

Dæmi 33.1.1. Reiknum markgildið

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Lausn:

Hér er $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x$ Við sjáum að $f(0) = g(0) = 0$ svo að við getum notað reglu l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Athugasemd:

Í kaflanum um markgildi eyddum við mikilli orku í að reikna þetta markgildi með notkun klemmureglunnar. Ekki verður hjá því komist að gera það því að þetta markgildi er notað til þess að leiða út afleiðuna af sínusfallinu og án hennar væri ekki hægt að nota reglu l'Hôpital.

34 Óákveðin heildi

34.1 Stofnföll

Látum $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall skilgreint á einhverju bili I .

Í síðustu köflum höfum mikið rætt um aðferðir til þess að finna afleiðu fallsins f ef það er hægt og hvaða upplýsingar um fallið afleiðan gefur.

Í þessum kafla munum við í vissum skilningi gera það akkúrat öfuga við að finna afleiðu. Þ.e.a.s. við munum leita að falli F þannig að $F' = f$.

Skilgreining 34.1.1. Látum $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall skilgreint á bili I .

Ef að $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ er deildanlegt fall þannig að $F' = f$ þá segjum við að F sé stofnfall fyrir f .

Stofnfall af falli f er oft nefnt óákveðið heildi og er táknað með

$$\int f(x) dx.$$

Athugum að ef F er stofnfall fyrir f og $a \in \mathbb{R}$ er einhver rauntala, þá er fallið $F + a$ einnig stofnfall fyrir f því að

$$(F + a)' = F' + (a)' = f + 0 = f.$$

Því getum við sagt að ef að fall hefur a.m.k. eitt stofnfall þá hefur það óendanlega mörg stofnföll.

Athugum einnig að ef að G og F eru tvö mismunandi stofnföll fyrir f þá fæst

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

Af þessu leiðir að fallið $F - G$ er fastafall, þ.e.a.s. til er $C \in \mathbb{R}$ þannig að $F - G = C$ sem gefur svo $F = G + C$.

Af þessu sjáum við að ef að F er eitthvað stofnfall fyrir fallið f þá eru nákvæmlega öll stofnföll þess af gerðinni $F + C$ þar sem C er fasti.

Af þessum ástæðum þá er vaninn að skrifa

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

þar sem F er eitthvað stofnfall fyrir f .

Þekking okkar á afleiðum gerir okkur kleift að búa til langar töflur yfir stofnföll.

$f(x)$	$\int f(t)dt$	$f(x)$	$\int f(t)dt$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
xe^x	$(x-1)e^x + C$	$\ln x$	$x \ln x - x + C$
$x^n e^x$	$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$	$x^n \ln x$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\ln \left \frac{1}{\cos x} \right + C$	$\cot x$	$\ln \sin x + C$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left \frac{1}{\sin x} - \cot x \right + C$	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left \frac{1}{\cos x} + \tan x \right + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\sin^{-1} \frac{x}{a} + C$	$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$	$\sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{x} \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$	$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

35 Riemann summur og ákveðin heildi

35.1 Ákveðið heildi

Látum til að byrja með f vera fall á bili $[a, b]$ og gerum ráð fyrir að $f(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in [a, b]$. Heildi fallsins f yfir bilið $[a, b]$ á að vera flatarmál svæðisins sem afmarkast af x -ásnum, grafi f , lóðréttu línunni $x = a$ og lóðréttu línunni $x = b$. Þetta mengi er

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\}.$$

Það eru auðvelt að reikna út hvert flatarmálið er ef fallið f er af einfaldri gerð, til dæmis ef það er fasti, þrepafall, eða graf þess samanstendur endanlega mörgum línustrikum. Hugmyndin að skilgreiningu á flatarmáli almenns svæðis D af þessari gerð snýst um að nálgast það innanfrá og utanfrá með marghyrningum, $A \subseteq D$ og $B \supseteq D$, og reikna út flatarmál A og B . Ef að fyrir sérhvert $\epsilon > 0$ eru til marghyrningar $A \subseteq D$ og $B \supseteq D$ þannig að mismunurinn á flatarmáli A og B sé minni en ϵ , þá segjum við að f sé heildanlegt á bilinu $[a, b]$. Þá er til ótvírætt ákvörðuð tala I , sem er þannig að flatarmál A getur ekki verið stærra en I og flatarmál B getur ekki verið minna en I . Þá tölu köllum við heildi fallsins f yfir bilið $[a, b]$ og táknum það með

$$\int_a^b f(x) dx$$

og við lítum á það sem flatarmál svæðisins D .

Formlega skilgreiningin á heildi er almennari en hér var lýst, því hún takmarkast ekki við jákvæð föll. Í henni er einungis litið á marghyrninga sem eru sammengi rétthyrninga með hliðar samsíða ásum hnitakerfisins.

