46 Runur

46.1 Runur

Fall sem skilgreint er á $\mathbb{N}$ eða $\mathbb{N}_0$ með gildi í einhverju mengi nefnist *runa*. Runa nefnist *rauntalnaruna*, ef mengið er $\mathbb{R}$, en *tvinntalnaruna*, ef mengið er $\mathbb{C}$. Runur eru settar fram með ýmsum hætti. Venja er að tákna fallgildin $a(n)$ með a_n. Runur a, b, $c, \dots,$ geta verið gefnar með formúlum

$$a_n = n, \qquad b_n = \frac{1}{n}, \qquad c_n = \frac{1}{2^n}, \qquad d_n = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \dots.$$

Þessar sömu runur eru einnig táknaðar með

$$(n)_{n=1}^{\infty}, \qquad (1/n)_{n=1}^{\infty}, \qquad (2^{-n})_{n=0}^{\infty}, \qquad \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty} \qquad \dots.$$

Hægt er að setja runur fram með upptalningu á liðum. Þá eru settir fram nógu margir liðir til þess að ljóst sé hver reglan er. Runur sléttra talna, oddatalna, frumtalna og neikvæðra velda af 2 eru þannig settar fram sem

$$2,4,6,8,\dots, \qquad 1,3,5,7,\dots, \qquad 2,3,5,7,11,\dots \qquad \text{og} \qquad \frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\dots.$$

Runur má einnig setja fram með *þrepunarskilgreiningu*. Þá eru fyrst taldir upp nokkrir liðir, segjum $a_1,\dots,a_k$ og síðan er sett fram formúla sem lýsir því hvernig almennt a_n er reiknað út fá þeim liðum sem á undan eru komnir. Gott dæmi um þetta er *Fibonacci-runan*,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Upptalning á þessari runu er

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\dots.$$

Dæmi 46.1.1. a) Finnið formúlu fyrir $n-$ta liðnum í rununni $1,2,4,8,16,\dots$.
Lausn: Hver liður er tvöfalt stærri en sá næsti á undan, þar sem fyrsti liðurinn er $1 = 2^0$ verður $n-$ti liðurinn 2^{n-1}.
b) Setjið rununa úr a-lið fram með þrepunarskilgreiningu.
Lausn: Við höfum að $a_1 = 1$ og að sérhver liður þar á eftir er tvöfalt stærri en sá á undan svo $a_n = 2a_{n-1}$, $n \geq 2$.

47 Raðir

47.1 Raðir

Ef $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ er talnaruna þá myndum við nýja runu $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ með því að mynda summur,

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Liður númer k í þessari runu nefnist k-ta *hlutsumma* rununnar $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
Röð $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ er runa sem samanstendur af hlutsummum gefinnar runu $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. Þannig stendur $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ fyrir rununa

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\dots.$$

Dæmi 47.1.1. Finnið formúlu fyrir n-ta liðinn í röðinni $\sum_{k=1}^{+\infty} k$.

Lausn: Hér táknar $\sum_{k=1}^{+\infty} k$ rununa þar sem $n-$ti liður er $n-$ta hlutsumma rununnar $(k)_{k=1}^{+\infty}$, en það er $s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dæmi 47.1.2. Finnið hlutsummurunu raðarinnar $(a_k)_{k=1}^{+\infty}$, sem er gefin með $a_n := (-1)^n$.
Lausn: Við viljum reikna summuna $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$. Fyrir $n=1$ er summan -1. Fyrir $n=2$ er hún 0 og svo endurtekur þetta sig, s.s.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} -1 \text{ ef } n \text{ odda} \\ 0 \text{ ef } n \text{ slétt.} \end{cases}$$

47.2 Jafnmunaruna

Runa $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ er sögð vera *jafnmunaruna* eða *mismunaruna* ef mismunur milli aðlægra liða er föst tala m, þ.e. $a_{k+1} - a_k = m$ fyrir öll k. Við höfum að

$$a_2 = a_1 + m,\ a_3 = a_2 + m = a_1 + 2m, \dots,\ a_n = a_1 + (n-1)m.$$

Það er auðvelt að finna formúlu fyrir n-tu hlutsummunni, því við getum notað formúluna $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)m) = na_1 + m\sum_{k=1}^{n}(k-1) \\ &= na_1 + m\sum_{k=1}^{n-1} k = na_1 + m \cdot \tfrac{1}{2}(n-1)n \\ &= n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)m}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}. \end{aligned}$$

Út úr síðasta hluta þessarar jöfnu lesum við að hlutsumma í jafnmunarunu er jöfn margfeldi af fjölda liða og meðaltali af fyrsta og síðasta lið. Athugið að $(k)_{k=1}^{\infty}$ er jafnmunaruna með $a_1 = 1$ og $m = 1$.

Dæmi 47.2.1. Í jafnmunarunu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ er fyrsti liðurinn 2 og fimmti liðurinn 14. Finnið summu fyrstu 100 liðanna.
Lausn: Munurinn á fyrsta og fimmta lið er 12 svo að munurinn á samliggjandi liðum er 3. Þá reiknum við lið númer 100 með $a_{100} = 2 + (100-1) \cdot 3 = 299$. Því næst getum við nýtt okkur formúlu fyrir hlutsummu jafnmunarunu og fáum

$$\sum_{k=1}^{100} a_k = 100\frac{a_1 + a_{100}}{2} = 50(2+299) = 15050.$$

47.3 Kvótarunur

Kvótaruna eða *jafnhlutfallaruna* er runa $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ þannig að hlutfall milli samliggjandi liða í rununni er fast, þ.e.a.s. til er tala $q \neq 0$, þannig að $a_{n+1}/a_n = q$ fyrir öll n. Talan q kallast *kvóti* eða *margfeldisstuðull* rununnar.
Lítum á nokkur dæmi um jafnhlutfallarunur

