(x) - 4| < 0,01$.

Lausn:

(a)

Við veljum $\delta = 0,01$.

Látum nú x vera einhverja tölu þ.a. $|x - 1| < 0,01$.

Þá fæst

$$|f(x) - 1| = |x - 1| < 0,01$$

svo slíkt δ dugar.

(b)

Látum $\delta = 0,001$.

Látum x vera einhverja tölu þ.a. $|x - 2| < 0,001$.

Athugum að þá fæst með þríhyrningsójöfnu að

$$|x + 2| = |(x - 2) + 4| \leq |x - 2| + |4| < 0,001 + 4 = 4,001$$

Þess vegna fæst:

$$|g(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x + 2)(x - 2)| = |x + 2| \cdot |x - 2|$$

$$< 4,001 \cdot 0,001 = 0,004001 < 0,01.$$

(c)

Látum $\delta = 0,01$

Látum x vera einhverja tölu þ.a. $|x - 4| < 0,01$.

Þá fæst:

$$|h(x) - 2| = |\sqrt{x} - 2| = \frac{|\sqrt{x} - 2||\sqrt{x} + 2|}{|\sqrt{x} + 2|} = \frac{|x - 4|}{|\sqrt{x} + 2|} \leq \frac{|x - 4|}{2} \leq \frac{0,01}{2} \leq 0,01.$$

Athugasemd:

Hér notaði höfundur enga sérstaka aðferð til að velja δ . Í raun dugar að velja það bara nógu andskoti lítið og sýna svo að það dugi.

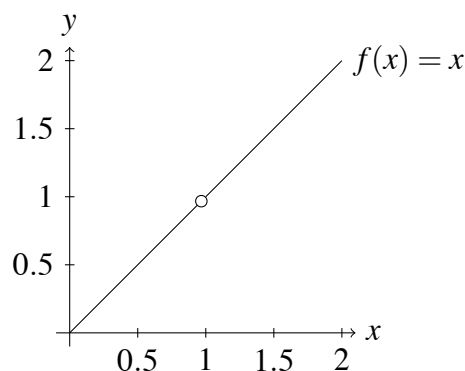
Dæmi 23.1.2. Látum $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x$.

Sýnið að

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

Lausn:

Þetta verður nánast augljóst ef fallið er teiknað upp eins og á mynd til hliðar. Hér setjum við lítinn hring í punktin $(1, 1)$ því að við létum fallið ekki vera skilgreint þar. En ljóst er að ferillinn stefnir á punktin $(1, 1)$ frá báðum áttum.



Þó svo að það virðist augljóst að markgildið sé einn þá er mikilvægt að geta sýnt fram á það útfrá formlegri skilgreiningu.

Mikilvægt er að geta skilið einföldu dæmin áður en kafað er dýpra í fræðina og reynt er að gera eitthvað flóknara.

Látum $\varepsilon > 0$ vera einhverja gefna tölu.

Til þess að sýna að markgildið sé einn þurfum við að sýna að til sé $\delta > 0$ sem við getum fundið út frá tölunni ε þ.a. ef $|x - 1| < \delta$ þá er $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

Í þetta skipti er það auðvelt. Við einfaldlega veljum $\delta = \varepsilon$.

Því þá fæst fyrir öll x þ.a. $|x - 1| \leq \delta = \varepsilon$ að

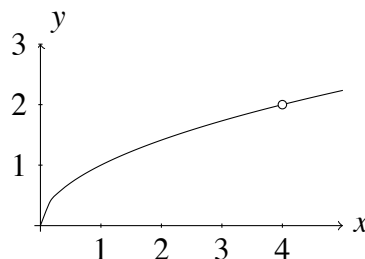
$$|f(x) - 1| = |x - 1| \leq \delta = \varepsilon$$

sem er það sem sýna átti.

Dæmi 23.1.3. Látum $f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Sýnið að

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2.$$



Lausn:

Aftur er nánast augljóst hvert markgildið er. Ef ferill fallsins f er teiknaður upp sést greinilega að hann stefnit á punktin $(4, 2)$. Þ.e.a.s. það sést að markgildi fallsins er tveir.

Við skulum sýna þetta formlega.

Látum $\varepsilon > 0$ vera einhverja gefna tölu.

Sýna þarf að til sé $\delta > 0$ þannig að $|x - 4| < \delta$ hafi í för með sér að $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$.

Látum $\delta = 2 \cdot \varepsilon$.

Þá fæst ef að $|x - 4| < \delta$ að

$$|f(x) - 2| = |\sqrt{x} - 2| = \frac{|\sqrt{x} - 2||\sqrt{x} + 2|}{|\sqrt{x} + 2|} = \frac{|x - 4|}{|\sqrt{x} + 2|} \leq \frac{|x - 4|}{|2|} \leq \frac{\delta}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sem er það sem sýna átti.

23.2 Fleiri gerðir af markgildum

Skoðum nú nýtt fall

$$r: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad r(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Teiknum mynd af fallinu til að sjá hvernig það hagar sér í grennd við punktinn $x = 1$.

$$f(0,5) = f(1,25) = 4$$

$$f(0,75) = f(1,25) = 16$$

$$f(0,9) = f(1,1) = 100$$

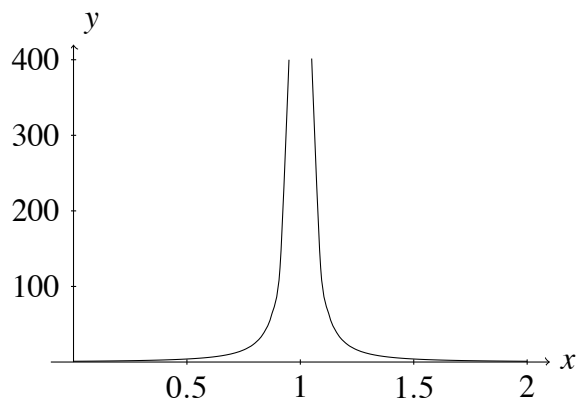
$$f(0,95) = f(1,05) = 400$$

Við sjáum að fallið $r(x)$ stefnir hratt upp í óendanleikann þegar x stefnir á einn.

Þess vegna segjum við að markgildi fallsins r í einum sé óendanlegt og skrifum

$$\lim_{x \rightarrow 1} r(x) = \infty.$$

Formlega skilgreiningin er:



Skilgreining 23.2.1. G.r.f. að $I \subset \mathbb{R}$ sé bil í $\mathbb{R}$ og að $a \in I$ sé punktur á bilinu sem er hvorugur endapunktur þess.

G.r.f. að $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ sé fall.

Við segjum að markgildi fallsins f í punktinum a sé óendanlegt og ritum

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

ef að eftirfarandi gildir:

Fyrir sérhvert $N > 0$ er til $\delta > 0$ þannig að ef

$$|x - a| < \delta$$

þá er

$$f(x) > N.$$

Nú getum við líka hugsað okkur fall sem hefur markgildið mínus óendanlegt. Skilgreiningin er mjög svipuð og sú sem er hér á undan. Nemendur eru hvattir til að reyna láta sér detta í hug hvernig hún lítur út.

Skoðum nýtt fall

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad p(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Þetta fall er skilgreint á öllu $\mathbb{R}$.

Stundum getur verið gagnlegt að skoða hvað gerist þegar við fallið í óendanleikanum.

Við skulum skoða $p(x)$ fyrir stór gildi á x :

$$p(5) \approx 0,038461538$$

$$p(10) \approx 0,009900990099$$

$$p(50) \approx 0,000399840064$$

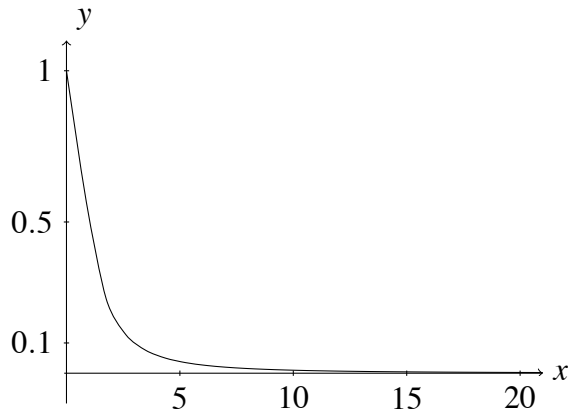
$$p(100) \approx 0,000099990001$$

Við sjáum að fallið p stefnir á núll þegar x stefnir á óendanleikann.

Þess vegna skrifum við

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0$$

Formlega er þetta skilgreint:



Skilgreining 23.2.2. G.r.f. að $I \subset \mathbb{R}$ sé bil í $\mathbb{R}$ sem er ótakmarkað að ofan.

G.r.f. að $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sé fall og að $b \in \mathbb{R}$ sé tala.

Við segjum að markgildi fallsins f í óendanleikanum sé b og ritum

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

ef að eftirfarandi gildir:

Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $N > 0$ þannig að ef

$$x > N$$

þá er

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Skilgreiningin fyrir markgildi í mínus óendanlegu er mjög svipuð. Nemendur eru hvattir til að reyna að láta sér detta í hug hvernig hún lítur út.

Skoðum eitt fall að lokum.

$$q : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad q(x) = \frac{1}{x+1}$$

Teiknum upp mynd til að sjá hvernig þetta fall lítur út nálægt punktinum $x = -1$.

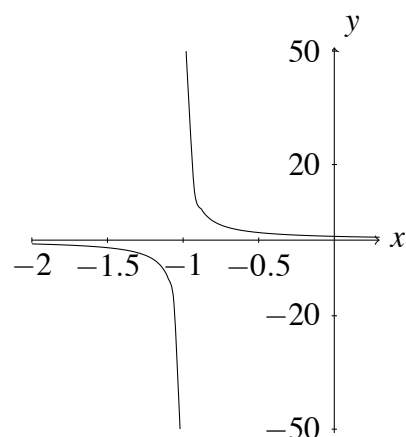
$$q(-0,5) = 2 \quad q(-1,5) = -2$$

$$q(-0,9) = 10 \quad q(-1,1) = -10$$

$$q(-0,99) = 100 \quad q(-1,01) = -100$$

Hér sjáum við að fallið q stefnir annað hvort á óendanlegt eða mínus óendanlegt, eftir því hvoru megin frá við nálgumst það.

Við segjum að markgildi fallsins q frá hægri í punktinum



–1 sé óendanlegt en að markgildi fallsins q frá vinstri í punktinum –1 sé mínus óendanlegt og við skrifum:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} q(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} q(x) = -\infty$$

Formlega skilgreiningin á því að markgildi frá hægri sé óendanlegt er svohljóðandi:

Skilgreining 23.2.3. G.r.f. að $I \subset \mathbb{R}$ sé bil í $\mathbb{R}$ og að $a \in I$ sé vinstri endapunktur þess. G.r.f. að $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ sé fall. Við segjum að markgildi fallsins f frá hægri í punktinum a sé óendanlegt og ritum

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

ef að eftirfarandi gildir:

Fyrir sérhvert $N > 0$ er til $\delta > 0$ þannig að ef

$$0 < x - a < \delta$$

þá er

$$f(x) > N$$

Skilgreiningin á markgildi frá vinstri er mjög svipuð. Nemendur eru hvattir til að reyna láta sér detta í hug hvernig hún lítur út.

Nú skulum við taka saman í lokin helstu gerðir af markgildum:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ markgildið af $f(x)$ þegar x stefnir á a
- 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ markgildið af $f(x)$ þegar x stefnir á a frá hægri
- 3) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ markgildið af $f(x)$ þegar x stefnir á a frá vinstri
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ markgildið af $f(x)$ þegar x stefnir á plús óendanlegt
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ markgildið af $f(x)$ þegar x stefnir á mínus óendanlegt

Dæmi 23.2.1. Finnið eftirfarandi markgild:

(Hér skulum við láta rökstuðning duga í staðin fyrir að nota formlegu skilgreiningarnar.)

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin(x))^2}{x}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(2^x - 1)^2}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos(x)}$$

Lausn:

(a)

Auðvelt er að sjá að fallið $\frac{1}{x}$ stefnir á núll þegar x stefnir á óendanlegt. Þekkt er að $|\sin(x)| < 1$ fyrir öll x og því fæst að $0 < (\sin(x))^2 < 1$ fyrir öll x . Þegar x er stórt er því $\frac{1}{x}$ nálægt núlli og $(\sin(x))^2$ er á milli núll og einn. En þá er auðvelt að sjá að

$$\frac{(\sin(x))^2}{x} = (\sin(x))^2 \frac{1}{x}$$

er nálægt núlli svo að markgildið er núll.

Við skrifum:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin(x))^2}{x} = 0.$$

(b)

Þegar x stefnir á einn þá stefnir $(2^x - 1)^2$ á núll svo að $\frac{1}{(2^x - 1)^2}$ stefnir annaðhvort á plús eða mínus óendanlegt. Þarsem $\frac{1}{(2^x - 1)^2} = \left(\frac{1}{2^x - 1}\right)^2$ er stæða í öðru veldi þá er hún alltaf jákvæð. Hún hlýtur því að stefna á plús óendanlegt, við skrifum

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(2^x - 1)^2} = \infty.$$

(c)

Þegar x stefnir á $\pi/2$ þá stefnir $\cos(x)$ á núll svo $\frac{1}{\cos(x)}$ stefnir á plús eða mínus óendanlegt. Þekkt er að $\cos(x)$ er jákvætt ef $0 < x < \pi/2$. Stæðan $\frac{1}{\cos(x)}$ er þess vegna jákvæð á sama bili og þess vegna stefnir hún á plús óendanlegt ef að nálgast er $\pi/2$ frá vinstri.

Við skrifum

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos(x)} = \infty.$$

23.3 Reikniaðgerðir á markgildum

Þegar markgildi eru reiknuð gilda reiknireglur sem ættu ekki að koma á óvart.