Mengi $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ þar sem $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ kallast *skipting* á bilinu $[a, b]$. Tökum nú fall $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ og gerum ráð fyrir að fallið f sé *takmarkað*, en það þýðir að til séu fastar m og M , þannig að

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b].$$

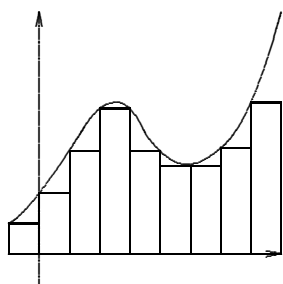
Summur af gerðinni

$$U = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad Y = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

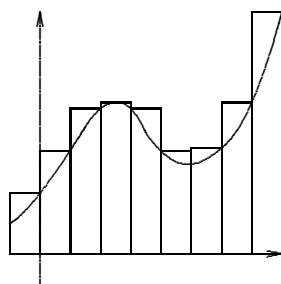
þar sem $m_i \leq f(x) \leq M_i$ fyrir öll $x \in [x_{i-1}, x_i]$, nefnast *undirsummur* og *yfirsummur* fyrir fallið f og summa af gerðinni

$$S = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

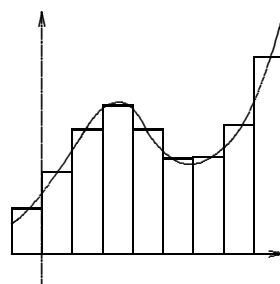
þar sem $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ er nefnd *millisumma* eða *Riemann-summa* fyrir fallið f . Við höfum augljóslega $U \leq S \leq Y$ fyrri allar undir-, milli- og yfirsummur U , S og Y .



Undirsumma.



Yfirsumma.



Millisumma.

Takmarkaða fallið $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er þá sagt vera heildanlegt ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er undirsumma U og yfirsumma Y fyrir f þannig að $Y - U < \varepsilon$.

Ef f er heildanlegt, þá má alltaf finna vaxandi runu af undirsummum $(U_j)_{j=1}^\infty$ og minnkandi runu $(Y_j)_{j=1}^\infty$ af yfirsummum þannig að $Y_j - U_j \rightarrow 0$. Báðar runurnar eru þá samleitnar með sama markgildi og það nefnum við *heildi fallsins f á bilinu $[a, b]$* og við táknum það með

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Vert er að taka það fram að x er í þessu tilfelli *ekki* breyta, þ.e. $\int_a^b f(x) dx$ er ekki fall af x . Þegar reiknað hefur verið upp úr heildinu er x ekki lengur til staðar í stæðunni.

Í þessari skilgreiningu er gert ráð fyrir að $a \leq b$. Ef $a = b$, þá er heildið augljóslega 0. Ef $a > b$, þá skilgreinum við

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Dæmi 35.1.1. Finnið yfirsummu og undirsummu með skiptipunkta í heilu tölunum fyrir $f := x^2 + 4x$ á bilinu $[0, 8]$.

Lausn: Við sjáum að fallið er stranglega vaxandi svo að með því að velja fallgildi í hægri

enda hlutbils fáum við yfirsummu og með því að velja fallgildi í vinstri enda hlutbils fáum við undirsummu. Hvert bil er af lengd 1 svo við að yfirsumman er

$$Y = \sum_{k=1}^8 f(k) = \sum_{k=1}^8 k^2 + 4k = \sum_{k=1}^8 k^2 + 4 \sum_{k=1}^8 k = 204 + 4 \cdot 36 = 348$$

og undirsumman U er

$$U = \sum_{k=1}^8 f(k-1) = \sum_{k=0}^7 k^2 + 4k = Y - f(8) = 252.$$

35.2 Reiknireglur

Nokkrar reiknireglur um ákveðin heildi:

(i) Ef f og g eru tvö heildanleg föll á $[a, b]$, þá er $f + g$ heildanlegt og

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) Ef k er rauntala og f er heildanlegt á $[a, b]$, þá er kf heildanlegt og

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

(iii) Ef $a < c < b$ og f er heildanlegt á $[a, b]$, þá er f heildanlegt á báðum bilunum $[a, c]$ og $[c, b]$ og

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(iv) Ef f er heildanlegt á $[a + c, b + c]$, þá er

$$\int_a^b f(x + c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx.$$

Dæmi 35.2.1. Reiknið heildið

$$\int_0^1 x - k dx + \int_2^3 (x - 1) + k dx.$$

Lausn: Við notum reiknireglur og fáum

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x - k dx + \int_2^3 (x - 1) + k dx \\ &= \int_0^1 x - k dx + \int_1^2 x + k dx \\ &= \int_0^1 x dx - \int_0^1 k dx + \int_1^2 x dx + \int_1^2 k dx \\ &= \int_0^2 x dx - k + k = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2. \end{aligned}$$