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \qquad i, -1, -i, 1, i, -1, \ldots.$$

Liðirnir í kvótarunu eru af gerðinni

$$a_2 = a_1 q,\ a_3 = a_2 q = a_1 q^2,\ \ldots,\ a_n = a_1 q^{n-1}$$

og því verður n-ta hlutsumman

$$s_n = a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}).$$

Ef $q = 1$, þá eru allir liðir rununnar (a_k) eins og við fáum að $s_n = a_1 \cdot n$.
Gerum nú ráð fyrir $q \neq 1$ og margföldum s_n með q. Þá fáum við

$$qs_n = a_1(q + q^2 + \cdots + q^n) = s_n - a_1 + a_1 q^n.$$

Út úr þessari jöfnu leysum við

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Dæmi 47.3.1. Fyrsti liður kvótarunu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ er 5 og fjórði liðurinn er -40. Finnið tíunda liðinn í röðinni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Lausn: Við viljum finna summuna $s_{10} = \sum_{n=1}^{10} a_n$. Við byrjum á að finna kvótann q, við vitum að $5q^3 = -40$ svo að $q = \sqrt[3]{-8} = -2$. Þá getum við sett inn í formúlu

$$s_{10} = \sum_{k=1}^{10} 5(-2)^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 5 \frac{1 - 1024}{3} = -1705.$$

47.4 Markgildi runa og raða

Rauntalnarunan $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ er sögð vera *samleitin* með markgildið L ef um sérhvert opið bil I sem inniheldur L gildir að til er $N \in \mathbb{N}$ þannig að $a_k \in I$ ef $k \geq N$. Við táknum þá markgildið L með

$$\lim_{k \to \infty} a_k.$$

Munið að sérhvert opið bil sem inniheldur L inniheldur samhverft opið bil af gerðinni $(L - \varepsilon, L + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R};\ |x - L| < \varepsilon\}$. Þetta gefur að hægt er að umorða skilgreininguna á markgildi þannig að runan er sögð vera samleitin með markgildið L, ef um sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir að til er $N \in \mathbb{N}$ þannig að

$$|a_k - L| < \varepsilon \qquad \text{fyrir öll } k \geq N.$$

Samhljóða skilgreining gengur fyrir tvinntalnarunu þar sem orðunum „sérhvert opið bil“ er skipt út fyrir „sérhverja opna skífu“.
Mismunaruna $a_k = a_1 + (k-1)m$ hefur markgildi aðeins ef hún er fastaruna, þ.e.a.s. $m = 0$, og þá er markgildið a_1. Kvótaruna $a_k = a_1 q^{(k-1)}$ hefur markgildi aðeins ef $|q| < 1$ eða $q = 1$ og er markgildið 0 ef $|q| < 1$ en a_1 ef $q = 1$.
Röðin $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ er sögð vera samleitin ef hlutsummurunan er samleitin og þá táknum við markgildið einnig með $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Auðvelt er að sannfæra sig um að ef röð er samleitin, þá stefna liðir hennar á 0. Þessari staðhæfingu má ekki snúa við, því auðvelt er að gefa dæmi um raðir, sem eru ekki samleitnar, en hafa liði sem stefna á 0.
Í síðustu grein reiknuðum við út hlutsummur kvótarunu, $a_k = a_1 q^{k-1}$, $a_1 \neq 0$. Hún er samleitin aðeins ef $|q| < 1$ og

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Dæmi 47.4.1. Látum $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vera kvótarunu með $a_1 := 5$ og $a_2 := 4$. Finnið summu raðarinnar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
Lausn: Við getum sett þetta beint inn í formúlu, því að við sjáum að $q = \frac{4}{5} < 1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 \frac{1}{1-q} = \frac{5}{1/5} = 25.$$

Dæmi 47.4.2. Finnið markgildi rununnar $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ með $a_n := \frac{n^2-1}{n^2+n+1}$.
Lausn: Við deilum uppi og niðri á striki með n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n^2}{1+1/n+1/n^2} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1-1/n^2}{\lim_{n\to\infty} 1+1/n+1/n^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dæmi 47.4.3. Segið til um hvort runan $a_n := \cos(n\pi)$ er samleitin.
Lausn: Athugum að $\cos(n\pi) = (-1)^{n-1}$. En það þýðir að runan getur ekki verið samleitin því að hún tekur tvö ólík gildi, þ.e. 1 og -1 óendanlega oft.

48 Tvinntölur

48.1 Takmarkanir rauntalnakerfisins

Við höfum séð að öll talnakerfin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ hafa sínar takmarkanir og það sama á við um rauntölurnar $\mathbb{R}$. Í mengi náttúrlegra talna er frádráttur ófullkomin aðgerð. Í mengi heilla talna er deiling ófullkomin aðgerð. Ræðu tölurnar duga ekki til þess að lýsa lengdum á strikum og ferlum sem koma fyrir í rúmfræðinni.

Við vitum að rauntala í öðru veldi er alltaf stærri eða jöfn núlli svo jafnan $x^2 = -1$ getur ekki haft lausn. Annars stigs jafnan $ax^2+bx+c=0$ hefur heldur enga lausn ef $D = b^2-4ac < 0$. Við getum skrifað niður fleiri dæmi um margliður af stigi sem er slétt tala án núllstöðva í $\mathbb{R}$. Margliður af oddatölustigi hafa alltaf núllstöð.
Nú er eðlilegt að spyrja, hvort hægt sé að stækka rauntalnakerfið í talnakerfi þar sem hægt er að finna lausn á annars stigs jöfnunni $x^2 = -1$ og hvort slíkt talnakerfi gefi af sér lausnir á fleiri jöfnum sem ekki eru leysanlegar í $\mathbb{R}$.
Ímyndum okkur nú augnablik að til sé talnakerfi sem inniheldur rauntölurnar sem hlutmengi og að þar sé stak i sem uppfyllir $i^2 = -1$. Þá er i að sjálfsögðu ekki rauntala. Við gefum okkur að allar reiknireglur fyrir rauntölur gildi áfram. Víxlregla margföldunar segir okkur þá að $ia = ai$ fyrir allar rauntölur a.
Tökum nú rauntölur a, b, c og d. Reiknireglurnar að ofan ásamt reiknireglum um summu og margfeldi rauntalna gefa að um $a+ib$ og $c+id$ gildir

$$(a+ib)+(c+id) = a+c+ib+id = (a+c)+i(b+d)$$

og

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac+ibc+aid+ibid\\ &= ac+ibc+iad+i^2bd\\ &= (ac-bd)+i(ad+bc).\end{aligned}$$