Setning 23.3.1 Gerum ráð fyrir að f og g séu föll og að $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Gerum ráð fyrir að bæði markgildin

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

séu skilgreind og að hvorugt þeirra sé jafnt plús eða mínus óendanlegu.

Gerum ráð fyrir að $k \in \mathbb{R}$ sé fasti.

Þá gildir:

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
2. $\lim_{x \rightarrow c} (kf(x)) = k(\lim_{x \rightarrow c} f(x))$
3. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

$$5. \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \rightarrow c} f(x)) \cdot (\lim_{x \rightarrow c} g(x))$$

Ef að $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$ þá gildir líka

$$6. \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

Tökum sérstaklega eftir því að í reglunni er tekið fram að markgildið megi ekki vera plús eða mínus óendanlegt. Það er af því að óendanlegt er ekki tala og það er ekki til nein skynsamleg leið til að túlka stærðir eins og $\infty - \infty$.

Við skulum sanna þessa reglu:

Við skulum bara sanna tilfellið þegar $c \in \mathbb{R}$, en ekki tilfellið $c = \infty$ eða $c = -\infty$. Það er gert á mjög svipaðan hátt.

$$\text{Látum } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = a \text{ og } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = b$$

1. Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið.

Sýna þarf að til sé $\delta > 0$ þ.a. ef $|x - c| < \delta$ þá er $|k - k| < \varepsilon$.

En þetta eru algjörlega ótengdir hlutir. $|k - k| = 0 < \varepsilon$ sama hvað x eða δ er.

Við megum því velja hvaða δ sem við viljum og fullyrðingin er sjálfkrafa rétt.

2. Sýna þarf að $\lim_{x \rightarrow c} (kf(x)) = ka$.

Athugum að ef $k = 0$ þá er $kf(x) = 0$ og eftir stendur $\lim_{x \rightarrow c} 0 = 0$.

Það var einmitt sýnt í lið eitt svo við getum gert ráð fyrir að $k \neq 0$.

Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið.

Finna þarf $\delta > 0$ þ.a. ef $|x - c| < \delta$ þá er $|kf(x) - ka| < \varepsilon$.

Þar sem $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$ þá vitum við að til er δ_0 þannig að ef $|x - c| < \delta_0$ þá er $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{|k|}$.

Setjum $\delta = \delta_0$ og þá fæst:

Ef $|x - c| < \delta$ þá:

$$|kf(x) - ka| = |k||f(x) - a| \leq |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

sem er einmitt það sem sýna þurfti.

3. Sýna þarf að $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = a + b$.

Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið.

Finna þarf δ þannig að ef $|x - c| < \delta$ þá er

$$|(f(x) + g(x)) - (a + b)| < \varepsilon$$

Þar sem $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$ þá vitum við að til er δ_1 þannig að ef $|x - c| < \delta_1$ þá er $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Þar sem $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = b$ þá vitum við að til er δ_2 þannig að ef $|x - c| < \delta_2$ þá er $|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Látum nú δ vera minni töluna af δ_1 og δ_2 , með öðrum orðum setjum $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Þá fæst að ef $|x - c| < \delta$ þá er sér í lagi $|x - c| < \delta_1$ og $|x - c| < \delta_2$ og því fæst

$$|(f(x) + g(x)) - (a + b)| = |(f(x) - a) + (g(x) - b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Við höfum sýnt að

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = a + b$$

4. Hér þarf ekkert að gera nema nota liði tvö og þrjú nefnilega:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + (-1) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} ((-1)g(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = a - b\end{aligned}$$

5. Sýnum fyrst að

$$\lim_{x \rightarrow c} ((f(x) - a)(g(x) - b)) = 0$$

Látum $\varepsilon > 0$.

Frá fyrri liðum fæst að

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - a) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} a = a - a = 0$$

svo að til er δ_1 þannig að ef $|x - c| < \delta_1$ þá er $|(f(x) - a) - 0| < \sqrt{\varepsilon}$, einfaldað stendur $|f(x) - a| < \sqrt{\varepsilon}$.

Á sama hátt er hægt að finna δ_2 þannig að ef $|x - c| < \delta_2$ þá er $|g(x) - b| < \varepsilon$.

Setjum nú $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, þá fæst

$$|(f(x) - a)(g(x) - b) - 0| = |f(x) - a||g(x) - b| \leq \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

Við höfum sýnt að

$$\lim_{x \rightarrow c} ((f(x) - a)(g(x) - b)) = 0$$

.

Nú fæst með því að nota allt sem á undan hefur komið:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) &= \lim_{x \rightarrow c} ((f(x) - a)(g(x) - b) + bf(x) + ag(x) - ab) \\ &= \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - a)(g(x) - b) + \lim_{x \rightarrow c} bf(x) + \lim_{x \rightarrow c} ag(x) - \lim_{x \rightarrow c} ab \\ &= 0 + ba + ab - ab = ab\end{aligned}$$

6. Sýnum fyrst að

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$$

Látum $\varepsilon > 0$.

Veljum fyrst δ_1 þannig að $|g(x) - b| < \frac{|b|}{2}$ ef $|x - c| < \delta_1$.

Þá fæst fyrir slíkt x að

$$|b| = |b - g(x) + g(x)| \leq |b - g(x)| + |g(x)| < \frac{|b|}{2} + |g(x)|$$

Færum yfir jafnaðarmerkið og fáum

$$\frac{|b|}{2} < |g(x)| \quad \text{sem jafngildir} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|b|}$$

Veljum næst δ_2 þannig að $|g(x) - b| < \frac{b^2}{2}\varepsilon$.

Setjum nú $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Pá fæst:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| &= \frac{|b - g(x)|}{|g(x)b|} = |b - g(x)| \cdot \frac{1}{|g(x)|} \frac{1}{|b|} \\ &< \frac{b^2}{2} \epsilon \frac{2}{|b|} \frac{1}{|b|} = \epsilon \end{aligned}$$

Við höfum sýnt að

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$$

Afgangurinn er auðveldur, við notum liðina að framan:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} \right) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Dæmi 23.3.1. Finnið markgildið $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{2x^2+5x+1}$ ef það er til.

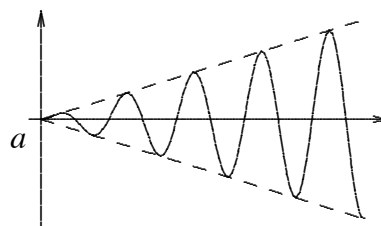
Lausn:

Við byrjum á því að deila með x^2 fyrir ofan og neðan strik. Við notum svo reiknireglurnar fyrir afganginn og þá staðreynd að $1/x^n$ stefnir á núll þegar x stefnir á ∞ fyrir allar náttúrulegar tölur n .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{2x^2+5x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+1/x^2}{2+5/x+1/x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x^2)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2+5/x+1/x^2)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^2}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} 5/x + \lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^2} = \frac{1+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

23.4 Klemmureglan

Klemmureglan er mikilvægt tól sem hjálpar okkur að reikna markgildi:



Setning 23.4.1 Gerum ráð fyrir að f, g og h séu þrjú föll með sama skilgreiningarmengi I og að $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ fyrir öll $x \in I$.
Gerum einnig ráð fyrir að $c \in I$ og að

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L.$$

Pá er

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L.$$

Myndrænt er auðvelt að sjá fyrir sér þessa reglu. Á mynd til hliðar má ímynda sér að hallandi punktalínurnar séu föllin f og h . Þau hafa bæði markgildi a . Fallið g er svo fallið sem klemmist þarna á milli og getur ekkert farið nema í gegnum punktinn a . Við skulum sanna þetta formlega.

Látum $\varepsilon > 0$.

Þar sem $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$ þá eru til $\delta_1 > 0$ og $\delta_2 > 0$ þannig að

ef $|x - c| < \delta_1$ þá er $|f(x) - L| < \varepsilon$
 og ef $|x - c| < \delta_2$ þá er $|h(x) - L| < \varepsilon$.
 Setjum nú $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Gerum ráð fyrir að $|x - c| < \delta$.

Nú er gefið að $g(x) \leq h(x)$ af því fæst

$$g(x) - L \leq h(x) - L \leq |h(x) - L| < \varepsilon$$

Einnig er gefið að $g(x) \geq f(x)$ en þá er $-g(x) \leq -f(x)$ og því fæst

$$L - g(x) \leq L - f(x) \leq |L - f(x)| < \varepsilon$$

Við höfum því fengið

$$g(x) - L < \varepsilon \quad \text{og} \quad L - g(x) < \varepsilon$$

svo að

$$|g(x) - L| < \varepsilon$$

sem er það sem sýna þurfti.

Í upphafi kaflans um markgildi rökstuddum við að

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

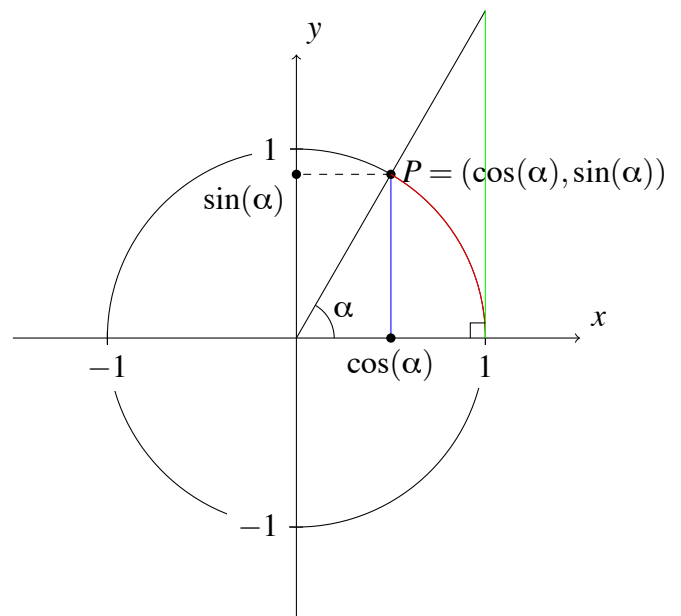
Þetta er mikilvæg niðurstaða sem verður notuð aftur í næstu köflum. Við skulum þess vegna sýna fram á þetta.

Látum α vera einhverja tölu á bilinu $[0, \pi/2[$.

Teiknum einingahringinn

og skoðum stærðirnar α , $\sin(\alpha)$ og $\tan(\alpha)$ á honum.

- Rúmfraðilega má túlka stærðina α sem lengdina á rauða boganum á mynd til hliðar, það fæst beint af skilgreiningu á bogaeiningum.
- Stærðina $\sin(\alpha)$ má túlka sem lengdina á bláa línustrikinu, það fæst beint af skilgreiningu af sínus.
- Stærðina $\tan(\alpha)$ má túlka sem lengdina á græna línustrikinu. Það sést af því að það er mótæg hlið hornsins α í rétthyrndum þríhyrningi sem myndast og það hefur aðlæga hlið með lengd 1.



Af myndinni sést að bláa strikið er styttra en rauði
boginn sem er styttri en græna strikið svo að:

$$\sin(\alpha) \leq \alpha \leq \tan(\alpha).$$

Með því að deila í gegnum ójöfnuna $\sin(\alpha) \leq \alpha$ með α fæst:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \leq 1. \quad (*)$$

Með því að margfalda í gegnum ójöfnuna $\alpha \leq \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ með stærðinni $\frac{\cos(\alpha)}{\alpha}$ fæst

$$\cos(\alpha) \leq \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}. \quad (**)$$

Af (*) og (**) fæst:

$$\cos(\alpha) \leq \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \leq 1.$$

Nú sést að

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{og} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos(\alpha) = \cos(0) = 1$$

en þá fæst af klemmureglu að

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$$

en það er það sem sýna átti.

Athugasemd:

Í útleiðslunni hér að ofan er gert ráð fyrir að $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$. Þetta þykir stærðfræðingum ekki vera augljós hlutur og krefjast sönnunnar. Þetta gildir í raun af því að kósínus er það sem er kallað samfelld fall. Farið verður sérstaklega í það í kaflanum um samfelld föll.

Dæmi 23.4.1. Reiknið markgildið $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$ ef það er til.

Lausn:

Við vitum að $|\sin(x)| \leq 1$, fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ svo að

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

svo að skv. klemmureglu sjáum við að $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

24 Aðfellur og markgildi; ræð föll

24.1 Markgildi ræðra falla

Rifjum upp að fall R kallast rætt fall ef hægt er að tákna það með formúlu af gerðinni

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

Þar sem

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{og} \quad q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

eru margliður.

Stig margliðunnar p er n og stig margliðunnar q er m .

Nú skulum við skoða nokkrar aðferðir til að reikna út markgildi ræða fallsins $R(x)$. Þ.e.a.s. aðferðir til að reikna út

$$\lim_{x \rightarrow c} R(x)$$

Hér þarf að skipta í tilvik eftir því hvað c er.

1. Gerum fyrst ráð fyrir að $c \in \mathbb{R}$ sé einhver tala (ekki plús eða mínus óendanlegt) þannig að $q(c) \neq 0$.

Þá fæst

$$\lim_{x \rightarrow c} R(x) = R(c)$$

Þetta gildir af því að fallið R er samfellt í þeim punktum sem það er skilgreint. Fjallað verður um það betur í næsta kafla.

2. Gerum ráð fyrir að $c = \infty$ eða $c = -\infty$. Þá þarf að skipta í tilvik

(a) Ef stig margliðunnar p er hærra en stig margliðunnar q þá er

$$\lim_{x \rightarrow c} R(x) = \infty \quad \text{eða} \quad \lim_{x \rightarrow c} R(x) = -\infty$$

Það fer í raun eftir stigum margliðanna p og q , og formerki forystustuðlanna a_n og b_m hvort útkoman verður plús eða mínus óendanlegt. Yfirleitt er auðvelt að sjá hvor útkman er rétt.