35.3 Einhalla vaxandi föll

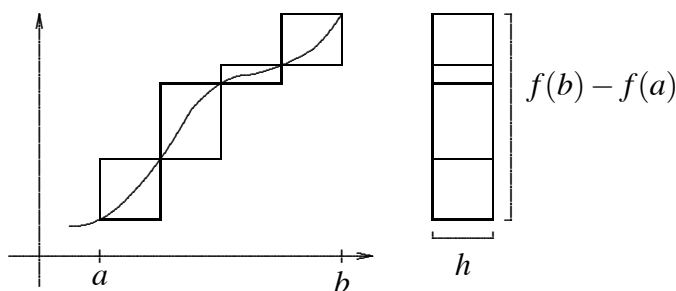
Látum $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vera vaxandi fall. Þá er f takmarkað því $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ fyrir öll $x \in [a, b]$. Látum $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ vera jafna skiptingu á $[a, b]$, þ.e.a.s. $x_i = a + i(b-a)/n$. Þá er $x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$. Við setjum síðan $m_i = f(x_{i-1})$ og $M_i = f(x_i)$. Fyrst f er vaxandi þá eru $U = \sum_{i=1}^n m_i(b-a)/n$ og $Y = \sum_{i=1}^n M_i(b-a)/n$ undir- og yfirsummur fyrir fallið f og við höfum

$$Y - U = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(b-a)/n = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(b-a)/n = (f(b) - f(a))(b-a)/n.$$

Athugið að hér höfum við notfært okkur að

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1}) \\ &= f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Nú sjáum við að með því að velja skiptinguna nóga fína, þ.e.a.s. n nógu stórt þá sjáum við að mismunurinn $Y - U$ getur verið hversu smár sem vera skal. Þar með höfum við sýnt fram á að vaxandi fall er heildanlegt.



Útreikningana hér að ofan má líka hugsa sem svo að þar sem fallið er einhalla skarast rétthyrningarnir sem afmarkast af punktum $(x_i, f(x_i))$ og $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ ekki svo við getum ímyndað okkur að við stöflum þeim hverjum ofan á annan og fáum þá út rétthyrning með flatarmál $h \cdot (f(b) - f(a))$. Flatarmál þessa rétthyrnings er jafnt $Y - U$. En með því

að láta h stefna á 0 sést að flatarmálið, og þar með $Y - U$, getur verið eins lítið og við viljum og þar með er fallið heildanlegt.

Ef f er minnkandi, þá er $-f$ vaxandi og þar með er $-f$ heildanlegt. Reikniregla (ii) í síðustu grein með $k = -1$ segir okkur síðan að f sé heildanlegt. Niðurstaðan er því: Sérhvert einhalla fall á $[a, b]$ er heildanlegt.

35.4 Samfelld föll eru heildanleg

Gerum nú ráð fyrir að $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sé samfelld og veljum jafna skiptingu eins og í síðustu grein. Fyrst fallið f er samfelld, þá tekur það stærsta og minnsta gildi gildi í punktum c_i og d_i á sérhverju hlutbili $[x_{i-1}, x_i]$. Þetta þýðir að $f(c_i) = \min\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ og $f(d_i) = \max\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Við fáum nú að

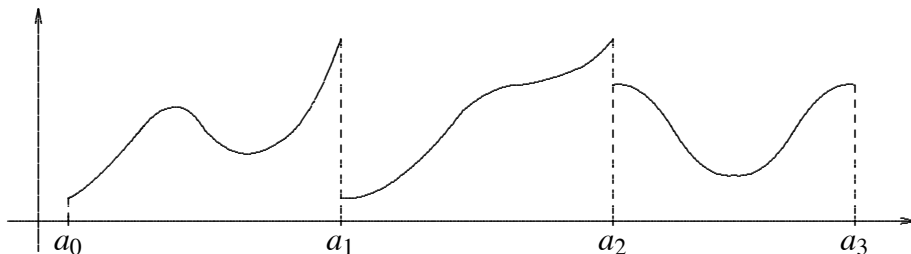
$$Y - U = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(b-a)/n = \sum_{i=1}^n (f(d_i) - f(c_i))(b-a)/n.$$

Ef gefin er tala $\varepsilon > 0$, þá er hægt að sýna fram á að velja megi skiptinguna það fína að $0 \leq f(d_i) - f(c_i) < \varepsilon/(b-a)$ fyrir öll n . Fjöldi liðanna í summunni er n , svo við fáum matið $Y - U < \varepsilon$. Við höfum því sýnt að sérhvert samfelld fall á $[a, b]$ er heildanlegt.

Með því að tengja tvær síðustu niðurstöður saman getum við nú fengið að ef f er takmarkað fall á bilinu $[a, b]$ og til er skipting á $[a, b]$ þannig að f er annað hvort einhalla eða samfelld á sérhverju hlutbili skiptingarinnar, þá er f heildanlegt og heildið er summa heildanna á hlutbilunum,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) dx$$

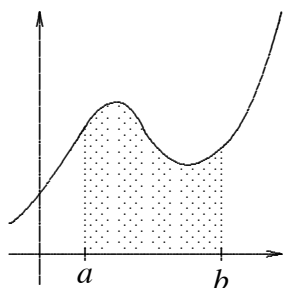
þar sem a_i eru endapunktur hlutbilanna.



36 Grundvallarsetning stærðfræðigreiningarinnar

36.1 Grundvallarsetning stærðfræðigreiningarinnar

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



Heildun og deildun eru meginaðgerðir stærðfræðigreiningarinnar. Samband þeirra er gefið með setningum sem nefndar eru undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar:

- (i) Ef fallið f er samfelld á $[a, b]$ og fallið F er skilgreint með

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

þá er F stofnfall f , þ.e.a.s. $F'(x) = f(x)$ fyrir öll $x \in [a, b]$.