Þessar tvær formúlur gefa okkur forskrift að því hvernig leggja á saman og margfalda tölurnar $a+ib$ og $c+id$ þannig að út komi tölur af sömu gerð.

48.2 Tvinntalnaplanið

Nú snúum við okkur að spurningunni um það hvort hægt sé að útvíkka $\mathbb{R}$ í stærra talnakerfi þar sem til er tala i sem uppfyllir $i^2 = -1$. Það kemur í ljós að slíkt kerfi er til og að sérhverja tölu í því má skrifa sem $a+ib$ þar sem a og b eru rauntölur.
Lítum nú á mengi allra vigra í plani. Sérhver vigur hefur hnit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sem segja okkur hvar lokapunktur vigurs er staðsettur ef upphafspunktur hans er settur í upphafspunkt hnitakerfisins. Á mengi allra vigra höfum við tvær aðgerðir, samlagningu og margföldun með tölu. Samlagningunni er lýst með hnitum,

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+c).$$

Við skilgreinum nú margföldun á $\mathbb{R}^2$ með hliðsjón af formúlunni sem við uppgötvuðum hér að framan,

$$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc).$$

Talnaplanið $\mathbb{R}^2$ með venjulegri samlagningu og þessari margföldun nefnist *tvinntölur* og er táknað með $\mathbb{C}$. Nú þarf að bretta upp ermar og sannfæra sig um að eftirtaldar reiknireglur gildi:

$$\begin{aligned}
&\big((a,b)+(c,d)\big)+(e,f) = (a,b)+\big((c,d)+(e,f)\big) && \textit{(tengiregla samlagningar)},\\
&\big((a,b)(c,d)\big)(e,f) = (a,b)\big((c,d)(e,f)\big) && \textit{(tengiregla margföldunar)},\\
&(a,b)+(c,d) = (c,d)+(a,b) && \textit{(víxlregla samlagningar)},\\
&(a,b)(c,d) = (c,d)(a,b) && \textit{(víxlregla margföldunar)},\\
&(a,b)\big((c,d)+(e,f)\big) = (a,b)(c,d)+(a,b)(e,f) && \textit{(dreifiregla)},\\
&(a,b)+(0,0) = (a,b) && \textit{((0,0) er samlagningarhlutleysa)},\\
&(1,0)(a,b) = (a,b) && \textit{((1,0) er margföldunarhlutleysa)}.
\end{aligned}$$

Talan $(-a,-b)$ er samlagningarandhverfa (a,b). Við athugum að jafnan $(a,b)(a,-b) = (a^2+b^2,0)$ segir okkur að sérhver tala $(a,b) \neq (0,0)$ eigi sér margföldunarandhverfu

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right),$$

sem þýðir að

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$$

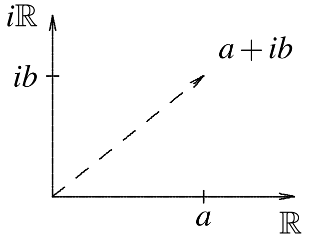
Við tökum eftir að

$$(a,0)(c,d) = (ac,ad) = a(c,d).$$

sem segir okkur að margföldun með vigrinum $(a,0)$ sé það sama og margföldun með tölunni a. Eins sjáum við að vigrar af gerðinni $(a,0)$ haga sér eins og rauntölur því

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0) \qquad \text{og} \qquad (a,0)(b,0) = (ab,0).$$

Í mengi tvinntalna gerum við því ekki greinarmun á rauntölunni a og vigrinum $(a,0)$ og lítum á lárétta hnitaásinn $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\}$ sem rauntalnalínuna $\mathbb{R}$. Við skrifum þá sérstaklega 1 í stað $(1,0)$ og 0 í stað $(0,0)$

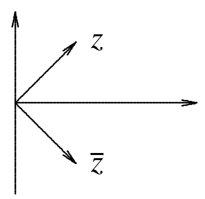


Mengið $\mathbb{R}$ nefnist *raunás* í tvinntalnaplaninu en mengið $i\mathbb{R} = \{iy; y \in \mathbb{R}\}$ nefnist *þverás*.
Lítum nú á vigurinn $(0,1)$. Um hann gildir $(0,1)^2 = (-1,0)$. Við innleiðum tákn fyrir hann: $i = (0,1)$. Sérhvern vigur (a,b) má skrifa sem samantekt $(a,b) = a(1,0)+b(0,1)$. Við gerum ekki greinarmun á rauntölu 1 og tvinntölunni $(1,0)$ og því erum við komin með framsetninguna

$$(a,b) = (a,0)(1,0)+(b,0)(0,1) = a+ib.$$

48.3 Raunhluti, þverhluti og samok

Ef z er tvinntala, þá getum við ritað $z = x+iy$ þar sem x og y eru rauntölur. Talan x nefnist þá *raunhluti* tölunnar z og talan y nefnist *þverhluti* hennar. Við táknum raunhlutann með $\Re z$ og þverhlutann með $\Im z$.