(b) Ef stig margliðunnar p er minna en stig margliðunnar q þá er

$$\lim_{x \rightarrow c} R(x) = 0$$

(c) Ef stig margliðunnar p er jafnt stigi margliðunnar q þá er

$$\lim_{x \rightarrow c} R(x) = \frac{a_n}{b_m}$$

3. Gerum ráð fyrir að $c \in \mathbb{R}$ sé tala þannig að $q(c) = 0$. Þá þarf að skipta í tilvik

(a) Ef $p(c) \neq 0$ þá getur eitt af þrennu gerst.

Markgildið $\lim_{x \rightarrow c} R(x)$ er ekki skilgreint,

$$\lim_{x \rightarrow c} R(x) = \infty \quad \text{eða} \quad \lim_{x \rightarrow c} R(x) = -\infty$$

Yfirleitt er auðvelt að sjá hvort af þessu þrennu gildir.

Ef að ferll fallsins fer bæði upp og niður í óendanlegt eftir því hvoru megin maður kemur að punktinum þá er markgildið ekki skilgreint.

Annars er það annað hvort plús eða mínus óendanlegt.

(b) Tilfellið $p(c) = 0$ er erfiðast. Það þarf að nota séraðferð fyrir þetta tilvik sem verður útskýrð á næstu blaðsíðum.

Áður en að við segjum frá aðferðinni fyrir tilfelli 3(c) skulum við rökstyðja jöfnurnar í hinum tilfellunum.

Í þessum rökstuðningi verður gert ráð fyrir að þekkt sé að

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-n} = 0$$

Fyrir allar náttúrulegar tölur n . Þetta er staðreynd sem mjög auðvelt er að sannfæra sig um.

1. Ef að c er rauntala og $q(c) \neq 0$ þá er fallið R skilgreint í punktinum c . Þessi niðurstaða fæst af samfelldni ræðra falla sem verður rædd í næsta kafla.

2. Hér var $c = \pm\infty$. Munum að stig margliðanna var n og m .

(a) Hér var $n > m$.

Með því að deila í gegnum ræða fallið $R(x)$ með x^n fæst:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_{n-1} x^{-1} + \dots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_m x^{m-n} + b_{m-1} x^{m-1-n} + \dots + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}} \end{aligned}$$

Nú er $n > m$ svo $m - n$ er neikvæð tala. Þess vegna er $\lim_{x \rightarrow \infty} b_m x^{m-n} = 0$ og eins er markgildi allra hinna liðanna í nefnaranum núll. Nefnari brotsins stefnir þess vegna á núll.

Allir liðir í teljaranum stefna líka á núll, nema fyrsti liðurinn, a_n . Teljarninn stefnir þess vegna á töluna a_n .

Nefnarinn stefnir á núll en teljarinn ekki svo markgildið hlýtur að vera plús eða mínus óendanlegt.

(b) Sambærileg rök og í (a)-lið nema nú mun teljari stefna á núll en nefnari á töluna b_m . Þess vegna fæst markgildið núll.

(c) Nú er $n = m$.

Með því að deila í gegnum ræða fallið $R(x)$ með x^n fæst:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \dots + a_1x^{1-n} + a_0x^{-n}}{b_n + b_{n-1}x^{m-1-n} + \dots + b_1x^{1-n} + b_0x^{-n}} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} a_n + \lim_{x \rightarrow \infty} a_{n-1}x^{-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow \infty} a_1x^{1-n} + \lim_{x \rightarrow \infty} a_0x^{-n}}{\lim_{x \rightarrow \infty} b_n + \lim_{x \rightarrow \infty} b_{n-1}x^{-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow \infty} b_1x^{1-n} + \lim_{x \rightarrow \infty} b_0x^{-n}} \\
&= \frac{a_n + 0 + 0 + \dots + 0 + 0}{b_n + 0 + 0 \dots + 0 + 0} = \frac{a_n}{b_n}
\end{aligned}$$

3. Hér er verið að gera ráð fyrir að nefnari ræða brotsins stefni á núll en teljarinn ekki. Þá er ljóst að markgildið verður plús eða mínus óendanlegt.

Nú skulum við fara í gegnum aðferðina fyrir tilfellið 3(c) sérstaklega.

Finna skal markgildið

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x)}{q(x)}$$

ef gefið er að $p(c) = q(c) = 0$.

1. Fullþáttum margliðurnar $p(x)$ og $q(x)$, þ.e.a.s. skrifum

$$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_k(x) \quad \text{og} \quad q(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_k(x)$$

Þar sem p_i og q_j eru óþáttanlegar margliður fyrir öll i, j .

2. Skrifum

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_k(x)}{q_1(x) \cdot q_2(x) \cdots q_k(x)}$$

og stytum út alla liði sem hægt er, þegar það er búið stendur eftir nýtt rætt fall $L(x)$.

3. Þar sem L er rætt fall þá eru til margliður f og g þannig að

$$L(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ef fyrri skref hafa verið framkvæmt rétt getur ekki verið að bæði $f(c) = 0$ og $g(c) = 0$.

Við getum þess vegna notað fyrri leiðbeiningar til þess að finna markgildið

$$\lim_{x \rightarrow c} L(x)$$

4. Nú er hægt að fullyrða að

$$\lim_{x \rightarrow c} R(x) = \lim_{x \rightarrow c} L(x)$$

Athugasemd:

Í aðferðinni hér að er varla hægt að segja að $L(x)$ sé „nýtt fall“. Það er af því að í raun gildir $L(x) = R(x)$ fyrir öll x þar sem föllin eru skilgreind. Eini munurinn er sá að fallið R hefur fleiri óskilgreinda punkta, því að nefnari þess hefur fleiri núllstöðvar en fallið L .

Þar sem $L(x) = R(x)$ „næstum alls staðar“ ætti að vera ljóst að markgildi fallanna eru þau sömu.

Dæmi 24.1.1. Finnið markgildið

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 - 2x + 3}.$$

Lausn:

Hér er $p(x) = x^2 + 1$ og $q(x) = x^4 - 2x + 3$.

Stig q er hærra en stig p svo að markgildið er núll.

Við skrifum:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 - 2x + 3} = 0.$$

Dæmi 24.1.2. Finnið markgildið

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 3}{x^2 + 1}.$$

Lausn:

Nú er margliðan í teljaranum af hærra stigi.

Markgildið er þess vegna annaðhvort plús eða mínus óendanlegt.

Við tökum eftir að nefnarinn, $x^2 + 1$ er alltaf jákvæður, (annað veldi er alltaf jákvætt).

Þegar x stefnir á mínus óendanlegt þá verður teljarinn, $x^4 - 2x + 3$, jákvæður. Það er af því að fremsti liðurinn x^4 verður jákvæður og hann mun verða ráðandi í óendanleikanum.

Teljarinn og nefnarinn verða þá báðir jákvæðir þegar x stefnir á mínus óendanlegt svo markgildið verður plús óendanlegt. Við skrifum

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \infty.$$

Dæmi 24.1.3. Finnið markgildið

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2}{x^3 - x^2 + 1}.$$

Lausn:

Hér er $q(x) = x^3 - x^2 + 1$.

Nú er $q(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 5 \neq 0$ svo að markgildið er

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2}{x^3 - x^2 + 1} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2^2}{2^3 - 2^2 + 1} = \frac{16}{5}.$$

Dæmi 24.1.4. Finnið markgildið

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}{x^2 - 16}.$$

Lausn:

Hér er $q(x) = x^2 - 16$ og $p(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

Við tökum eftir að $q(4) = 0$ og $p(4) = 0$. Við þurfum þess vegna að nota síðustu aðferðina sem lýst var í kaflanum.

1. Notum aðferðirnar sem fjallað var um í kaflanum um margliður til þess að fullþátta p og q .

$$p(x) = (x-2)(x+2)(x-4) \quad \text{og} \quad q(x) = (x-4)(x+4).$$

2. Styttum út liði:

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}{x^2 - 16} = \frac{(x-2)(x+2)(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+4)}$$

$$\text{og setjum } L(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+4)}.$$

3. Skv. aðferðum að ofan er

$$\lim_{x \rightarrow 4} L(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+4)} = \frac{(4-2)(4+2)}{4+4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

4. Við fullyrðum að

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}{x^2 - 16} = \frac{3}{2}.$$

Athugasemd:

Hér er miklu þúðri eytt í að fara í gegnum reikningana skref fyrir skref. Sá sem er vanur reikningi gæti einfaldlega skrifað

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}{x^2 - 16} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x+2)(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+4)} \\ &= \frac{(4-2)(4+2)}{4+4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dæmi 24.1.5. Reiknið markgildið

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

Lausn:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} = \infty.$$

24.2 Aðfellur

Látum f vera eitthvað fall á rauntölunum.

Aðfella fallsins f er bein lína sem að í vissum skilningi liggur upp að ferli fallsins.

Áður en við setjum fram formlega skilgreiningu þá skulum við taka dæmi um þrjár mismunandi gerðir af aðfellum.

(1)

Skoðum fyrst fallið

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Á mynd til hliðar er búið að teikna upp fallið. Á myndinni er einnig punktalína sem er gefin með jöfnunni $x = 1$.

Þessi punktalína liggur vel uppáð ferlinum, það er af því að þessi lína er aðfella fallsins f .

Þessi lína er lóðrétt, þess vegna er hún stundum kölluð *lóðfelli* fallsins f í staðin fyrir aðfelli.

(2)

Skoðum næst fallið

$$g: \mathbb{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] \quad g(x) = \text{Arctan}(x).$$

Þetta fall var kynnt til sögunnar í kaflanum um hornaföll og einingarringinn. Til hliðar er búið að teikna upp fallið ásamt punktalínunni sem er gefin með jöfnunni $y = \pi/2$.

Það sést að þessi lína liggur vel uppáð ferlinum, það er af því að þessi lína er aðfella fallsins g .

Þessi lína er lárétt, þess vegna er hún stundum frekar kölluð *láfella* fallsins g í staðin fyrir aðfella.

(3)

Skoðum að lokum fallið

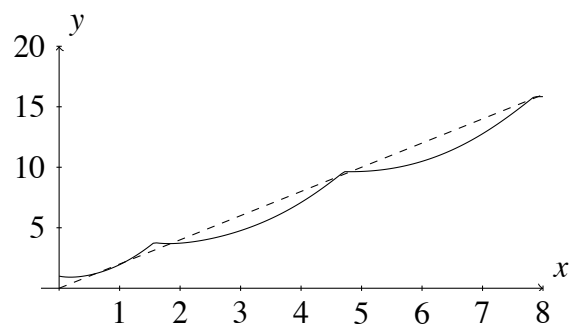
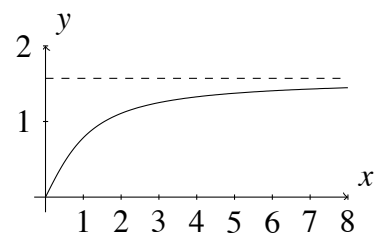
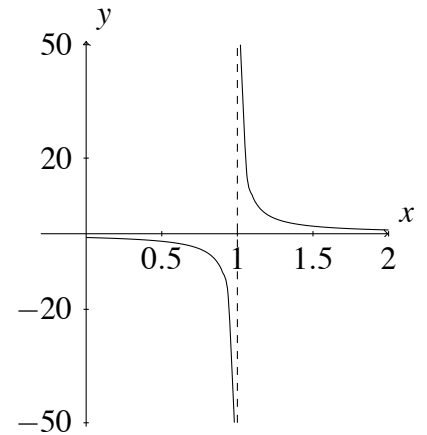
$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad h(x) = \frac{2x^2 + 1}{|x| + |\cos(x)|}.$$

Til hliðar er búið að teikna upp falluð ásamt punktalínunni sem hefur jöfnu $y = 2x$.

Hér liggur línan upp að fallinu af því að hún er aðfella þess.

Þessi lína liggur á ská og þess vegna er hún stundum kölluð *skáfella* fallsins frekar en aðfella þess.

Takið eftir að línan sker feril fallsins reglulega, það stoppar okkur ekki í því að kalla hana aðfelli. Það eina sem skiptir máli er að línan mun liggja nær og nær ferli fallsins ef farið er út í óendanleikann.



Nú skulum við setja fram formlega skilgreiningu á aðfellum.

Skilgreining 24.2.1. Látum $X \subset \mathbb{R}$ vera hlutmengi í rauntölunum og $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall.

- Látum $a \in \mathbb{R}$.

Ef að annaðhvort markgildið

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{eða} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

er skilgreint og jafnt plús eða mínus óendanlegu þá er línan sem er gefin með jöfnunni $x = a$ kölluð lóðfella fallsins f .

- Ef að annað hvort markgildið

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{eða} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

er skilgreint, og það er jafnt einhverjum fasta $k \in \mathbb{R}$ þá er línan sem er gefin með jöfnunni $y = k$ kölluð láfella fallsins f .

- Línan sem er gefin með jöfnunni $y = hx + s$ með $h \neq 0$ kallast skáfella fallsins f ef að annaðhvort markgildið

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (hx + s)) \quad \text{eða} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (hx + s))$$

er skilgreint og jafnt núlli.

Ef að l er lína sem er lóðfella, láfella eða skáfella fallsins f þá segjum við að hún sé aðfella fallsins f .

24.3 Aðfellur ræðra falla

Nú skal fara skipulega í gegnum aðferð til þess að finna aðfellur ræðra falla.

Finna skal allar aðfellur ræða fallsins

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}.$$

1. Finnið markgildið

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x).$$

Ef það er til og jafnt einhverri rauntölu $k \in \mathbb{R}$ þá er línan sem er gefin með jöfnunni $y = k$ láfella fallsins.

2. Finnið allar núllstöðvar margliðunnar q . Látum þær heita $c_1, c_2, \dots, c_l$.

Línan sem er gefin með jöfnunni $x = c_i$ er lóðfella R fyrir öll i nema ef að markgildið

$$\lim_{x \rightarrow c_i} R(x)$$

er skilgreint og jafnt einhverri rauntölu $k \in \mathbb{R}$.