- (ii) Ef f er samfelld fall á $[a, b]$ og F er stofnfall þess, þá er

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Dæmi 36.1.1. Finnið afleiðu fallsins $F(x) := \int_0^x \sin^3(t^2) dt$.

Lausn: Samkvæmt undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar er afleiðan $F'(x) = \sin^3(x^2)$.

37 Heildunarreglur og meðalgildi

37.1 Hlutheildun

Lítum á tvö deildanleg föll f og g með samfelldar afleiður. Reglan um deildun á margfeldi falla segir að

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Ef óákveðið heildi er tekið af stærðunum sitt hvoru megin við jafnaðarmerkið fæst svo skv. undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx.$$

Með því að færa yfir jafnaðarmerkið fáum við reglu sem að er oftast kölluð reglan um hlutheildun

Setning 37.1.1 Látum f og g vera deildanleg föll með samfelldar afleiður, þá er

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Dæmi 37.1.1. Reiknið óákveðna heildið

$$\int x \cos(x) dx.$$

Lausn:

Hér er hentugast að setja $f(x) = x$ og $g(x) = \sin(x)$. Þá er $f'(x) = 1$ og $g'(x) = \cos(x)$. Þá fæst með reglunni um hlutheildun að

$$\begin{aligned} \int x \cos(x) dx &= \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x)dx = x \sin(x) + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

37.2 Innsetningaraðferð

Látum g vera samfelldt deildanlegt fall á einhverju bili $[a, b]$ og f vera samfelldt fall á bili I sem inniheldur myndmengið $g([a, b])$. Ef að F er stofnfall fyrir samfellda fallið f þá gefur keðjureglan okkur að

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

og þar með er $F \circ g$ stofnfall fyrir $f(g(x))g'(x)$. Önnur undirstöðusetningin gefur okkur þá

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(b)}^{g(a)} f(t)dt.$$

Þessi aðferð er oft hugsuð þannig að við lítum á $u = g(x)$ sem nýja breytu í heildinu lengst til vinstri og setjum hana í heildið í staðin fyrir $g(x)$ og þá verðum við að setja inn du í staðin fyrir $g'(x)dx$

Með óákveðnum heildum verður reglan

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

Dæmi 37.2.1. Reiknið ákveðna heildið

$$\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx.$$

Lausn:

Hér munum við setja $u = \ln(x)$, þá verður $du = \frac{1}{x} dx$ og því fæst

$$\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx = \int_{\ln(1)}^{\ln(e^{\pi/2})} \cos(u) du = \int_0^{\pi/2} \cos(u) du = [\sin(u)]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1.$$

38 Heildi og afleiður logra og veldisvísisfalla

38.1 Stofnföll logra og veldisvísisfalla

Stofnfall fyrir logra er gefið með

$$\int \log_a(x) dx = \frac{(x \ln(x) - x)}{\log_a(x)} + C$$

og stofnfall fyrir vísisfall er gefið með

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

39 Ákveðin heildi og flatarmál

39.1 Ákveðin heildi og flatarmál

Eins og sagt er frá í kaflanum um Riemann-summur og ákveðin heildi þá er ákveðna heildið

$$\int_a^b f(x) dx$$

hugsað sem flatarmál formsins sem afmarkast af ferli fallsins f , x -ássins og línanna gefnar með jörnunum $y = a$ og $y = b$, af því gefnu að $f(x) > 0$ fyrir öll x .

Ef $f(x) < 0$ þá er þetta hugsað sem neikvætt flatarmál formsins.

Mjög mikilvægt er að nemendur átti sig á muninum á skilgreiningunni á ákveðnu og óákveðnu heildi.

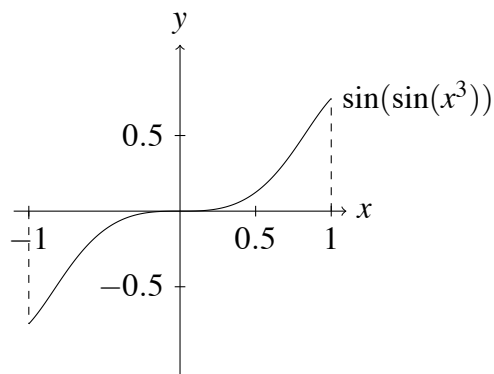
Ákveðið heildi er skilgreint sem flatarmál, en óákveðið heildi er skilgreint sem eins konar andhverfa deildunnar.

Við fyrstu sýn er langt frá því að vera augljóst að þessir tveir hlutir séu á einhvern hátt tengdir þó svo að táknmálið sé mjög líkt. Það er undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar sem útskýrir hversu skild þessi hugtök eru og skýrir þess vegna hvers vegna stærðfræðingar völdu svona líkt táknmál fyrir hugtök sem við fyrstu sýn virðast ekki mjög tengd.

Vert er að ítreka eftirfarandi sérstaklega. Ákveðið heildi er skilgreint sem flatarmál en ekki andhverfa deildunnar. Tengslin þar á milli eru fengin með reglu.