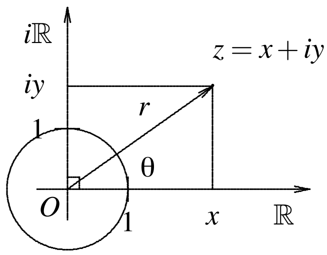


Tvinntala z er sögð vera *rauntala* ef $\Im z = 0$ og hún er sögð vera *hrein þvertala* ef $\Re z = 0$.
Ef $z \in \mathbb{C}$, $x = \Re z$ og $y = \Im z$, þá nefnist talan $\bar{z} = x - iy$ *samok* eða *samokatala* tölunnar z. Athugið að $\bar{z}$ er spegilmynd z í raunásnum og því er $\bar{\bar{z}} = z$.
Við höfum nokkrar reiknireglur um samok:

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2, \\ z+\bar{z} &= 2x = 2\Re z, \\ z-\bar{z} &= 2i\Im z, \\ \overline{zw} &= \bar{z}\bar{w}. \end{aligned}$$

Við höfum að z er rauntala þá og því aðeins að $z = \bar{z}$ og að z er hrein þvertala þá og því aðeins að $z = -\bar{z}$.

48.4 Lengd og stefnuhorn



Ef $z \in \mathbb{C}$, $x = \Re z$ og $y = \Im z$, þá nefnist talan

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

lengd, *tölugildi* eða *algildi* tvinntölunnar z. Ef $\theta \in \mathbb{R}$ og hægt er að skrifa tvinntöluna z á forminu

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

þá nefnist talan θ *stefnuhorn* eða *horngildi* tvinntölunnar z. Hornaföllin cos og sin eru lotubundin með lotuna 2π og því eru allar tölur af gerðinni $\theta + 2\pi k$ með $k \in \mathbb{Z}$ einnig stefnuhorn fyrir z.
Raðtvenndin $(|z|, \theta)$ er nefnd *pólhnit* eða *skauthnit* tölunnar z.
Nú fáum við samkvæmt reiknireglunum hér að framan:

$$\begin{aligned} |\bar{z}| &= |z|, \\ z\bar{z} &= |z|^2, \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \qquad z \neq 0. \end{aligned}$$

48.5 Veldareglur

Ef z er tvinntala þá getum við skilgreint heiltöluveldi þannig að $z^0 = 1$, $z^1 = z$, og $z^n = z \cdot z^{n-1}$ þar sem n er náttúrleg tala. Neikvæðu veldin eru skilgreind þannig að z^{-1} er margföldunarandhverfa z og fyrir neikvæð n er $z^n = (z^{-1})^{|n|}$. Með þessu fást sömu veldareglur og gilda um rauntölurnar:

$$\begin{aligned} z^n \cdot z^m &= z^{n+m}, \\ \frac{z^n}{z^m} &= z^{n-m}, \\ z^n \cdot w^n &= (zw)^n, \\ (z^n)^m &= z^{nm}. \end{aligned}$$

48.6 Einingarhringurinn

Einingarhringurinn $\mathbb{T}$ samanstendur af öllum tvinntölum með tölugildi 1. Sérhvert z í $\mathbb{T}$ má því skrifa á forminu $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Tökum nú aðra slíka tölu $w = \cos\beta + i\sin\beta$ og margföldum þær saman:

$$\begin{aligned} zw &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Hér höfum við notað samlagningarformúlur fyrir cos og sin. Af þessari formúlu leiðir regla sem kennd er við de Moivre:

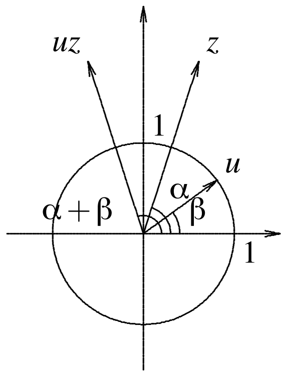
$$\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

48.7 Rúmfræðileg túlkun á margföldun

Látum nú z og w vera tvær tvinntölur með lengdir $|z|$ og $|w|$ og stefnuhornin α og β. Þá fáum við

$$zw = |z||w|\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big).$$

sem segir okkur að lengd margfeldisins sé margfeldi lengda z og w og að að stefnuhorn margfeldisins sé summa stefnuhorna z og w. Ef nú $u \in \mathbb{T}$ er tala á einingarhringnum með stefnuhornið β, þá er uz snúningur á z um hornið β.



48.8 Þríhyrningsójafnan

Tökum tvær tvinntölur z og w og reiknum smávegis:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\
&= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\
&= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2.
\end{aligned}$$

Athugum nú að

$$|\Re z| \le |z| \qquad \text{og} \qquad |\Im z| \le |z|.$$

Af fyrri ójöfnunni leiðir

$$|z+w|^2 \le |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2.$$

Ef við tökum kvaðratrót beggja vegna ójöfnumerkisins, þá fáum við *þríhyrningsójöfnuna*

$$|z+w| \le |z| + |w|.$$

Ef henni er beitt á liðina $z-w$ og w í stað z og w, þá fáum við $|z| = |(z-w)+w| \le |z-w| + |w|$. Jafngilt er að $|z| - |w| \le |z-w|$. Ef við skiptum hlutverkum z og w í þessari ójöfnu, þá fáum við $-|z| + |w| \le |w-z| = |z-w|$. Tvær síðustu ójöfnurnar eru venjulega teknar saman í annað afbrigði þríhyrningsójöfnunnar

$$\big||z| - |w|\big| \le |z-w|.$$

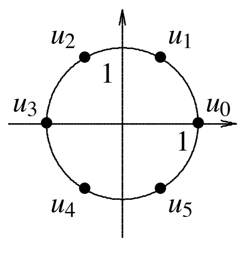
48.9 Einingarrætur

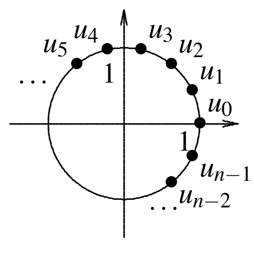
Lítum nú á jöfnuna $z^n = 1$, þar sem $n \ge 2$ er náttúrleg tala. Ef z er lausn hennar, þá er $1 = |z^n| = |z|^n$ sem segir okkur að $|z| = 1$ og að við getum skrifað $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Regla de Moivres segir nú að