3. Ræða fallið R hefur skáfellu ef og aðeins ef að stig margliðunnar p er nákvæmlega einu stigi hærra en stig margliðunnar q .

Ef svo er þá er skáfellan gefin með jöfnunni $y = hx + s$ þar sem stuðlarnir h og s fást með jöfnunum

$$h = \frac{a_n}{b_m} \quad \text{og} \quad s = \frac{a_{n-1} - hb_{m-1}}{b_m}.$$

Við skulum sanna að þessi aðferð virki

1. Það fæst beint af skilgreiningunni á láfelli að línan gefin með $y = k$ er láfella ef að

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = k.$$

Það eina sem þarf að rökstyðja er af hverju markgildið

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} R(x)$$

er ekki skoðað líka, en það er af því að ef annað hvort þessara markgilda er skilgreint og jafnt einhverri rauntölu k þá er hitt einnig skilgreint og líka jafnt sömu tölu k . Markgildin sem sagt munu gefa sömu láfelluna. Þetta sést ef aðferðin til að finna markgildi R í óendanleikanum er skoðuð.

2. Ljóst er að sérhver lóðfella ræða fallsins R er gefin með jöfnu $x = c_i$ þar sem c_i er einhver núllstöð margliðunnar q .

Það eina sem þarf að athuga er að ef að markgildið

$$\lim_{x \rightarrow c_i} R(x)$$

er ekki skilgreint þá mun annað hvort gilda

$$\lim_{x \rightarrow c_i^+} R(x) = \infty \quad \text{eða} \quad \lim_{x \rightarrow c_i^+} R(x) = -\infty$$

sem hefur í för með sér að línan $x = c_i$ er lóðfella skv. skilgreiningu.

Þetta tengist þeirri staðreynd að núllstöðvameni margliða hefur aðeins endanlega mörg stök svo að þær geta ekki skipt um formerki nema endanlega oft. Sönnunin er of tæknileg til að fara í gegnum hér.

3. Munum að n og m er látið standa fyrir stig p og q .

Skoðum markgildið

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (R(x) - (hx + s)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (R(x) - (hx + s)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{p(x)}{q(x)} - (hx + s) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{p(x) - q(x)(hx + s)}{q(x)} \right). \end{aligned}$$

Athugum að margfeldið $q(x)(hx + s)$ margliða af stigi $m + 1$.

Skiptum nú í tilfelli eftir stigi p .

- (a) Efað maragliðan p er af stigi $m + 2$ eða hærra mun maragliðan $p(x) - q(x)(hx + s)$ einnig vera margliða af stigi $m + 2$ eða hærra. Teljarinn í brotinu verður því af hærra stigi en nefnarinn og markgildið verður plús eða mínus óendanlegt.

(b) Ef að margliðan p er af stigi m eða lægra mun margliðan $p(x) - q(x)(hx + s)$ vera af stigi $m + 1$ eins og margliðan $q(x)(hx + s)$.
Teljarinn í brotinu verður því af hærri stigi en nefnarinn og markgildið verður plús eða mínus óendanlegt.

(c) Gerum nú ráð fyrir að margliðan p sé af stigi $m + 1$.

Látum $t(x) = p(x) - q(x)(hx + s)$.

Þá er $t(x)$ margliða sem er í mesta lagi af stigi $m + 1$ svo hægt er að skrifa

$$t(x) = c_{m+1}x^{m+1} + c_mx^m + c_{m-1}x^{m-2} \dots + c_1x + c_0.$$

Þar sem c_i er fasti einhver fasti fyrir öll i .

Skoðum aftur markgildið

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{p(x) - q(x)(hx + s)}{q(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t(x)}{q(x)}.$$

Við viljum finna h og s þannig að þetta markgildi verði jafnt núlli.

Ef að $c_{m+1} \neq 0$ þá er t af hærri stigi en q og markgildið verður óendanlegt, þess vegna verður c_{m+1} að vera jafnt núlli.

Ef að $c_{m+1} = 0$ þá verður

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t(x)}{q(x)} = \frac{c_m}{b_m}.$$

Við viljum að markgildið verði núll svo að stuðullinn c_m verður einnig að vera núll.

Markmiðið okkar er nú að velja h og s þannig að $c_{m+1} = c_m = 0$.

Reiknum upp úr margfeldinu

$$\begin{aligned} t(x) &= p(x) - q(x)(hx + s) \\ &= (a_{m+1}x^{m+1} + a_mx^m + \dots + a_1x + a_0) - (b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0)(hx + s) \\ &= (a_{m+1} - b_mh)x^{m+1} + (a_m - b_ms - b_{m-1}h)x^m + \dots + (a_1 - b_0h - b_1s)x + (a_0 - b_0s). \end{aligned}$$

Þá sjáum við að $c_{m+1} = a_{m+1} - b_mh$ og $c_m = a_m - b_ms - b_{m-1}h$. Við viljum að $c_{m+1} = c_m = 0$ svo að leysa þarf úr h og s úr jöfnunum

$$0 = a_{m+1} - b_mh \quad \text{og} \quad 0 = a_m - b_ms - b_{m-1}h.$$

Þá fæst

$$h = \frac{a_{m+1}}{b_m} \quad \text{og} \quad s = \frac{a_m - b_{m-1}h}{b_m}$$

sem er það sem sýna átti.

Dæmi 24.3.1. Finnið allar aðfellur ræða fallsins

$$R(x) = \frac{5x^2}{x^2 + 4x + 5}.$$

Lausn:

Hér er $q(x) = x^2 + 4x + 1$ og $p(x) = 5x^2$.

1. Auðvelt er að sjá að

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^2 + 4x + 5} = \frac{5}{1} = 5.$$

Línan sem er gefin með jöfnunni $y = 5$ er þess vegna láfella.

2. Aðgreinir margliðunnar q talan $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$, svo að hún hefur engar núllstöðvar. Ræða fallið hefur þess vegna engar lóðfellur.

3. Stig margliðunnar p er jafnt stigi margliðunnar q svo að ræða fallið hefur engar skáfellur.

Niðurstaðan er þess vegna sú að ræða fallið hefur aðeins eina láfellu sem er gefin með jöfnunni $y = 5$.

Dæmi 24.3.2. Finnið allar aðfellur ræða fallsins

$$R(x) = \frac{x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 5x - 6}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}.$$

Gefið er að

$$x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 5x - 6 = (x - 1)^2(x + 2)(x - 3)(x + 1) \text{ og}$$

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x - 1)^3(x + 3).$$

Lausn:

$$\text{Hér er } p(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 5x - 6 = (x - 1)^2(x + 2)(x - 3)(x + 1) \text{ og}$$

$$q(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x - 1)^3(x + 3).$$

1. Stig p er hærra en stig q . Þess vegna er markgildið

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x)$$

Annað hvort plús eða mínus óendanlegt.

Fallið hefur þess vegna engar láfellur.

2. Margliðan $q(x)$ hefur tvær núllstöðvar, í punktunum $x = -3$ og $x = 1$.

$$p(-3) = -192 \neq 0 \text{ svo að markgildið}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} R(x)$$

er jafnt plús eða mínus óendanlegu eða það er ekki skilgreint. Við sjáum þá að línan sem er gefin með jöfnunni $x = -3$ er lóðfella.

$p(1) = 0$ svo að við þurfum að finna markgildið í þeim punkti sérstaklega:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} R(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 5x - 6}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + 2)(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)^3(x + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)(x + 3)}. \end{aligned}$$

Nú er hægt að sjá að nefnarinn í síðasta brotinu stefnir á núll í $x = 1$ en teljarinn ekki, markgildið er því plús eða mínus óendanlegt, eða þá að það er ekki skilgreint, en það nægir til að rökstyðja að línan sem er gefin með jöfnunni $x = 1$ er lóðfella.

3. Nú er stig p nákvæmlega einu stigi hærra en q .

Hér er $a_{m+1} = a_5 = 1$, $a_m = a_4 = -2$, $b_m = b_4 = 1$ og $b_{m-1} = b_3 = -6$.

Við fáum

$$h = \frac{a_{m+1}}{b_m} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{og} \quad s = \frac{a_m - b_{m-1}h}{b_m} = \frac{1 + 6 \cdot 1}{1} = 7.$$

Skáfellan er þessvegna gefin með jöfnunni

$$y = x + 7.$$

Niðurstaðan okkar er að fallið R hefur þrjár aðfellur:

$$l_1 : x = -3$$

$$l_2 : x = 1$$

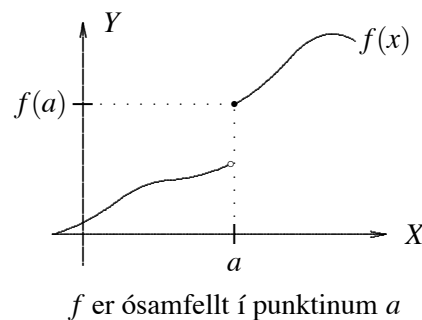
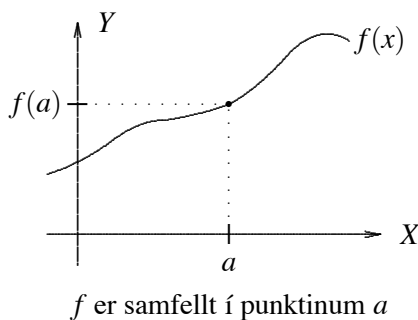
$$l_3 : y = x + 7.$$

25 Samfelld föll

25.1 Samfelld föll

Óformlega má segja að fall f sé *samfelld* ef að hægt er að teikna feril þess á blað með blýanti án þess að þurfa að lyfta blýantnum. Ef að fall er ekki samfelld segjum við að það sé *ósamfelld*.

Ef að fall f er ósamfelld þá segjum við að það sé ósamfelld í þeim punktum þar sem lyfta þarf blýantinum af blaðinu.



Formleg skilgreining:

Skilgreining 25.1.1. • Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil og látum $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall.

Ef að $a \in I$ er punktur á bilinu sem er ekki endapunktur þess og

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

þá segjum við að f sé samfelld í punktinum a .

- Ef að $a \in I$ er punktur á bilinu sem er ekki hægri endapunktur þess og

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

þá segjum við að f sé samfelldt frá vinstri í punktinum a .

- Ef að $a \in I$ er punktur á bilinu sem er ekki vinstri endapunktur þess og

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

þá segjum við að f sé samfelldt frá hægri í punktinum a .

- Fallið f er sagt vera samfelldt á I ef það er samfelldt í öllum punktum á bilinu I sem eru ekki endapunktur þess, samfelldt frá hægri í vinstri endapunkti þess ef hann er til og samfelldt frá vinstri í hægri endapunkti þess ef hann er til.

25.2 Reglur um samfelldni

Við þekkjum mörg samfelld föll. Áður en við kynnum nokkur þeirra til sögunnar skulum við setja fram nokkrar reglur:

Setning 25.2.1 Gerum ráð fyrir að I sé bil og að f og g séu föll á I .

Gerum ráð fyrir að föllin f og g séu samfelld á I og að $a \in I$

Þá eru föllin $a \cdot f$, $f + g$, $f - g$ og $f \cdot g$ líka samfelld á I .

Ef að g er ekki jafnt núlli í neinum punkti bilsins þá er fallið f/g líka samfelldt á I .

Athugasemd:

Sér í lagi gildir að ef föllin f og g eru samfelld í einhverjum punkti a á bilinu þá eru föllin $f + g$, $f - g$ og $f \cdot g$ líka samfelld í punktinum a .

Ef $g(a) \neq 0$ þá er f/g líka samfelldt í a .

Þessi regla fæst beint af reglunum sem segja að summa af markgildum sé jöfn markgildi af summu, mismunur af markgildum sé jafnt markgildi af mismuni o.s.fr.

Eina reiknireglu skal þó taka fram sérstaklega:

Setning 25.2.2 Gerum ráð fyrir að $I, J \subset \mathbb{R}$ séu bil og að föllin $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ og $g : I \rightarrow J$ séu samfelld.

Þá er fallið $f \circ g$ samfelldt á I .

Sönnum það.

Við látum duga að sanna þessa setningu ef að $I = J = \mathbb{R}$. Ef slíkt gildir ekki þarf að taka fram mörg sértílvik eftir því hvort við lendum í endapunktum bilanna eða ekki. Öll þessi sértílvik eru gerð nokkurn vegin eins og sönnunin sem hér kemur.

Við þurfum að sanna að $f \circ g$ sé samfelld í sérhverjum punkti í $\mathbb{R}$.

Látum $a \in \mathbb{R}$ og $\varepsilon > 0$.

Sýna þarf að til sé $\delta > 0$ þannig að $|x - a| < \delta$ hafi í för með sér að $|f \circ g(x) - f \circ g(a)| < \varepsilon$

1. Þar sem f er samfelld þá er það sér í lagi samfelld í punktinum $x = g(a)$. Þess vegna vitum við að til er δ_1 þannig að $|x - g(a)| < \delta_1$ hefur í för með sér að $|f(x) - f(g(a))| < \varepsilon$.
2. Þar sem g er samfelld þá er það sér í lagi samfelld í punktinum $x = a$. Þess vegna vitum við að til er δ_2 þannig að $|x - a| < \delta_2$ hefur í för með sér að $|g(x) - g(a)| < \delta_1$.

Setjum nú $\delta = \delta_2$ og gerum ráð fyrir að $|x - a| < \delta$.

Af 2. fæst að $|g(x) - g(a)| < \delta_1$ en þá fæst beint af 1. (með því að skipta út x fyrir $g(x)$) að $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$ en það er það sem sýna átti.