Dæmi 39.1.1. Reiknið

$$\int_{-1}^1 \sin(\sin(x^3)) dx.$$

**Lausn:**

Hér er nánast ómögulegt að finna stofnfall fyrir heildisstofninn $\sin(\sin(x^3))$. Þó er hægt að taka eftir því að fallið er oddstætt, það sést af því að $\sin(x)$ og x^3 eru bæði oddstæð föll og samsetning oddstæðra falla er oddstætt.

Ákveðna heildið fæst með því að finna flatarmálið undir ferlinum hægra megin við y-ásinn því þar er fallið jákvætt, og draga síðan frá flatarmálið yfir ferlinum vinstra megin við y-ásinn því að þar er fallið neikvætt.

Þar sem að fallið er oddstætt þá núllast flatarmálin út og við fáum

$$\int_{-1}^1 \sin(\sin(x^3)) dx = 0.$$

40 Hlutheildun og stofnbrot

40.1 Hlutheildun og stofnbrot

Reglur um hlutheildun má sjá í kaflanum sem heitir heildunarreglur og meðalgildi.

Stofnbrotaliðun

Ef að $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ er rætt fall þá er besta leiðin til að finna stofnfall þess að beita stofnbrotaliðun. Farið var ítarlega í aðferð sem lýsir því hvernig skal stofnbrotaliða ræð föll í kaflanum um ræð föll.

Dæmi 40.1.1. Reiknið ákveðna heildið

$$\int_3^5 \frac{x^4 + 2x^2 - 4x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$$

Lausn:

Við stofnbrotaliðum fyrst með aðferðum sem var lýst í kaflanum um ræð föll, niðurstaðan verður

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 4x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = x + 3 - \frac{1}{2x} + \frac{2}{x-1} + \frac{15}{2(x-2)}.$$

Því fæst

$$\begin{aligned}
\int_3^5 \frac{x^4 + 2x^2 - 4x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx &= \int_3^5 \left(x + 3 - \frac{1}{2x} + \frac{2}{x-1} + \frac{15}{2(x-2)} \right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{\ln(x)}{2} + 2\ln(x-1) + \frac{15\ln(x-2)}{2} \right]_3^5 \\
&= \frac{5^2}{2} + 4 \cdot 5 - \frac{1}{2}\ln(5) + 2\ln(4) + \frac{15}{2}\ln(3) - \frac{3^2}{2} - 3 \cdot 3 + \frac{1}{2}\ln(3) - 2\ln(2) - \frac{15}{2}\ln(1) \\
&= 14 - \frac{1}{2}\ln(5) + \ln(4) + 8\ln(3).
\end{aligned}$$

41 Óeiginleg heildi

41.1 Óeiginleg heildi af gerð eitt

Stundum getur verið gagnlegt að heilda föll alveg út í óendanleikann. Það er ekki mjög erfitt að útfæra það formlega:

Skilgreining 41.1.1. • Látum $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall sem er heildanlegt á sérhverju takmörkuðu hlutbili í bilinu $[a, \infty)$.

Ef að markgildið

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

er til og jafnt rauntölu þá segjum við að f sé heildanlegt á $[a, \infty)$ og skrifum

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

- Látum $g : [-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall sem er heildanlegt á sérhverju takmörkuðu hlutbili í bilinu $[-\infty, b]$.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

er til og jafnt rauntölu þá segjum við að g sé heildanlegt á $[-\infty, b]$ og skrifum

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx.$$

- Látum $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vera fall.

Ef að til er tala $c \in \mathbb{R}$ þannig að h sé bæði heildanlegt á $[-\infty, c]$ og $[c, \infty)$ þá segjum við að h sé heildanlegt á $\mathbb{R}$ og skrifum

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx.$$

Dæmi 41.1.1. Reiknið

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Lausn:

Þekkt er að stofnfall fyrir $\frac{1}{1+x^2}$ er $\text{Arctan}(x)$.

Því fæst

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\text{Arctan}(x)]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\text{Arctan}(t) - \text{Arctan}(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2}.$$

41.2 Óeiginleg heildi af gerð tvö

Stundum viljum við geta heildað föll yfir bil, þó að þau séu óskilgreind í einhverjum punktum á bilinu. Til dæmis gæti okkur dottið í hug að heilda fallið $1/\sqrt[3]{x^2}$ yfir bilið $[-1, 1]$ þó svo að það sé óskilgreint í núlli. Við útfærum það svona:

Skilgreining 41.2.1. • Gerum ráð fyrir að $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sé fall skilgreint á bili $I =]a, b]$. Ef að markgildið

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

er til og jafnt rauntölu þá segjum við að f sé heildanlegt á bilinu $]a, b]$ og skrifum

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

- Gerum ráð fyrir að $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sé fall skilgreint á bili $I = [a, b[$. Ef að markgildið

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

er til og jafnt rauntölu þá segjum við að f sé heildanlegt á bilinu $[a, b[$ og skrifum

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

- Gerum ráð fyrir að $c \in [a, b]$ og að $f : [a, b] \setminus c \rightarrow \mathbb{R}$ sé fall. Ef að f er bæði heildanlegt á $[a, c[$ og $]c, b]$ þá segjum við að f sé heildanlegt á $[a, b]$ og skrifum