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = z^n = 1.$$

Talan 1 hefur horngildið $2\pi k$ fyrir sérhvert $k \in \mathbb{Z}$ og þessi jafna segir okkur því að $n\theta$ sé heiltölumargfeldi af 2π og þar með eru möguleg horngildi tvinntölunnar z gefnar með

$$\theta = 2\pi k/n, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

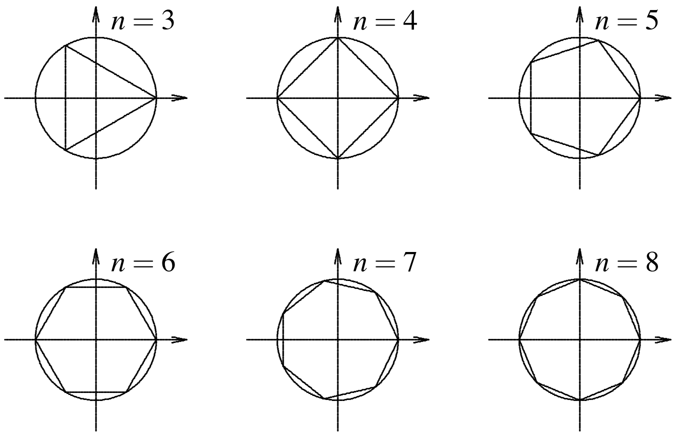




Ef tvær heiltölur k_1 og k_2 hafa sama afgang við
heiltöludeilingu með n, þá er $\cos(2\pi k_1/n) = \cos(2\pi k_2/n)$ og $\sin(2\pi k_1/n) = \sin(2\pi k_2/n)$. Þetta gefur okkur að jafnan $z^n = 1$ hefur n ólíkar lausnir $u_0, \dots, u_{n-1}$, sem nefnast *n-tu rætur af* 1 og eru gefnar með formúlunni

$$u_k = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Þessar tölur eru allar á einingarhringnum. Athugið að $u_0 = 1$, $u_k = u_1^k$ fyrir $k = 1, \dots, n-1$, og að þær raða sér í hornin á reglulegum n-hyrningi.



48.10 Rætur

Látum nú $w = s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ vera gefna tvinntölu af lengd $s \geq 0$ og með stefnuhornið α og leitum að lausnum á jöfnunni $z^n = w$. Ef z er slík lausn og u er n-ta einingarrót, þá er $(zu)^n = z^n u^n = z^n = w$ og því er zu einnig lausn. Nú eru einingarræturnar n talsins og þetta segir okkur að um leið og við finnum eina lausn z_0 þá fáum við n ólíkar lausnir $z_0 u$ með því að stinga inn öllum mögulegum n-tu einingarrótum fyrir u. Látum nú z_0 vera tvinntöluna sem gefin er með formúlunni

$$z_0 = s^{\frac{1}{n}}\big(\cos(\alpha/n) + i\sin(\alpha/n)\big)$$

og færum hana síðan í n-ta veldi,

$$\begin{aligned} z_0^n &= \big(s^{\frac{1}{n}}\big)^n \big(\cos(\alpha/n) + i\sin(\alpha/n)\big)^n \\ &= s\big(\cos(n\alpha/n) + i\sin(n\alpha/n)\big) = w. \end{aligned}$$

Þar með erum við komin með formúlu fyrir einni lausn. Með því að nota formúluna fyrir n-tu einingarrótunum, þá fáum við upptalningu á öllum lausnum jöfnunnar $z^n = w = s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,

$$z_k = s^{\frac{1}{n}}\big(\cos((\alpha + 2\pi k)/n) + i\sin((\alpha + 2\pi k)/n)\big), \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Þessari formúlu má lýsa þannig að n-tu ræturnar eru fundnar þannig að fyrst er fundin ein rót z_0. Henni er snúið um hornið $2\pi/n$ með því að margfalda með $u_1 = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ yfir í $z_1 = u_1 z_0$. Næst er z_1 snúið um hornið $2\pi/n$ í $z_2 = u_1 z_1$ og þannig er haldið áfram þar til n ólíkar rætur eru fundnar.

Dæmi 48.10.1. Reiknið $(2+5i)-(3-i)(5+2i)$.
Lausn: Byrjum á að margfalda og síðan leggjum við saman eins og vanalega

$$(2+5i)-(3-i)(5+2i) = 2+5i-(15+6i-5i-2i^2)$$
$$= 2+5i-15-6i+5i-2 = -15+4i.$$

Dæmi 48.10.2. Finnið raunhluta, þverhluta, samok og margföldunarandhverfu $(1+2i)$.
Lausn: Raunhlutinn er $\mathrm{Re}(1+2i)=1$ og þverhlutinn er $\mathrm{Im}(1+2i)=2$. Samokið er svo $\overline{1+2i}=1-2i$. Margföldunarandhverfan er svo samok tölunnar deilt með lengd hennar í öðru veldi eða

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{1^2+2^2} = \frac{1-2i}{5}.$$

Dæmi 48.10.3. a) Finnið pólhnit tölunnar $-1+i$.
Lausn: Lengdin er $\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. Hornið er síðan $\frac{3\pi}{4}$, það fæst með $\frac{\pi}{2}+\arctan(1/1)$, (auðvelt að sjá á mynd).
b) Reiknið $(-1+i)^8$.
Lausn: Við fundum pólhnitin í síðasta lið. Við notum þau í reglu De Moivre:

$$(-1+i)^8 = (\sqrt{2}\cos(3\pi/4)+\sqrt{2}(3\pi/4))^8 = \sqrt{2}^8(\cos(8\cdot 3\pi/4)+\sin(8\cdot 3\pi/4))$$
$$= 16(\cos(6\pi)+i\sin(6\pi)) = 16.$$