Í upphafi kaflans var útskýrður einn af megineiginleikum samfelldra falla. Nefnilega sá eiginleiki að ef ferlill samfellds falls er teiknaður á blað með blýanti þá þarf ekki að lifa honum. Í raun er þetta setning sem hægt er að setja fram formlega. Þessi setning er kölluð milligildissetningin.

Setning 25.2.3 Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera bil og $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vera samfelld fall.

Látum $x_1, x_2 \in I$ vera tvö stök á bilinu þannig að $x_1 < x_2$ og $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Þá gildir um sérhverja tölu y_0 sem er á milli talnanna $f(x_1)$ og $f(x_2)$ að til er $x_0 \in [x_1, x_2]$ þannig að $f(x_0) = y_0$

Til að sanna þessa reglu þarf að nýta sér eiginleika rauntalna um efra og neðra mark. Sagt er frá þessum eiginleika í kaflanum um talnakerfin og nemendur eru hvattir til þess að rifja hann upp.

Við sönnum bara tilfellið ef að $f(x_1) < f(x_2)$. Hitt tilfellið þegar $f(x_1) > f(x_2)$ er mjög svipað.

Þar sem y_0 er á milli $f(x_1)$ og $f(x_2)$ þá getum við skrifað $y_0 \in]f(x_1), f(x_2)[$.

Skilgreinum mengið $L = \{x \in \mathbb{R}; x < x_2 \text{ og } f(x) < y_0\}$.

Köllum efra mark þessa mengis x_0 . Með öðrum orðum setjum $x_0 = \sup L$.

- Sýnum fyrst að $x_0 \in [x_1, x_2]$.

Þar sem $f(x_1) < y_0$ þá er $x_1 \in L$ og þess vegna er $x_1 \leq \sup L = x_0$.

Miðað við skilgreininguna á menginu L þá er $x_0 = \sup L \leq x_2$.

Við höfum því séð að $x_0 \in [x_1, x_2]$.

- Sýnum næst að $f(x_0)$ er ekki minna en y_0 , það verður gert með mótsögn.

Gerum ráð fyrir að $f(x_0) < y_0$.

Setjum $\varepsilon = y_0 - f(x_0)$, þá er $\varepsilon > 0$.

Samkvæmt skilgreiningu á samfelldu falli þá er til $\delta > 0$ þannig að ef $|x_0 - x| < \delta$ þá er $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

Sér í lagi gildir þetta fyrir $x = x_0 + \delta/2$.

Við fáum þá

$$\begin{aligned} f(x_0 + \delta/2) &= f(x_0 + \delta/2) - f(x_0) + f(x_0) \leq |f(x_0 + \delta/2) - f(x_0)| + f(x_0) \\ &< \varepsilon + f(x_0) = (y_0 - f(x_0)) + f(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

Við sjáum þá að $x_0 + \delta/2$ er í menginu L en það er mótsögn við að x_0 sé efra mark L því að $x_0 < x_0 + \delta/2$.

Af þessu sést að $f(x_0)$ er ekki minna en y_0 .

- Sýnum næst að $f(x_0)$ er ekki stærra en y_0 , það verður gert með mótsögn.

Gerum ráð fyrir að $f(x_0) > y_0$.

Setjum $\varepsilon = f(x_0) - y_0$, þá er $\varepsilon > 0$.

Samkvæmt skilgreiningu á samfelldu falli þá er til $\delta > 0$ þannig að ef $|x - x_0| < \delta$ þá er $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, en það hefur í för með sér að $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.

Fyrir sérhvert x þannig að $|x - x_0| < \delta$ gildir þess vegna

$$f(x) > f(x) - \varepsilon = f(x_0) - (f(x_0) - y_0) = y_0$$

Þá sést að $x_0 - \delta$ er stærra en sérhvert stak í L .

Það er í mótsögn við að x_0 sé efra mark mengisins L , því að $x_0 > x_0 - \delta$.

$f(x_0)$ er því ekki stærra en y_0 .

Við höfum séð að $f(x_0)$ er hvorki stærra en eða minna en y_0 það hlýtur því að vera jafnt og y_0 .

Næsta setning

Setning 25.2.4 Látum $I \in \mathbb{R}$ vera bil og $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall.
Ef f er eintækt og samfelld þá er það stranglega einhalla.

Sönnun:

Gerum ráð fyrir að f sé eintækt og samfelld.

Gerum ráð fyrir að það sé ekki stranglega minnkandi, við viljum sýna að þá hljóti það að vera stranglega vaxandi.

Látum x_1, x_2 vera einhverjar tölur á I þannig að $x_1 < x_2$. Við viljum sýna að þá gildi $f(x_1) < f(x_2)$.

Þar sem að f er ekki stranglega minnkandi þá vitum við að til eru einhverjar aðrar tölur a_1, a_2 þannig að $f(a_1) \leq f(a_2)$.

Nú er f eintækt svo að $f(a_1) \neq f(a_2)$ en þá er $f(a_1) < f(a_2)$. Nú þarf að skipta í nokkur tilvik eftir því hvar x_1 og x_2 eru staðsett á talnalínunni miðað við a_1 og a_2 .

- Tilfellið $x_2 > x_1 \geq a_2 > a_1$:

Sýnum fyrst að $f(x_1) \geq f(a_2)$.

Athugum að $f(x_1)$ getur ekki verið á milli talnanna $f(a_1)$ og $f(a_2)$ því að ef svo væri þá væri skv. milligildissetningu til tala á milli $a_0 \in [a_1, a_2]$ þannig að $f(a_0) = f(x_1)$ í mótsögn við eintækni fallsins f .

Athugum að $f(x_1)$ getur heldur ekki verið minni en $f(a_1)$ því að ef svo væri þá væri $f(x_1) < f(a_1) < f(a_2)$ og því væri skv. milligildissetningu til $a_0 \in [a_2, x_1]$ þannig að $f(a_0) = f(a_1)$ sem er í mótsögn við eintækni f .

Við sjáum þess vegna að $f(x_1) \geq f(a_2)$.

Á sama hátt má nú sjá að $f(x_2) > f(x_1)$.

- *Hin tilfellin eru:*

$$x_2 \geq a_2 > x_1 \geq a_1$$

$$x_2 \geq a_2 > a_1 > x_1$$

$$a_2 > x_2 > x_1 \geq a_1$$

$$a_2 > x_2 \geq a_1 > x_1$$

$$a_2 > a_1 > x_2 > x_1.$$

Öll tilfellin eru gerð á svipaðan hátt og það fyrsta.

Með þessa reglu getum við loks sett fram mikilvæga reglu.

Setning 25.2.5 Látum $I, J \subset \mathbb{R}$ vera bil.

Gerum ráð fyrir að $f : I \rightarrow J$ sé samfelld og gagntækt.

Þá er andhverfa fallsins f einnig samfelld.

Sönnum þetta

Látum $f^{-1} : J \rightarrow I$ vera andhverfu fallsins f .

Sýna þarf að f^{-1} sé samfelld í sérhverjum punkti mengisins J .

Við latum duga að sanna að f^{-1} sé samfelld í öllum punktum y_0 í J sem eru ekki endapunktur J . Endapunktarnir eru gerðir á mjög svipaðan hátt.

Skv. reglunni á undan þá er f annaðhvort stranglega vaxandi eða stranglega minnkandi.

Við skulum gera ráð fyrir að það sé stranglega vaxandi en hitt tilfellið er gert á mjög svipaðan hátt.

Þar sem f er stranglega vaxandi þá er andhverfan f^{-1} einnig stranglega vaxandi.

Látum $y_0 \in J$ vera punkt sem er ekki endapunktur bilsins J .

Þar sem f er gagntækt þá er til stak $x_0 \in I$ þannig að $f(x_0) = y_0$. En þá er skv. skilgreiningunni á andhverfu $f^{-1}(y_0) = x_0$.

Látum $\varepsilon > 0$.

Við þurfum að sýna að til sé $\delta > 0$ þannig að $|y - y_0| < \delta$ hafi í för með sér að $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$.

Þar sem f er stranglega vaxandi þá vitum við að $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$.

Setjum $\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\}$.

Þá er $f(x_0 - \varepsilon) \leq f(x_0) - \delta$ og $f(x_0) + \delta \leq f(x_0 + \varepsilon)$.

Því fæst ef $f(x_0) - \delta < y < f(x_0) + \delta$ að $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$.

Nú er f^{-1} stranglega vaxandi og munnum að $f(x_0) = y_0$ svo að þetta gefur að ef

$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$ þá er $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$.

Munum einnig að $x_0 = f^{-1}(y_0)$ svo að ef

$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$ þá er $f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$.

En þetta jafngildir að

$|y - y_0| < \delta$ hafi í för með sér að $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$.

25.3 Þekkt samfelld föll

Nú skulum við telja upp föll nokkur föll sem við þekkjum og eru samfelld.

Setning 25.3.1 1. Fallið $f(x) = x$ er samfelld.

2. Sérhver margliða er samfelld.

3. Sérhvert rætt fall er samfelld á skilgreiningarmengi sínu.
4. Fyrir allar náttúrulegar tölur n þá er fallið $f(x) = \sqrt[n]{x}$ samfelld.
5. Ef að $r \in \mathbb{Q}$ er ræð tala þá er fallið $f(x) = x^r$ samfelld.
6. Ef að $s \in \mathbb{R}$ er rauntala þá er fallið $f(x) = x^s$ samfelld.
7. Vísisföll eru samfelld.
8. Lograr eru samfelldir.
9. Hornaföllin eru samfelld.
10. Andhverfur hornafallana eru samfelld.
11. fallið $f(x) = |x|$ er samfelld.

Sönnunum þetta eftir bestu getu

1. Látum $c \in \mathbb{R}$ vera einhverja rauntölu.
Látum $\varepsilon > 0$.
Látum $\delta = \varepsilon$.
Þá fæst ef að $|x - c| < \delta$ að $|f(x) - f(c)| < |x - c| < \delta = \varepsilon$.
2. Skv. kaflanum á undan þá er summa og margfeldi samfelldra falla samfelld. Margliða er ekkert nema fallið x margfaldað við fasta og sjálft sig endanlega oft, því sést að sérhver margliða er samfelld.
3. Skv. kaflanum á undan þá er f/g samfelld ef að f og g eru samfelld og $g(x) \neq 0$ fyrir sérhvert x . Við getum því sagt að f/g sé samfelld alls staðar sem að það er skilgreint. Rætt fall er ekkert nema kvóti margliða svo að við getum sagt að rætt fall sé samfelld þar sem það er skilgreint.
4. Fallið x^n er samfelld fyrir allar náttúrulegar tölur n skv. lið númer tvö. Skv. kaflanum á undan er andhverfa þessa falls þá einnig samfelld, það er að segja fallið $\sqrt[n]{x}$ er samfelld.
5. Þar sem r er ræð tala þá eru til heilar tölur p og q þannig að $r = p/q$.
Skv. liðum tvö og fjögur þá eru föllin $f(x) = x^p$ og $g(x) = \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$ samfelld.
Skv. kaflanum á undan er þess vegna fallið $f \circ g(x) = x^{\frac{p}{q}} = x^r$ samfelld
6. Í þessari bók er ekki búið að leggja nógu góðan grunn til þess að sýna þessa reglu.
7. heldur ekki þessa reglu.
8. Lograr eru andhverf vísisfalla og eru því samfelldir skv. lið númer sjö og reglu í kaflanum á undan.
9. Ekki sannað hér.
10. Fæst af lið númer nú.

11. Látum $\varepsilon > 0$ og setjum $\delta = \varepsilon$, þá fæst ef að $|x - c| < \delta$ að $|f(x) - f(c)| = ||x| - |c|| < |x - c| < \delta = \varepsilon$.
 Hér var tilvik af þríhyrningsjöfnunni notað.

25.4 Nokkur dæmi

Dæmi 25.4.1. Notið milligildissetningu til þess að sýna að margliðan

$$p(x) = x^7 + 3x + 1$$

hafi núllstöð á bilinu $] -1, 0[$.

Lausn:

Við sjáum að $p(0) = 1 > 0$ og $p(-1) = -3 < 0$.

Nú eru margliður samfelld föll svo að hér er hægt að nota milligildissetningu sem seggir að þar sem $p(0) > 0$ og $p(-1) < 0$ þá er til tala $c \in] -1, 0[$ sem er þannig að $p(c) = 0$.

Dæmi 25.4.2. Palli er að rannsaka fallið

$$R(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Hann reiknar út að $R(\frac{1}{2}) = \frac{-2}{3} < 0$ og að $R(2) = \frac{2}{3} > 0$.

Palli beitir næst milligildissetningunni og kemst að þeirri niðurstöðu að fallið R hafi einhverja núllstöð á bilinu $]1/2, 2[$.

Í raun hefur Palli rangt fyrir sér. Hver er villan í rökstuðningi Palla.

Lausn:

Fallið $R(x)$ er ekki skilgreint í punktinum $x = 1$. Sér í lagi er það ekki samfellt í þessum punkti. Hér er því ekki hægt að nota milligildissetningu sem krefst þess að fallið sé samfellt.

Dæmi 25.4.3. Útskýrið í stuttu máli með orðum hvort eftirfarandi föll eru samfelld eða ekki.

(a)

$$f(x) = |x| + \cos(x^3).$$

(b)

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{ef } x \leq 0, \\ 1 & \text{ef } x > 0. \end{cases}$$

(c)

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{ef } x \leq 0, \\ x^2 & \text{ef } x > 0. \end{cases}$$

Lausn:

(a)

Fallið f er samsett úr föllunum $|x|$, $\cos(x)$ og x^3 sem eru öll samfelld föll. Þess vegna er f samfelld.

(b)

Í punktinum $x = 0$ tekur fallið g stökk frá því að vera jafnt mínus einum í það að vera jafnt einum. Fallið er þess vegna ósamfelld í þeim punkti.

(c)

Föllin $\sin(x)$ og x^2 eru bæði samfelld. Fallið h er því samfelld í öllum punktum nema kannski núllpunktinum.