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Dæmi 41.2.1. Reiknið heildið

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

Lausn:

Við sjáum að fallið $1/\sqrt[3]{x^2} = x^{-2/3}$ er óskilgreint í punktinum $x = 0$. Þetta er þess vegna óeiginlegt heildi af gerð tvö og við reiknum

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx &= \int_{-1}^0 x^{-2/3} dx + \int_0^1 x^{-2/3} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} [3x^{1/3}]_{-1}^t + \lim_{t \rightarrow 0} [3x^{1/3}]_t^1 = (0 - (-3)) + (3 - 0) = 6.\end{aligned}$$

Dæmi 41.2.2. Palli ætlar að heilda fallið $1/x^3$ frá -1 uppí 1 . Hann reiknar

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{-1}{2} - \frac{-1}{2} \right) = 0.$$

Hefur Palli rétt fyrir sér?

Lausn:

Nei!

Fallið $1/x^3$ er óskilgreint í punktinum núll, við þurfum því að skoða markgildin frá báðum áttum og sjá hvort þau séu til.

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_{-1}^t = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \right) = \infty.$$

Fallið er þess vegna óheildanlegt og Palli hefur rangt fyrir sér.

42 Innangangur að diffurjöfnum

42.1 Afleiðujöfnur

Afleiðujafna eða *diffurjafna* er jafna

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0$$

sem tjáir samband milli fallgilda $y(x)$ og gilda $y'(x), y''(x), y'''(x), \dots$ á afleiðum óþekkts falls $y(x)$. *Stig* afleiðujöfnunnar er stærsta stig afleiðu sem kemur fyrir í jöfnunni. Úrlausn jöfnunnar snýst um að finna formúlu fyrir öllum lausnum jöfnunnar, þ.e.a.s. öllum föllum sem skilgreind eru á einhverju bili I á $\mathbb{R}$ og uppfylla jöfnuna í sérhverjum punkti x í I .

Fyrsta stigs afleiðujafna er af gerðinni $F(x, y(x), y'(x)) = 0$. Auðveldara er að eiga við jöfnuna ef hún er umrituð í jöfnu af gerðinni

$$y'(x) = G(x, y(x)).$$

Úrlausn hennar má túlka þannig að verið sé að finna feril $(x, y(x))$ með þann eiginleika að hallatalan er gefin með $G(x, y)$ í sérhverjum punkti (x, y) .

Einfaldasta afleiðujafna sem hægt er að hugsa sér er

$$y'(x) = f(x),$$

þar sem f er gefið fall, en úrlausn hennar snýst um að finna stofnfall fyrir f . Við getum notað heildi til þess að rita lausnina

$$y(x) = C + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

þar sem x_0 er einhver punktur í bilinu I .

43 Jafnvægi sjálfstæðrar deildajöfnu

44 Aðskilnaður breytistærða

44.1 Aðskiljanleg jafna af 1. stigi

Við segjum að fyrsta stigs jafna sé *aðskiljanleg* ef hægt er að skrifa hana sem

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y(x))}$$

þar sem f og g eru gefin föll.

Til þess að ákvaðra lausnarformúlu látum við F vera stofnfall f og G vera stofnfall g og athugum að ef $y(x)$ er lausn á jöfnunni, þá er

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = G'(y(x))y'(x) = g(y(x))y'(x) = f(x).$$

Þetta sýnir að afleiðujafnan er jafngild því að

$$G(y(x)) = F(x) + C$$

þar sem C er fasti.

Nú er eftir að leysa $y(x)$ út úr þessari jöfnu og þá er lausnin fundin. Sú aðgerð er jafngild því að finna andhverfu G . Þegar andhverfan hefur verið fundin þá verður lausnin

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C).$$

Dæmi 44.1.1. Leysið jöfnuna $y' = x \cos^2(y)$.

Lausn: Þetta er aðskiljanleg afleiðujafna, við getum sett $g(y) := \frac{1}{\cos^2(y)}$ og $f(x) := x$ og þá er jafnan á forminu

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y(x))}.$$

Nú er $\tan(y)$ stofnfall fyrir $g(y)$ og $F(x) := \frac{1}{2}x^2$ stofnfall fyrir f svo að lausnirnar eru

$$\arctan(F(x) + C) = \arctan\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$$

þar sem $C \in \mathbb{R}$.

45 Línulegar deildajöfnur af 1.stigi

45.1 Línuleg jafna af 1. stigi

Jafna er sögð vera *línuleg* ef hægt er að umrita hana yfir á formið

$$y'(x) + a(x)y(x) = g(x),$$

þar sem a og g eru gefin föll á einhverju bili I .