Dæmi 48.10.4. a) Finnið allar fimmtu rætur af 1.
Lausn: Lengd allra fimmtu rótanna hlýtur er einn. Þá viljum við finna öll θ á bilinu $[0,2\pi[$ þ.a. $\cos(5\theta)=1$, en það eru þau θ á bilinu þannig að $5\theta=k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, þ.e. $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$. Það eru sem sagt möguleg stefnuhorn. Þá höfum við pólhnit allra fimmtu rótanna.
b) Finnið allar fimmtu rætur $(16-16i)$.
Lausn: Við byrjum á því að finna eina fimmtu rót. Stefnuhorn $(16-16i)$ er $\frac{7\pi}{4}$ og lengd tölunnar er $16\sqrt{2}$. Þá fáum við fimmtu rótina $\sqrt[5]{16\sqrt{2}}(\cos(7\pi/4\cdot 5)+i\sin(7\pi/4\cdot 5)) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{20}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{20}\right)\right)$. Með því að margfalda þessa lausn með mismunandi fimmtu einingarrótunum fáum við allar fimmtu ræturnar:

$$\sqrt{2}\left(\cos(7\pi/20+\frac{2k\pi}{5})+i\sin(7\pi/20+\frac{2k\pi}{5})\right), \quad k=0,1,2,3,4.$$

48.11 Núllstöðvar annars stigs margliðu

Við getum skilgreint margliður með tvinntölustuðulum á nákvæmlega sama hátt og fyrr, en það eru stærðtákn af gerðinni

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

þar sem $a_0, \ldots, a_n$ eru tvinntölur, $a_n \neq 0$ og z er breyta sem tekur gildi í tvinntölunum. Við getum litið á P sem fall sem skilgreint er á $\mathbb{C}$ og tekur gildi í $\mathbb{C}$. Talan n kallst þá eins og áður stig margliðunnar.
Tvinntala α er sögð vera *núllstöð* eða *rót* margliðunnar P ef $P(\alpha) = 0$.

Nú viljum við leysa jöfnuna $az^2 + bz + c = 0$ og ganga út frá því að stuðlarnir a, b og c séu tvinntölur og að $a \neq 0$. Þetta er gert nánast eins og fyrir rauntölur, en niðurstaðan verður almennari.
Fyrsta verkið er að deila báðum hliðum með a og fá þannig jafngilda jöfnu $z^2 + Bz + C = 0$, þar sem $B = b/a$ og $C = c/a$. Næsta skref er að líta á tvo fyrstu liðina $z^2 + Bz$ og skrifa þá sem ferning að viðbættum fasta. Með orðinu ferningur er átt við fyrsta stigs stærðtákn í öðru veldi, $(z+\alpha)^2$. Ferningsreglan fyrir summu segir að $(z+\alpha)^2 = z^2 + 2\alpha z + \alpha^2$. Því er

$$0 = z^2 + Bz + C = \left(z + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + C.$$

Þetta segir okkur að upphaflega jafnan jafngildi

$$0 = (az^2 + bz + c)/a = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}.$$

Með því að draga töluna $-b^2/(4a^2) + c/a$ frá báðum hliðum, þá fáum við jafngilda jöfnu

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Tvinntalan $D = b^2 - 4ac$ nefnist *aðgreinir* eða *aðskilja* jöfnunnar. Ef $D \neq 0$, þá hefur D tvær kvaðratrætur. Látum $\sqrt{D}$ tákna aðra þeirra. Þá er hin jöfn $-\sqrt{D}$ og við fáum tvær ólíkar lausnir

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad \text{og} \qquad z_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Ef $D = 0$, fæst ein lausn

$$z = \frac{-b}{2a}.$$

Í sértilfellinu þegar $D \in \mathbb{R}$ og $D < 0$ þá getum við alltaf valið kvaðratrót $\sqrt{D} = i\sqrt{|D|}$ og lausnarformúlan verður

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a} \qquad \text{og} \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Munið að ef α er jákvæð rauntala, þá táknar $\sqrt{\alpha}$ alltaf jákvæðu töluna sem uppfyllir $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$. Að sjálfsögðu er $\sqrt{0} = 0$. Ef $\alpha \neq 0$ er tvinntala og α er ekki jákvæð rauntala, þá er hefur $\sqrt{\alpha}$ enga staðlaða merkingu. Við vitum bara að það eru til tvær tvinntölur β og γ sem eru kvaðratrætur α og um þær gildir að $\gamma = -\beta$.

48.12 Meginsetning algebrunar

Við byrjuðum á því að innleiða tvinntölurnar með það fyrir augum að geta leyst jöfnur sem hafa engar rauntölulausnir. Meginsetning algebrunnar segir að sérhver margliða af stigi ≥ 1 með tvinntölustuðlum hafi núllstöð í $\mathbb{C}$. Það er því ekki hægt að segja annað en að útvíkkun talnakerfisins frá rauntölum yfir í tvinntölur sé vel heppnuð. Sönnunin á meginsetningunni krefst töluverðrar þekkingar í stærðfræðigreiningu og er venjulega kennd á öðru ári í háskóla.