Nú er þekkt að $0^2 = 0$ og $\sin(0) = 0$.

Fallið h stefnir þá á töluna núll í $x = 0$ hvort sem að við nálgumst punktinn hægra eða vinstra megin frá. Fallið h er því samfelld í núllpunktinum, og við höfum þá rökstutt að það er samfelld allstaðar.

Dæmi 25.4.4. Fyrir einhverja tölu $x \in]0, 1[$ látum þá $x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$ tákna venjulega tugakerfisframsetningu hennar.

(Hér er krafist þess að tugaframsetning tölunnar endi ekki á óendanlega mörgum níum þ.e.a.s. að ekki sé til N þannig að $x_n = 9$ fyrir öll $n > N$)

Til dæmis ef $x = 1/7 = 0,142857\dots$ þá er $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 8$ og svo framvegis.

Við skulum nú skilgreina fall $C :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ með

$$C(x) = \begin{cases} 1 & \text{ef tölustafurinn 3 kemur fram í tugakerfisframsetningunni á töllunni } x \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Til að skýra þetta fall betur skulum við taka dæmi um hvernig skal reikna úr því.

Skoðum til dæmis töluna $3/\pi = 0,9549296585513\dots$

Hér kemur tölustafurinn þrír fyrir í þrettánda aukastaf tölunnar svo að $C(3/\pi) = 1$.

Skoðum næst töluna $1/9 = 0,11111111\dots$

Hér kemur tölustafurinn þrír aldrei fram sem aukastafur heldur munu bara koma endalaust margir ásar. Þess vegna er $C(1/9) = 0$.

(a)

Sýnið að fallið C er samfelld í punktinum $x = 7/11$.

(b)

Sýnið að fallið C er ósamfelld í punktinum $x = 1/9$.

(c)

Sýnið að fallið C er ósamfelld í punktinum $x = 3/10$.

Lausn:

(a)

Athugum fyrst að $C(7/11) = C(0,63636363\dots) = 1$ því að þrír kemur til dæmis fyrir í öðrum aukastaf tölunnar.

Látum $\varepsilon > 0$. Við þurfum að sýna að til sé δ þannig að $|x - 7/11| < \delta$ hafi í för með sér að $|C(x) - 1| < \varepsilon$.

Setjum $\delta = 0,001$.

Tökum eftir því að $7/11 - \delta = 0,63536363\dots$ og $7/11 + \delta = 0,63736363\dots$

Við sjáum að ef $7/11 - \delta \leq x < 7/11 + \delta$ þá mun annar aukastafur tölunnar x vera þrír svo að $C(x) = 1$.

Með öðrum orðum ef $|x - 7/11| < 0,001$ þá fæst $|C(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$.

Svo að C er samfelld í punktinum $7/11$.

(b)

Athugum fyrst að $C(1/9) = C(0,11111\dots) = 0$ því að þrír kemur hvergi fyrir sem aukastafur tölunnar.

Skoðum fallgildin í nokkrum vel völdnum tölum sem eru nálægt tölunni $1/9$.

$$C(1/9 + 0,2) = C(0,31111\dots) = 1$$

$$C(1/9 + 0,02) = C(0,13111\dots) = 1$$

$$C(1/9 + 0,002) = C(0,11311\dots) = 1.$$

$$C(1/9 + 0,0002) = C(0,11131\dots) = 1 \text{ o.s.fr.}$$

Við tökum eftir að fyrir allar náttúrulegar tölur n mun $C(1/9 + 2 \cdot 10^{-n}) = 1$.

Við sjáum þá að $|C(1/9 + 2 \cdot 10^{-n}) - C(1/9)| = 1$ fyrir allar náttúrulegar tölur n .

Þ.e.a.s. sama hversu nálægt tölunni $1/9$ við förum á þennan hátt þá verður munurinn á fallgildunum alltaf einn.

C er þess vegna ósamfelld í punktinum $x = 1/9$.

(c)

Athugum fyrst að $C(3/10) = C(0,3000\dots) = 1$.

Skoðum fallgildin í nokkrum vel völdum tölum sem eru nálægt tölunni $3/10$.

$$C(3/10 - 0,01) = C(0,29000\dots) = 0$$

$$C(3/10 - 0,001) = C(0,2990000\dots) = 0$$

$$C(3/10 - 0,0001) = C(0,2999000\dots) = 0$$

o.s.fr.

Við tölum eftir að fyrir allar náttúrulegar tölur n mun $C(3/10 - 10^{-n}) = 0$.

Við sjáum þá að $|C(3/10 - 10^{-n}) - C(3/10)| = 1$ fyrir allar náttúrulegar tölur n .

Þ.e.a.s. sama hversu nálægt tölunni $3/10$ við förum á þennan hátt þá verður munurinn á fallgildunum alltaf einn.

C er þess vegna ósamfelld í punktinum $x = 3/10$.

26 Deildun

26.1 Skýringardæmi

Áður en við skilgreinum *afleiðu* falls skulum við taka dæmi til þess að reyna að útskýra hver hugmyndin er.

Við skulum hugsa okkur bíl í spyrnukeppni á 500 metra braut.

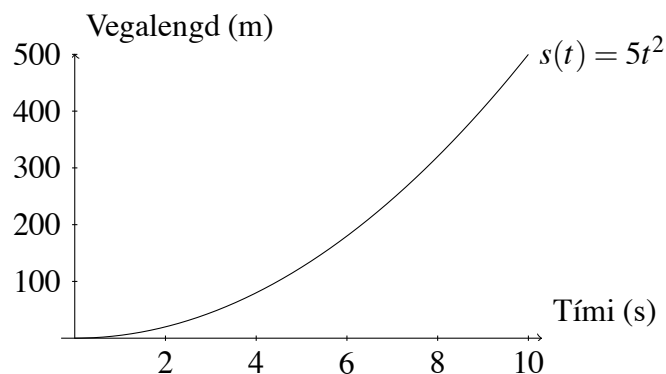
Áður en bíllinn fer af stað er sett í hann nákvæmt staðsetningartæki sem getur teiknað upp graf sem lýsir staðsetningu hans á brautinni miðað við tímann sem er liðinn frá upphafi spyrnunnar.

Bíllinn fer af stað og keyrir brautina á nákvæmlega tíu sekúndum.

Eftir keppnina þá er staðsetningartækið skoðað og það sýnir að staðsetningu bílsins sem fall af tíma megi lýsa með formúlunni

$$s(t) = 5t^2$$

þar sem $t \in [0, 10]$ táknar tímann sem var liðinn frá upphafi spyrnunnar mældur í sekúndum og $s(t)$ er vegalengdin sem bíllinn var búinn að keyra mæld í metrum.



Þessi formúla seggir okkur til dæmis að eftir fjórar sekúndur var bíllinn búinn að keyra 80 metra því að $5 \cdot 4^2 = 80$ og eftir átta sekúndur var bíllinn búinn að keyra 320 metra því að $5 \cdot 8^2 = 320$.

Eins og við má búast er $s(0) = 0$ sem þýðir að eftir núll sekúndur stóð bíllinn ennþá óhreyfður og $s(10) = 500$ sem er í samræmi við það að bíllinn hafi keyrt brautina sem var 500 metrar á tíu sekúndum.

Úr formúlunni er þó hægt að fá meiri upplýsingar heldur en bara staðsetningu bílsins. Til dæmis dugar þessi formúla til þess að reikna út hraða bílsins í sérhverjum tímapunkti.

Við skulum nú fara í gegnum það hvernig það er gert.

Við skulum reikna út nákvæman hraða bílsins þegar fjórar sekúndur voru liðnar.

Athugum að *meðalhraði* bílsins yfir ákveðið tímabil er skilgreint sem vegalengdin sem bíllinn fer á því tímabili deilt með lengdinni á tímabilinu.

Þannig var t.d. meðalhraði bílsins okkar í allri spyrnunni 50 metrar á sekúndu því að hann fór 500 metra á 10 sekúndum og $500/10 = 50$.

Áður en við getum reiknað út nákvæman hraða bílsins á tímanum $t = 4$ þurfum við að reikna út meðalhraða bílsins á nokkrum vel völdum tímabilum.

- Skoðum fyrst meðalhraða bílsins á tímabilinu frá fjórum upp í átta sekúndur.
Á sekúndu átta er bíllinn kominn $5 \cdot 8^2 = 320$ metra.
Á sekúndu fjögur er bíllinn kominn $5 \cdot 4^2 = 80$ metra.
Vegalengdin sem hann færir á tímabilinu frá fjórum upp í átta sekúndur er þá $320 - 80 = 240$ metrar.
Lengdin á þessu tímabili er fjórar sekúndur.
Meðalhraði bílsins á tímabilinu frá fjórum upp í átta sekúndur er þá

$$\frac{240}{4} = 60 \text{ m/s.}$$

- Skoðum næst meðalhraða bílsins frá fjórum upp í sex sekúndur. Vegalengdin sem hann færir á því tímabili er $5 \cdot 6^2 - 5 \cdot 4^2 = 100$ metrar.
Lengdin á tímabilinu er $6 - 4 = 2$ sekúndur.
Meðalhraði bílsins er þá

$$\frac{100}{2} = 50 \text{ m/s.}$$

- Skoðum meðalhraða bílsins frá fjórum upp í fimm sekúndur.
Hann er

$$\frac{5 \cdot 5^2 - 5 \cdot 4^2}{5 - 4} = \frac{45}{1} = 45 \text{ m/s.}$$

- Meðalhraði bílsins frá fjórum sekúndum upp í fjórar og hálfa sekúndu er

$$\frac{5 \cdot 4,5^2 - 5 \cdot 4^2}{4,5 - 4} = \frac{21,25}{0,5} = 42,5 \text{ m/s.}$$

- Meðalhraði bílsins frá fjórum sekúndum upp í 4,25 sekúndur er

$$\frac{5 \cdot 4,25^2 - 5 \cdot 4^2}{4,25 - 4} = \frac{10,3125}{0,25} = 41,25 \text{ m/s.}$$

Núna geta glöggir nemendur kannski áttað sig á því hvað er að fara að gerast.

Með því að stytta tímabilið meira og meira þá verður meðalhraðinn nær og nær raunverulega hraðanum í tímanum $t = 4$.

Þetta er farið að líkjast því að taka markgildi.

Almennt gildir að meðalhraði bílsins frá fjórum sekúndum upp í t sekúndur er

$$\frac{5t^2 - 5 \cdot 4^2}{t - 4}.$$

Þegar við stytum tímabilið meir og meir þá erum við í raun að láta töluna t hér að ofan stefna á fjóra.

Þess vegna fáum við að nákvæmur hraði bílsins á tímanum $t = 4$ er

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 4} \frac{5t^2 - 5 \cdot 4^2}{t - 4} &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{5(t^2 - 4^2)}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{5(t+4)(t-4)}{t-4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{5(t+4)}{1} = \frac{5(4+4)}{1} = 40. \end{aligned}$$

Það er að segja, nákvæmur hraði bílsins þegar akkúrat fjórar sekúndur eru liðnar er 40 metrar á sekúndu.

Hér fór mikið þúður í það að reikna út hraða bílsins á einum tímapunkti.

Segjum að við viljum reikna út hraða bílsins í hundrað mismunandi tímapunktum, þá yrði þreitandi að þurfa að reikna út hundrað mismunandi markgildi.

Skynsamlegra væri að reyna að finna út nákvæma formúlu sem gefur upp hraða bílsins á sérhverjum tíma. Það er hægt!

Til þess að reikna út hraða bílsins á tímanum $t = 4$ þá þurftum við að reikna út markgildið

$$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{5t^2 - 5 \cdot 4^2}{t - 4}.$$

Ef hinsvegar við viljum reikna út hraða bílsins á einhverjum öðrum tíma $t = t_0$ þá þarf ekkert að gera nema reikna út markgildið

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{5t^2 - 5 \cdot t_0^2}{t - t_0}.$$

En þetta er eitthvað sem að við getum reiknað út almennt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{5t^2 - 5 \cdot t_0^2}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{5(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{5(t+t_0)(t-t_0)}{t-t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{5(t+t_0)}{1} = \frac{5(t_0+t_0)}{1} = 10t_0. \end{aligned}$$

Við höfum séð að á tímanum $t = t_0$ þá er hraði bílsins $10t_0$ m/s.

Með öðrum orðum þá má lýsa hraða bílsins af tíma með fallinu sem gefið er með formúlunni

$$v(t) = 10t.$$

Af þessu má lesa að hraði bílsins á sekúndu fjögur er $4 \cdot 10 = 40$ m/s og hraði bílsins á sekúndu átta er $8 \cdot 10 = 80$ m/s.

Munum að bíllinn byrjar kyrrstæður svo það kemur ekki á óvart að $v(0) = 0$ sem má túlka sem svo að hraði bílsins á sekúndunni núll sé núll.

Aðferðin sem hér var notuð kallast *deildun* (*diffnun*).

Þessi aðferð er ekki bundin við þetta einstaka fall, heldur má gera þetta almennt. Segjum að hraði bílsins hafi verið gefinn með einhverju örðu falli $k(t)$.

Hraði bílsins í tímapunktinum $t = t_0$ verður þá fundinn með því að reikna markgildið

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{k(t) - k(t_0)}{t - t_0}.$$

26.2 Skilgreining á afleiðu

Setjum fram formlega skilgreiningu á afleiðu

Skilgreining 26.2.1. Gerum ráð fyrir að $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sé fall sem er skilgreint á bili I . Látum $a \in I$.

Fallið f er sagt vera deildanlegt (diffnanlegt) í punktinum a ef að markgildið

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

er skilgreint og jafnt einhverri rauntölu, (Ekki plús eða mínus óendanlegt.)

Þessi rauntala er táknuð með $f'(a)$ og kallast afleiða fallsins f í punktinum a .