Til þess að ákvarða lausnarformúlu látum við $A(x)$ vera eitthvert stofnfall fyrir fallið $a(x)$ og athugum að þá er

$$\frac{d}{dx}(e^{A(x)}y(x)) = e^{A(x)}y'(x) + a(x)e^{A(x)}y(x) = e^{A(x)}(y'(x) + a(x)y(x)).$$

Afleiðujafnan er því jafngild

$$\frac{d}{dx}(e^{A(x)}y(x)) = e^{A(x)}g(x).$$

Nú getum við heildað frá punktinum x_0 og fáum þá

$$e^{A(x)}y(x) = C + \int_{x_0}^x e^{A(t)}g(t) dt.$$

Almennt lausnarform jöfnunnar er nú fundið:

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x e^{A(t)}g(t) dt.$$

Dæmi 45.1.1. Leysið afleiðujöfnuna $y' = xe^{x^2}$.

Lausn: Þetta er einfaldasta gerð diffurjöfnu, til að leysa hana þurfum við bara að finna stofnfall fyrir xe^{x^2} . Ef við beitum innsetningunn $u = x^2$ þá er $\frac{du}{dx} = 2x$ og við fáum

$$y = \int xe^{x^2} dx = \int \frac{x}{2x} e^u du = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

þar sem $C \in \mathbb{R}$ er ótiltekinn fasti.

Dæmi 45.1.2. Leysið afleiðujöfnuna $y' + \frac{y}{x} = \sin(x^2)$, $y(1) = 1$.

Lausn: Þetta er fyrsta stigs línuleg afleiðujafna. Við fáum þá samkvæmt lausnarformúlu að

$$y = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x e^{A(t)} \sin(t^2) dt$$

þar sem A er eitthvert stofnfall fyrir $\frac{1}{x}$ og C er einhver fasti, við veljum $x_0 = 0$ og $A(x) =$

$\ln(x)$ og fáum þá

$$\begin{aligned}y(x) &= Ce^{-\ln(x)} + e^{-\ln(x)} \int_0^x e^{\ln(t)} \sin(t^2) dt \\&= \frac{C}{x} + \frac{1}{x} \int_0^x t \sin(t^2) dt \quad \left(u = t^2, \frac{du}{dt} = 2t\right) \\&= \frac{C}{x} + \frac{1}{x} \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{2} du \\&= \frac{C}{x} + \frac{1}{2x} [-\cos]_0^{x^2} \\&= \frac{C}{x} + \frac{1 - \cos(x^2)}{2x}.\end{aligned}$$

Þar sem fastinn C er ótiltekin getum við svo einfaldað þetta í

$$y(x) = \frac{C - \cos(x^2)}{2x}.$$

Nú notum við skilyrðið í $x = 1$ til að ákvarða lausnina ótvírætt, við finnum C þ.a.

$$\frac{C - \cos(1^2)}{2 \cdot 1} = 1, \quad \text{þ.e.} \quad C = 1 + \cos(1).$$

45.2 Línuleg jafna af 2. stigi

Línuleg afleiðujafna af 2. stigi er af gerðinni

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

þar sem föllin a_0, a_1, a_2 og f eru gefin á einhverju bili I . Ef stuðlarnir a_0, a_1 og a_2 eru fastar, þá segjum við að jafnan hafi *fastastuðla*. Ef f er núllfallið, þ.e. fastafallið $f(x) = 0$, þá segjum við að jafnan sé *óhliðruð*, en að hún sé *hliðruð* ef f er ekki núllfallið.

Óhliðruð jafna með fastastuðla

Nú skulum við líta á jöfnuna $y'' + by' + cy = 0$ þar sem b og c eru rauntölur. Þetta er annars stigs jafna með fastastuðla og hún er óhliðruð. Byrjum á því að taka $y(x) = e^{rx}$, þar sem r er tala. Ef við stingum þessu inn í jöfnuna, þá fæst

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = r^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = e^{rx}(r^2 + br + c) = 0$$

Þetta segir okkur að $y(x) = e^{rx}$ sé lausn ef og aðeins ef r er núllstöð *kennimargliðunnar* $P(x) = x^2 + bx + c$.

Í ljós kemur að hægt er að lýsa almennri lausn jöfnunnar út frá núllstöðvum kennimargliðunnar. Látum því $D = b^2 - 4c$ tákna aðgreini hennar. Ef $D > 0$ þá eru núllstöðvarnar

$$r_1 = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c}) \quad \text{og} \quad r_2 = \frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4c})$$

og almenn lausn er

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

þar sem C_1 og C_2 eru fastar. Ef $D = 0$, þá hefur kennimargliðan aðeins eina núllstöð $r = -\frac{1}{2}b$ og við fáum almenna lausn

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}.$$

Ef $D < 0$, þá fáum við tvær núllstöðvar, sem eru tvinntölur,

$$r_1 = \frac{1}{2}(-b + i\sqrt{4c - b^2}) = \alpha + i\beta \quad \text{og} \quad r_2 = \frac{1}{2}(-b - i\sqrt{4c - b^2}) = \alpha - i\beta$$

og almenn lausn er

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Hliðruð jafna með fastastuðla

Hliðruð línuleg 2. stigs jafna með fastastuðla er af gerðinni

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x).$$

Mismunur tveggja lausna á henni er lausn á óhliðruðu jöfnunni og það segir okkur að hægt sé að skrifa almenna lausn á hliðruðu jöfnunni sem summu tveggja liða $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, þar sem y_h er almenn lausn á óhliðruðu jöfnunni og y_p er einhver lausn á hliðruðu jöfnunni. Slík lausn á hliðruðu jöfnunni er oft nefnd *sérlausn*.