Við skulum taka meginsetninguna trúanlega og athuga nokkrar merkilegar afleiðingar hennar. Margliðudeiling er eins fyrir margliður með tvinntölustuðla og margliður með rauntölustuðla. Ef við tökum margliðu P af stigi $m \geq 1$ og deilum $(z-\alpha)$ upp í hana, þá fáum við

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z) + C$$

þar sem Q er margliða af stigi $m-1$ og C er tvinntala. Með því að setja $z = \alpha$ inn í jöfnuna, þá sjáum við að $C = P(\alpha)$. Þetta gefur okkur þáttaregluna sem segir að $(z-\alpha)$ gangi upp í margliðunni $P(z)$ þá og því aðeins að α sé núllstöð P.

Segjum nú að α sé núllstöð í P og að stigið sé $m \geq 2$. Þá er Q af stigi $m-1$ og samkvæmt meginsetningunni hefur Q núllstöð β. Við þáttum Q með $z-\beta$ og fáum þannig $P(z) = (z-\alpha)(z-\beta)R(z)$ þar sem R er margliða af stigi $m-2$. Þessu er unnt að halda áfram þar til við endum með fullkomna þáttun á P í fyrsta stigs liði

$$P(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_m)$$

þar sem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ er upptalning á öllum núllstöðvum með hugsanlegum endurtekningum og $A \neq 0$ er tvinntala.

48.13 Margliður með rauntölustuðla

Við lítum allaf á rauntölurnar sem hluta af tvinntölunum og því er sérhver margliða með rauntölustuðla jafnframt margliða með tvinntölustuðla. Meginsetning algebrunnar á því einnig við um þessar margliður. Hugsum okkur nú að $P(z)$ sé margliða af stigi $m \geq 1$ með rauntölustuðla $a_0, \ldots, a_m$ og að $\alpha \in \mathbb{C}$ sé núllstöð hennar og gerum ráð fyrir að α sé ekki rauntala. Með því að beita reiknireglunum fyrir samok og þá sérstaklega að $\bar{a}_j = a_j$, þá fáum við

$$0 = P(\alpha) = \overline{P(\alpha)} = \overline{\sum_{k=0}^{m} a_k \alpha^k} = \sum_{k=0}^{m} \overline{a_k}\,\overline{\alpha^k} = \sum_{k=0}^{m} a_k (\overline{\alpha})^k = P(\bar{\alpha}).$$

Við höfum því sýnt að $\bar{\alpha}$ er einnig núllstöð P. Við getum því þáttað út $(z-\alpha)$ og $(z-\bar{\alpha})$. Athugum að

$$(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha+\bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha} = z^2 - 2(\Re\,\alpha)z + |\alpha|^2.$$

Nú beitum við þáttareglunni og sjáum að í þessu tilfelli fæst þáttun á $P(z)$ í tvær rauntalnamargliður

$$P(z) = \left(z^2 - 2(\Re\,\alpha)z + |\alpha|^2\right)Q(z).$$

Dæmi 48.13.1. Finnið allar rætur margliðunnar $x^2 - 2 + 5$.
Lausn: Hér notum við lausnarformúlu annrs stigs jöfnu beint, lausnirnar verða

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i.$$

Dæmi 48.13.2. Leysið jöfnuna $ix^2+2x+2+2i=0$.
Lausn: Við setjum beint inn í lausnarformúlu annars-stigs jöfnu. Fáum lausnirnar

$$\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4i(2+2i)}}{2i}=\frac{-2\pm\sqrt{12-8i}}{2i}=\frac{-2}{2i}\pm\sqrt{\frac{12-8i}{(2i)^2}}=i\pm\sqrt{2i-3}.$$

48.14 Útvíkkun veldisvísisfallsins og jöfnur Eulers

Við höfum séð hvernig skilgreiningarmengi margliða er útvíkkað frá því að vera rauntalna-ásinn $\mathbb{R}$ yfir í það að vera allt tvinntalnaplanið $\mathbb{C}$. Þetta er hægt að gera á eðlilegan máta fyrir mörg föll sem skilgreind eru á hlutmengjum á rauntalnalínunni þannig að þau fái náttúrlegt skilgeiningarsvæði í $\mathbb{C}$.
Veldisvísisfallið $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er andhverfa náttúrlega lograns sem skilgreindur er með heildinu

$$\ln x=\int_1^x\frac{dt}{t},\qquad x>0.$$

Talan e er skilgreind með $e=\exp(1)$. Nú útvíkkum við skilgreiningarsvæði exp þannig að það verði allt $\mathbb{C}$ með formúlunni

$$\exp(z)=e^x(\cos y+i\sin y),\qquad z=x+iy\in\mathbb{C},\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Stingum nú hreinni þvertölu $i\theta$ þar sem $\theta\in\mathbb{R}$ inn í veldisvísisfallið $e^{i\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)\in\mathbb{T}$. Þetta segir okkur að vörpunin $\theta\mapsto e^{i\theta}$ varpi rauntalnalínunni á einingarhringinn.
Stillum nú upp tveimur jöfnum

$$\begin{aligned}e^{i\theta}&=\cos\theta+i\sin\theta,\\ e^{-i\theta}&=\cos\theta-i\sin\theta.\end{aligned}$$

Tökum nú summu af hægri hliðum og vinstri hliðum. Þá fæst $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$. Tökum síðan mismun af því sama. Þá fæst $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$. Út úr þessu fæst samband milli veldisvísisfallsins og hornafallanna sem nefnt er *jöfnur Eulers*,

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\\ \sin\theta&=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.\end{aligned}$$

48.15 Samlangningarformúla veldisvísisfallsins

Munum að veldisvísisfallið $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto e^x$, uppfyllir regluna $e^{a+b}=e^ae^b$ fyrir allar rauntölur a og b. Þessi regla er nefnd *veldaregla* eða *samlagningarregla* veldisvísisfallsins. Nú skulum við taka tvær tvinntölur $z=x+iy$ og $w=u+iv$ og sjá hvernig þessi regla alhæfist þegar við erum búin að framlengja skilgreiningarsvæði veldisvísisfallsins yfir í allt tvinntalnaplanið $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}e^ze^w&=e^x(\cos y+i\sin y)e^u(\cos v+i\sin v)\\ &=(e^xe^u)(\cos y+i\sin y)(\cos v+i\sin v)\\ &=e^{x+u}(\cos(y+v)+i\sin(y+v))\\ &=e^{(x+u)+i(y+v)}=e^{(x+iy)+(u+iv)}=e^{z+w}.\end{aligned}$$

Við höfum því að samlagningarformúlan fyrir veldisvísisfallið gildir áfram eftir að það hefur verið framlengt yfir á allt tvintalnaplanið $\mathbb{C}$.