Ef fallið f er deildanlegt í sérhverjum punkti bilsins I þá segjum við að f sé deildanlegt (diffnanlegt) fall á I og þá er afleiðan f' fall á I .

Aðgerðin að finna afleiðu kallast deldun (diffnun).

26.3 Hallatölur og snertlar

Í skýringardæminu að ofan þá gáfum við okkur fall s sem lýsti staðsetningu bíls sem fall af tíma. Afleiða fallsins s var þá túlkuð sem hraði bílsins.

Í raun er hægt að túlka afleiðu falls töluvert almennar.

Segjum að fall $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sé gefið og að $a \in I$.

Ef að afleiða fallsins f í punktinum a er skilgreind þá er algengast að túlka tölunna $f'(a)$ sem *hallatölu* fallsins f í punktinum a .

Þ.e.a.s. talan $f'(a)$ lýsir því hversu mikið fallið hallar í punktinum a .

Til að skýra þessa túlkun betur er best að skilgreina *snertil* falls fyrst

Skilgreining 26.3.1. Látum $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall skilgreint á bili I og látum $a \in I$.

Ef að afleiða fallsins f í punktinum a er skilgreint þá köllum við línuna sem er gefin með jöfnunni

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

snertil fallsins f í punktinum a .

Snertill falls f í punkti a er sú beina lína sem fer í gegnum punktinn $(a, f(a))$ og sem að í vissum skilningi liggur sem best uppáð fallinu í þessum punkti.

Til að fá betri tilfinningu fyrir þessu skulum við teikna upp fallið

$$s(x) = 5 \cdot x^2$$

ásamt snertli þess í punktinum $x = 4$.

Búið var að reikna að $s(4) = 80$ og $s'(4) = 40$.

Jafna snertilsins fæst þá með formúlunni

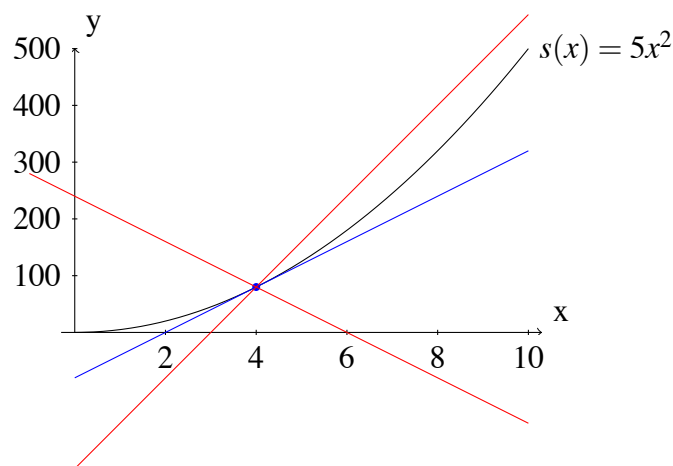
$$y = s(4) + s'(4)(x - 4) = 80 + 40(x - 4)$$

sem einfaldast í

$$y = 40x - 80.$$

Til hliðar má sjá mynd af fallinu sjálfu ásamt snertli þess sem er litaður blár. Flestir ættu að geta verið sammála um að snertillinn liggur vel uppáð fallinu.

Til samanburðar er búið að teikna tvær rauðar línur í gegnum sama punkt sem liggja ekki vel uppáð fallinu. Fleiri myndu segja að þær liggi í gegnum fallið.



26.4 Reglur um deildun

Um deildun gilda nokkrar mikilvægar reglur.

Setning 26.4.1 Gerum ráð fyrir að f, g séu deildanleg föll á $\mathbb{R}$.

Látum $a \in \mathbb{R}$ vera fasta.

Þá gildir:

1. $(a \cdot f)' = af'$
2. $(f + g)' = f' + g'$
3. $(f - g)' = f' - g'$
4. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

$$5. (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Ef að $g(x)$ er ekki jafnt núlli fyrir öll $x \in I$, þá gildir einnig

$$6. \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

$$7. \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Ef að f er andhverfanlegt gildir einnig

8. Ef $f(x_0) = y_0$ þá er

$$(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}$$

Athugasemd:

Í reglunni er tekið fram að f og g ættu að vera deildanleg á öllu $\mathbb{R}$. Það er gert til að einfalda framsetninguna á reglunni. Í raun gilda þessar reglur fyrir öll deildanleg f og g þar sem að stæðurnar vinstra megin jafnaðarmerkisins eru vel skilgreindar.

Sönnum þetta

1. Fyrir sérhvert x_0 þar sem f er diffranlegt gildir

$$(af)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(af)(x) - (af)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{af(x) - af(x_0)}{x - x_0} = a \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = af'(x_0).$$

2. Fyrir sérhvert x_0 þar sem f og g eru diffranleg gildir

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

3. Hér notum við liði eitt og tvö

$$(f-g)' = (f+(-g))' = f' + (-g)' = f' + (-1) \cdot g' = f' - g'.$$

4. Fyrir sérhvert x_0 þar sem f og g eru diffranleg gildir

$$\begin{aligned} (fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

5. Fyrir sérhvert x_0 þannig að g sé difffranlegt í x_0 og f sé difffranlegt í $g(x_0)$ þá gildir.

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(g(x)) - f(g(x_0)))(g(x) - g(x_0))}{(x - x_0)(g(x) - g(x_0))} \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(g(x)) - f(g(x_0)))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).\end{aligned}$$

6. Fyrir sérhvert x_0 þar sem g er difffranlegt gildir

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1/g(x)) - (1/g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g(x_0) - g(x))/(g(x)g(x_0))}{x - x_0} \\&= \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)}\right) \cdot \left(-\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) = \frac{1}{g^2(x_0)} \cdot (-g'(x_0)) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}\end{aligned}$$

7. Hér verða liðir fimm og sex notaðir

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} - f \frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

8. Athugum fyrst að ef $h(x) = x$ þá fæst

$$h'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Skv. skilgreiningu á andhverfu þá er

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

Deildum nú sitthvoru megin jafnaðarmerkis, við notum lið fimm til að deilda vinstra megin. Við fáum

$$((f^{-1})' \circ f)(x) \cdot f'(x) = 1$$

eða

$$((f^{-1})' \circ f)(x) = \frac{1}{f'(x)}.$$

26.5 Náttúrulega veldisvísisfallið

Áður en lengra er haldið í deildun er nauðsynlegt að kynna nýja tölu til sögunnar sem að er gríðarlega mikilvæg í deildunarreikningi. Hún kemur fram í eftirfarandi reglu.

Setning 26.5.1 Til er fall f skilgreint á öllu $\mathbb{R}$ þannig að $f(0) = 1$ og $f' = f$. Þetta fall er vísisfall, svo að til er jákvæð rauntala, e þannig að $f(x) = e^x$

Sönnunin á þessari reglu er allt of tæknileg til þess að fara í hana hér.

Alveg eins og talan π þá er talan e óræð sem þýðir að ekki eru til heiltölur p og q þannig að $e = p/q$. Til að fá einhverja tilfinningu fyrir henni þá er best að skrifa upp nokkra fyrstu aukastafi hennar.

$$e = 2,718281828459045\dots$$

Munum að sérhvert vísisfall á sér andhverfu sem að er kölluð logri.

Fyrir eitthvað vísisfall a^x þá er andhverfa hennar táknuð með $\log_a(x)$, nema þegar $a = 10$, þá er yfirleitt skrifað bara $\log(x)$.

Talan e er þó talin svo sérstök í stærðfræðinni að andhverfa fallsins e^x er vanalega ekki táknuð með $\log_e(x)$ heldur fær hún sér tákn:

Skilgreining 26.5.1. Fallið e^x á sér andhverfu sem að er táknuð með $\ln(x)$.
Þetta fall er kallað náttúrulegri logrinn.

26.6 Deildun þekktra falla

Nú skulum við deilda nokkur þekkt föll.

Setning 26.6.1 1. Ef að a er fasti og $f(x) = a$ þá er $f'(x) = 0$.

2. Ef $n \in \mathbb{N}$ og $f(x) = x^n$ þá er $f'(x) = nx^{n-1}$.

3. Ef $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ og $f(x) = x^n$ þá er $f'(x) = nx^{n-1}$.

4. Ef $n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ og $f(x) = x^n$ þá er $f'(x) = nx^{n-1}$.

5. Ef $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ og $f(x) = x^n$ þá er $f'(x) = nx^{n-1}$.

6. Ef $a \in \mathbb{R}_+$ og $f(x) = a^x$ þá er $f'(x) = \ln(a)a^x$.

7. Ef $a \in \mathbb{R}_+$ og $f(x) = \log_a(x)$ þá er $f'(x) = \frac{1}{\ln(a)x}$.

8. Ef $f(x) = \sin(x)$ þá er $f'(x) = \cos(x)$.

9. Ef $f(x) = \cos(x)$ þá er $f'(x) = -\sin(x)$.

10. Ef $f(x) = \tan(x)$ þá er $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

11. Ef $f(x) = \cot(x)$ þá er $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$.

12. Ef $f(x) = \text{Arcsin}(x)$ þá er $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. Ef $f(x) = \text{Arccos}(x)$ þá er $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. Ef $f(x) = \text{Arctan}(x)$ þá er $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

15. Ef $f(x) = \text{Arccot}(x)$ þá er $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

Sönnum þetta

1. Ef $f(x) = a$ þá fæst fyrir sérhvert $x_0 \in \mathbb{R}$ að

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a - a}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0.$$

2. Til að gera táknmálið skiljanlegra munum við endurskýra fallið og setja $f_n(x) = x^n$ fyrir öll n .

Reglan segir nú að $f'_n(x) = nx^{n-1}$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

Notum þrepun til þess að sýna þetta.

Sýnum fyrst að reglan er sönn þegar $n = 1$.

$$f'_1(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 = 1 \cdot x^0$$

svo reglan er sönn fyrir $n = 1$.

Gerum næst ráð fyrir að reglan sé sönn fyrir eitthvað n og sýnum að hún sé sönn fyrir $n + 1$. Þ.e.a.s. við gerum nú ráð fyrir að $f'_n(x) = nx^{n-1}$.

Með því að nota regluna fyrir deildun margfeldi falla fáum við nú

$$f'_{n+1}(x) = (f_n \cdot f_1)'(x) = f'_n(x)f_1(x) + f_n(x)f'_1(x)$$

$$nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n.$$

Við fáum því að reglan er sönn fyrir sérhvert $n \in \mathbb{N}$.

3. Höldum áfram að nota táknmálið $f_n(x) = x^n$.

Tökum eftir því að fyrir öll n þá er

$$f_n = \frac{1}{f_{-n}}$$

Í lið tvö höfum við nú þegar sýnt að niðurstaðan er rétt ef $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ er jákvæð. Við skulum því gera ráð fyrir að n sé neikvæð.

Fyrst n er neikvæð þá er $-n$ jákvæð.

Þá fæst með því að nota liðinn á undan og regluna um deildun á deilingu falla að

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \left(\frac{1}{f_{-n}} \right)'(x) = \frac{-f'_{-n}(x)}{(f_{-n}(x))^2} = \frac{-(-n)x^{-n-1}}{(x^{-n})^2} \\ &= \frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{-n-1-(-2n)} = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

4. Þar sem $n \in \mathbb{Q}$ þá eru til heiltölur p og q þannig að $n = \frac{p}{q}$.

Við munum nú skrifa $f_{p/q}(x) = x^{p/q}$.

Sýnum fyrst að reglan er sönn ef $p = 1$ þ.e.a.s. fyrir fall af gerðinni $f_{1/q} = x^{1/q}$.

Við vitum að fallið $f_{1/q}$ er andhverfa fallsins $f_q(x)$. Nú notum við regluna um deildun á andhverfu til þess að fá

$$(f'_{1/q} \circ f_q)(x) = \frac{1}{f'_q(x)}$$

sama hlutinn er hægt að skrifa sem

$$f'_{1/q}(f_q(x)) = \frac{1}{f'_q(x)}.$$

Nú er q heiltala svo skv. liðnum á undan er $f'_q(x) = qx^{q-1}$.
Við stingum þessu inni og fáum

$$f'_{1/q}(x^p) = \frac{1}{qx^{q-1}}$$

Með því að skipta út x fyrir $x^{\frac{1}{q}}$ í þessari jöfnu fæst

$$f'_{1/q}(x) = \frac{1}{qx^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}.$$

Svo að setningin er sönn fyrir tölur af gerðinni $n = 1/q$.
Fyrir almennt $n = \frac{p}{q}$ þá fæst

$$\begin{aligned} f'_{p/q}(x) &= (f_p \circ f_{1/q})'(x) = (f'_p \circ f_{1/q})(x) \cdot f'_{1/q}(x) = f'_p(f_{1/q}(x)) \cdot f'_{1/q}(x) \\ &= f'_p(x^{\frac{1}{q}}) \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = px^{\frac{p-1}{q}} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}. \end{aligned}$$

5. Þessi regla verður ekki sönnuð hér.

6. Hér notum við regluna sem var sett fram ósönnuð að ofan, nefnilega þá reglu að ef $g(x) = e^x$ þá er $g' = g$.

Látum nú $h(x) = \ln(a)x$ og $f(x) = a^x$.

Þá sést að $f(x) = g \circ h(x)$ svo að

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g \circ h)'(x) = (g' \circ h)(x) \cdot h'(x) = g'(h(x))h'(x) = g(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= (g \circ h)(x) \cdot h'(x) = f(x) \cdot h'(x) = a^x \cdot \ln(a) \end{aligned}$$

7. Sýnum þetta fyrst fyrir nátturulegra logrann $\ln$, athugum að $\ln(e) = 1$ skv. skilgreiningu.

Setjum $f(x) = \ln(x)$ þá er $f^{-1}(x) = e^x$ og því einnig $(f^{-1})'(x) = e^x$.