Til er formúla fyrir lausn á hliðruðu jöfnunni sem þið eigið eftir að læra síðar, en oft er hægt að finna lausn með því að giska á ákveðið lausnarform og reikna lausnina með þeirri forsendu að til sé lausn á því ákveðna formi.

Ef til dæmis f er margliða þá er alltaf hægt að finna lausn y_p sem er margliða.

Dæmi 45.2.1. Finnum almenna lausn á $y'' - 4y' + y = x^2$.

Lausn: Við byrjum á því að finna sérlausn og gerum ráð fyrir fyrir að hún sé af gerðinni $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, sem sagt annars stigs margliða. Ef við stingum þessu falli inn í jöfnuna, þá fáum við jöfnuna

$$2A - 4(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

sem jafngildir jöfnunni

$$Ax^2 + (-8A + B)x + (2A - 4B + C) = x^2.$$

Nú berum við saman stuðlana við veldin í báðum hliðum jöfnunnar og sjáum að þrjár jöfnur verða að vera uppfylltar, $A = 1$, $-8A + B = 0$ og $2A - 4B + C = 0$. Við leysum út $B = 8$ og $C = 30$.

Nú eru rætur kennimargliðunnar $2 \pm \sqrt{3}$. Almenna lausnin sem við leitum að er því

$$y(x) = C_1 e^{(2-\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2+\sqrt{3})x} + x^2 + 8x + 30.$$

Ef við setjum $f(x) = \cos(\alpha x)$ eða $f(x) = \sin(\alpha x)$ í hægri hlið jöfnunnar, þá leitum við að sérlausn af gerðinni $y_p(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$.

Ef $f(x) = e^{\alpha x}$ og α er ekki núllstöð kennimargliðunnar, þá leitum við að lausn af gerðinni $y_p(x) = Ae^{\alpha x}$. Ef α er önnur af tveimur núllstöðvum kennimargliðunnar, þá leitum við að lausn af gerðinni $y_p(x) = Axe^{\alpha x}$. Ef α er eina núllstöð kennimargliðunnar, þá leitum við að lausn af gerðinni $Ax^2 e^{\alpha x}$.

Dæmi 45.2.2. Finnið almenna lausn jöfnurnar $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Lausn: Þetta er óhliðruð jafna. Kennimargliðan er $x^2 + 2x + 5$. Rætur hennar eru

$$x = \frac{-2 \pm i\sqrt{4 \cdot 5 - 2^2}}{2} = -1 \pm 2i$$

og þá fáum við lausnirnar

$$C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x).$$

Dæmi 45.2.3. Finnið almenna lausn á $y'' + y' - 6y = \cos(x) + \sin(x) + 3$.

Lausn: Við byrjum á að finna sérlausn. Í hægri hlið er bæði fasti og hornaföll svo að við leitum að sérlausn á forminu $A \cos(x) + B \sin(x) + c$. Stingum því inn í (*) og fáum

$$\begin{aligned} f''(x) + f'(x) - 6f(x) \\ = -A \cos(x) - B \sin(x) - A \sin(x) + B \cos(x) - 6A \cos(x) - 6B \sin(x) + 6c \\ = \cos(x) + \sin(x) + 3. \end{aligned}$$

Þá fáum við jöfnuhneppið

$$B - 7A = 1, \quad -7B - A = 1, \quad 6c = 3.$$

sem hefur lausnina $A = -\frac{4}{25}$ og $B = -\frac{3}{25}$ og $c = \frac{1}{2}$. Þá er $-\frac{4}{25} \cos(x) - \frac{3}{25} \sin(x) + \frac{1}{2}$ sérlausn. Kennimargliðan er $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ með ræturnar -3 og 2 . Þá er almenna lausnin

$$C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - \frac{4}{25} \cos(x) - \frac{3}{25} \sin(x) + \frac{1}{2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dæmi 45.2.4. Leysið afleiðujöfnuna $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$.

Lausn: Kennimargliðan er $x^2 + 4x + 4$ en -2 er tvöföld rót hennar. Almenn lausn óhliðruðu jöfnunnar er því $C_1 e^{-2x} + Cx e^{-2x}$. Við leitum síðan að sérlausn á forminu $f(x) = Cx^2 e^{-2x}$. Við fáum þá $f'(x) = 2Cx e^{-2x} - 2Cx^2 e^{-2x}$ og $f''(x) = 2C e^{-2x} - 4Cx e^{-2x} + 4Cx^2 e^{-2x} = 2C e^{-2x} - 8Cx e^{-2x} + 4Cx^2 e^{-2x}$. Við setjum það inn í jöfnuna og fáum

$$C(2e^{-2x} - 8xe^{-2x} + 4x^2 e^{-2x} + 8xe^{-2x} - 8x^2 e^{-2x} + 4x^2 e^{-2x}) = 2C e^{-2x} = e^{-2x}$$

svo að $C = \frac{1}{2}$. Þá er almenna lausnin

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$