Þá fæst skv reglu um deildun á andhverfu að

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

og þar sem $(f^{-1})'(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ fæst

$$x = \frac{1}{f'(x)}$$

eða

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Til að sýna þetta fyrir almennan logra $\log_a(x)$ þurfum við að rifja upp lograreglu sem segir að

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

en þá fæst

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \right)' = \frac{1}{\ln(a)x}.$$

8. Hér verður notuð hornafallaregla sem segir að

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin((x-y)/2) \cdot \cos((x+y)/2).$$

Einnig verður nast við þekkta markgildið

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

en sýnt var fram á þetta í kaflanum um markgildi.

Nú fáum við

$$\sin'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin((x-x_0)/2) \cos((x+x_0)/2)}{x - x_0}.$$

Setjum nú $h = \frac{x-x_0}{2}$.

Þá er $x = 2h + x_0$ og $\frac{x+x_0}{2} = \frac{2h+2x_0}{2} = h + x_0$.

Tökum einnig eftir því að h stefnir á núll þá og því aðeins að x stefni á x_0 .

Við getum því breytt markgildinu og skrifað

$$\begin{aligned} \dots &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(h) \cos(h + x_0)}{2h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x_0 + h) \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \right) = \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0). \end{aligned}$$

9. Hér notum við liðinn á undan og hornafallareglurnar

$$\sin(x + \pi/2) = \cos(x) \quad \cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$$

og við fáum

$$(\cos(x))' = (\sin(x + \pi/2))' = \cos(x + \pi/2) = -\sin(x).$$

10. Hér notum við skilgreininguna á tangens

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

hornafallaregluna

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

og reglu um deildun á deilingu falla til þess að fá:

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos} \right)'(x) = \frac{\sin' \cdot \cos - \sin \cdot \cos'}{\cos^2}(x) = \frac{\cos \cdot \cos - \sin \cdot (-\sin)}{\cos^2}(x) \\ &= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}(x) = \frac{1}{\cos^2}(x). \end{aligned}$$

11.

$$\cot'(x) = \left(\frac{\cos}{\sin} \right)'(x) = \frac{-\sin^2 - \cos^2}{\sin^2}(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

12. Þar sem fallið Arcsin er andhverfa fallsins $\sin$ á bilinu $[-\pi/2, \pi/2]$ þá er:

$$\text{Arcsin}'(\sin(x)) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)}. \quad (*)$$

Einangrum nú $\cos(x)$ útúr jöfnunni

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

og athugum að kósínusinn er alltaf jákvæður á bilinu $[-\pi/2, \pi/2]$ og fáum þess vegna

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}.$$

Stingum þessu inni jöfnuna (*) og fáum

$$\text{Arcsin}'(\sin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}}.$$

Með því að skipta $\sin(x)$ út fyrir x fæst að lokum

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

13. Mjög svipað og liðurinn á undan.

14. Þar sem Arctan er andhverfa fallsins $\tan(x)$ á bilinu $[-\pi/2, \pi/2]$ þá er

$$\text{Arctan}'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \cos^2(x). \quad (*)$$

Athugum að

$$\frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = \cos^2(x).$$

Stingum þessu inni jöfnuna (*) og fáum

$$\text{Arctan}'(\tan(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$$

skiptum út $\tan(x)$ fyrir x og fáum

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

15. Mjög svipað og liðurinn á undan.

Dæmi 26.6.1. Finnið afleiður eftirfarandi falla:

(a)

$$f(x) = \cos(\ln(x)).$$

(b)

$$g(x) = 3^x \cdot \text{Arctan}(x^5).$$

(c)

$$h(x) = \cos^4(x^2 + 3).$$

Lausn:

(a)

Hér notum við reglu um deildun á samsetningu falla

$$f'(x) = -\sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\sin(\ln(x))}{x}.$$

(b)

Regla um deildun á margfeldi falla gefur

$$\begin{aligned} g'(x) &= \ln(3)3^x \operatorname{Arctan}(x^5) + 3^x \cdot \frac{1}{1+(x^5)^2} \cdot 5x^4 \\ &= \ln(3) \cdot 3^x \operatorname{Arctan}(x^5) + \frac{5x^4 \cdot 3^x}{1+x^{10}}. \end{aligned}$$

(c)

$$h'(x) = 4 \cdot \cos^3(x^2 + 3) \cdot 2x = 8x \cos^3(x^2 + 3).$$

27 Ýmsar afleiður, snertlar, keðjuregla og hornaföll

27.1 Keðjureglan og hornaföll

Keðjureglan var sönnuð í kaflanum um deildun. Við skulum setja hana aftur fram hérna

Setning 27.1.1 Látum $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ og $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ vera deildanleg föll á bilunum I og J sem eru þannig að $g(J) \subseteq I$. Þá er fallið $f \circ g$ deildanlegt og

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Afleiður hornafallanna voru leiddar út í kaflanum um deildun

Setning 27.1.2 • $\cos'(x) = -\sin(x)$

• $\sin'(x) = \cos(x)$

• $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

• $\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$

28 Notkun á afleiðum - hágildi og lággildi

28.1 Hágildi og lággildi

Hugsum okkur fall $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ skilgreint á einhverju bili I .

Skilgreiningin á hágildi fallsins f er frekar nátturuleg, fallið f er einfaldlega sagt taka hágildi í punktinum þar sem það er stærst.

Skilgreiningin á staðbundnu hágildi er aðeins tæknilegri. Fallið f er sagt hafa staðbundið hágildi í einhverjum punkti c ef hægt er að finna minna bil $J \subset I$ í kringum c þannig að stærsta gildi f á bilinu J sé í punktinum c . Lággildi og staðbundið lággildi er skilgreint svipað.

Útgildispunktur eru þeir punktar kallaðir sem eru annað hvort hágildis- eða lággildispunktur.

Formlega:

Skilgreining 28.1.1. Látum $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall á einhverju bili I og $c \in I$.

- Fallið f er sagt taka hágildi í punktinum c ef að $f(c) \geq f(x)$ fyrir öll $x \in I$.
- Fallið f er sagt taka lággildi í punktinum c ef að $f(c) \leq f(x)$ fyrir öll $x \in I$.
- Fallið f er sagt hafa staðbundið hágildi í punktinum c ef til er bil $J \subset I$ þannig að $c \in J$ en c er ekki endapunktur bilsins J og um öll $x \in J$ gildir að $f(c) \geq f(x)$.
- Fallið f er sagt hafa staðbundið lággildi í punktinum c ef til er bil $J \subset I$ þannig að $c \in J$ en c er ekki endapunktur bilsins J og um öll $x \in J$ gildir að $f(c) \leq f(x)$.
- Ef c er annaðhvort hágildi eða lággildi fallsins f þá segjum við að c sé útgildi fallsins f .
- Ef að c er annaðhvort staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi fallsins f þá segjum við að c sé staðbundið útgildi fallsins f .

Til skýringar skulum við teikna mynd af margliðunni

$$p(x) = \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x$$

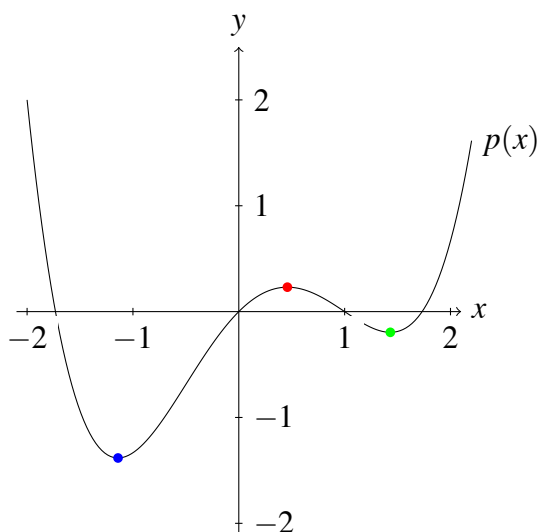
og merkja inn staðbundin hágildi og lággildi.

Myndin er teiknuð af margliðunni á bilinu $[-2, 2]$ af því að það er eini staðurinn þar sem eitthvað áhuga-vert gerist. Fallið stækkar upp í óendanleikann ef farið er lengra til vinstri eða hægri.

Margliðan hefur engan hágildispunkt því hún gerir ekkert nema að stækka og stækka í báðar áttir.

Hins vegar sést af mynd að hún tekur staðbundið hágildi á einum stað, sem merkt er á myndina með rauðum punkti.

Lággildi margliðunnar er merkt inn á mynd með bláum punkti og annað staðbundið lággildi hennar er merkt með grænum punkti.



Tökum eftir að skv. skilgreiningu þá eru hágildispunktar sér í lagi staðbundnir hágildispunktar. Eftirfarandi regla hjálpar okkur að finna þá punkta þar sem fall f tekur staðbundin útgildi.

Setning 28.1.1 Gerum ráð fyrir að f sé deildanlegt fall skilgreint á bili I .
Ef að f tekur staðbundið útgildi í c þá er $f'(c) = 0$

Taka skal sérstaklega fram að andhverfa þessarar reglu er ekki algild. Þ.e.a.s. ef að $f'(c) = 0$ þá þarf ekki að vera að f taki staðbundið útgildi í punktinum c .

Til að rökstyðja það má skoða fallið $f(x) = x^3$ sem er stranglega vaxandi og vex frá mínus óendanlegu upp í óendanlegt og hefur því engin staðbundin útgildi. Engu að síður þá er $f'(0) = 0$.

Með hjálp þessarar reglu skulum við útskýra aðferð til þess að finna hágildi og lággildi falls.

Finna skal hágildi deldanlegs falls $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sem er skilgreint á bili sem inniheldur endapunkta sína.

1. Deildið fallið f
2. Finnið alla punkta $c \in I$ þannig að $f'(c) = 0$.
Nefnum þá $c_1, c_2, \dots, c_m$.
Látum endapunkta bilsins I heita a og b
3. Reiknið út $f(c_i)$ fyrir öll i og reiknið einnig $f(a)$ og $f(b)$.
4. Nú er hágildi og lággildi fallsins f í þeim punktum þar sem útkoman var hæst og lægst.

29 Vaxandi og minnkandi föll; afleiðupróf

30 Náttúrulegi logrinn og afleiða hans

30.1 Afleiða náttúrulega lograns

Náttúrulegi logrinn $\ln: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ var skilgreindur í kaflanum um deildun sem andhverfa vísisfallsins e^x þar sem $e \approx 2,7182818\dots$ er þekktur fasti. Afleiða hans er gefin með

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

31 Afleiða andhverfu falls; veldisvísisfallið og breiðboga-föllin

31.1 Afleiða andhverfu falls og veldisvísisfallið

Reglan um afleiðu andhverfu falls var leidd út í kaflanum um deildun. Hún verður sett fram hér aftur.

Setning 31.1.1 Látum $f : I \rightarrow J$ vera andhverfanlegt og deildanlegt fall frá bili I yfir á bil J . Þá er andhverfan f^{-1} deildanleg og uppfyllir formúluna

$$(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}.$$

Í kaflanum um deildun var rætt um veldisvísisfallið e^x .

Samkvæmt skilgreiningu okkar þá er talan e sú tala þannig að veldisvísisfallið uppfylli deildajöfnunna

$$(e^x)' = e^x.$$

31.2 Breiðbogaföllin

Hér munum við skilgreina ný föll, nefnilega breiðbogaföllin.

Skilgreining 31.2.1. Breiðbogaföllin eru skilgreind með eftirfarandi formúlum

- $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

- $\coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}.$

Í raun er ekkert merkilegt að gerast í þessum skilgreiningum. Það kemur einfaldlega í ljós að föllin sem eru gefin með þessum formúlum hafa marga góða eiginleika og koma því oft upp í stærðfræði. Í staðin fyrir að þurfa að skrifa upp formúlu eins og $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ aftur og aftur ákváðu því stærðfræðingar að gefa þessum föllum sér nöfn.

Nöfnin svipa til hornafallanna því að þessi föll uppfylla margar svipaðar reglur og hornaföllin, en þó ekki alveg eins.

Setning 31.2.1 1.

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

2.

$$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$

3.

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

4.

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)$$

5.

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$$

6.

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

7.

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$

8.

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

9.

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

10.

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

11.

$$\coth'(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$$

Auðvelt er að reikna út þessar reglur beint út frá skilgreiningunum, það verður ekki gert hér.

32 Andhverfur hornafalla og afleiður þeirra

32.1 Andhverfur hornafalla og afleiður þeirra

Andhverfur hornafallanna voru skilgreindar í kaflanum um hornaföll. Hér kemur skilgreiningin aftur:

Skilgreining 32.1.1. 1. $\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$
er fallið sem uppfyllir

$$\sin(\text{Arcsin}(x)) = x \quad \text{fyrir öll } x \in [-1, 1]$$

2. $\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
er fallið sem uppfyllir

$$\cos(\text{Arccos}(x)) = x \quad \text{fyrir öll } x \in [-1, 1]$$

3. $\text{Arctan} : [-\infty, \infty] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$
er fallið sem uppfyllir

$$\tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \text{fyrir öll } x \in [-\infty, \infty]$$

4. $\text{Arccot} : [-\infty, \infty] \rightarrow [0, \pi]$
er fallið sem uppfyllir

$$\cot(\text{Arccot}(x)) = x \quad \text{fyrir öll } x \in [-\infty, \infty]$$

Hægt er að deilda þessi föll og afleiður þeirra voru leiddar út í kaflanum um deildun. Þær eru

Setning 32.1.1

•

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

•

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

•

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

33 Regla l'Hôpital

33.1 Regla l'Hôpital

Regla l'Hôpital er mjög gagnleg við að reikna út ýmis markgildi.

Setning 33.1.1 Gerum ráð fyrir að f og g séu deildanleg föll á einhverju bili I og að $c \in I$ sé punktur þannig að $f(c) = g(c) = 0$.

Þá gildir að

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Með því skilyrði að a.m.k. annaðhvort þessara markgilda sé skilgreint.