Dæmi 48.15.1. Reiknið $e^{\ln(5)+\frac{i\pi}{3}}$.
Lausn: Við setjum þetta beint inn í formúlu og fáum

$$e^{\ln(5)+\frac{i\pi}{3}} = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5+5\sqrt{3}i}{2}.$$

Dæmi 48.15.2. Notið formúlur Eulers til að einfalda $\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(2\theta)$.
Lausn: Notum formúlur Eulers. Fáum

$$\begin{aligned}\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(2\theta) &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2} \\ &= \frac{(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})}{8i} = \frac{e^{4i\theta}-e^{-4i\theta}}{8i} = \frac{\sin(4\theta)}{4}.\end{aligned}$$

49 Fylki og línuleg algebra

49.1 Línulegt jöfnuhneppi

Látum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vera óþekktar stærðir. Jafna af gerðinni $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ þar sem $a_1, a_2, \ldots, a_n, c$ eru einhverjar tölur kallast *línuleg jafna*, og ef við höfum margar slíkar jöfnur fyrir óþekktu stærðirnar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ þá kallast þær saman *línulegt jöfnuhneppi*.
Ef $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eru tölur þ.a. $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = c$ þá segjum við að $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sé *lausn* á jöfnunni, og mengi allra slíkra lausna $\{(b_1, b_2, \ldots, b_n) : a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = c\}$ kallast *lausnamengi jöfnunnar*.
Fyrir gefið jöfnuhneppi kallast stak $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sem er lausn á öllum jöfnum hneppisins *lausn á jöfnuhneppinu* og mengi allra slíkra lausna kallast *lausnamengi jöfnuhneppisins*. Að finna allar lausnir á jöfnuhneppi kallast að *leysa jöfnuhneppið*.

49.2 Lausnir á línulegum jöfnuhneppum

Sú aðferð sem mest er notuð við að leysa línuleg jöfnuhneppi kallast *Gauss-eyðing*. Aðferðin er ekki ýkja flókin og gengur í stuttu máli út á að fækka óþekktu breytistærðunum í jöfnum hneppisins þar til auðvelt er orðið að lesa út lausnamengi þess. Aðferðin er best útskýrð með dæmi:

Dæmi 49.2.1. Finnum lausnamengi eftirfarandi jöfnuhneppis:

$$\begin{aligned} 6x+3y+z &= 10 \qquad (1)\\ 2x-y+2z &= 3 \qquad (2)\\ x+y+z &= 3. \qquad (3)\end{aligned}$$

Lausn:

Byrjum á að margfalda jöfnu (2) með 3 og jöfnu (3) með 6 og fáum þá:

$$
\begin{align}
6x+3y+z &= 10 \tag{1}\\
6x-3y+6z &= 9 \tag{2}\\
6x+6y+6z &= 18. \tag{3}
\end{align}
$$

Drögum nú jöfnu (1) frá jöfnum (2) og (3). Þar með höfum við eytt óþekktu stærðinni x út úr jöfnum (2) og (3):

$$
\begin{align}
6x+3y+z &= 10 \tag{1}\\
-6y+5z &= -1 \tag{2}\\
3y+5z &= 8. \tag{3}
\end{align}
$$

Margföldum nú jöfnu (3) með 2 og fáum:

$$
\begin{align}
6x+3y+z &= 10 \tag{1}\\
-6y+5z &= -1 \tag{2}\\
6y+10z &= 16. \tag{3}
\end{align}
$$

Leggjum nú jöfnu (2) við jöfnu (3). óþekktu stærðinni y hefur þá verið eytt úr jöfnu (3):

$$
\begin{align}
6x+3y+z &= 10 \tag{1}\\
-6y+5z &= -1 \tag{2}\\
15z &= 15. \tag{3}
\end{align}
$$

Nú er ljóst út frá jöfnu (3) að eina gildið sem óþekkta breytistærðin z getur tekið sem gefur lausn á hneppinu er $z=1$. Við getum því sett $z=1$ í jöfnur (1) og (2). Við fáum þá út jöfnurnar:

$$
\begin{align}
6x+3y+1 &= 10 \tag{1}\\
-6y+5 &= -1. \tag{2}
\end{align}
$$

Jafna (2) gefur nú að eina gildið sem óþekkta breytistærðin y getur tekið sem gefur lausn á hneppinu er $y=1$. Setjum því $y=1$ í jöfnu (1) og fáum:

$$
6x+3+1 = 10. \tag{1}
$$

Þessi jafna gefur okkur nú að $x=1$ og við höfum þar með sýnt að jöfnuhneppið hefur aðeins lausnina $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Dæmi 49.2.2. Leysið jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} 4a+2b-c &= 2, \\ a-b+c &= 12, \\ a+b+c &= 5. \end{aligned}$$

Lausn: Við byrjum á að leggja neðri tvær jöfnurnar saman, þá fáum við $2a+2c=17$ sem gefur $c=\frac{17}{2}-a$.
Við leggjum síðan jöfnuna í miðjunni tvisvar við efstu jöfnuna og fáum $6a+c=26$. Við stingum inn $\frac{17}{2}-a$ inn fyrir c. Nú gildir:

$$6a+\frac{17}{2}-a=5a+\frac{17}{2}=26 \iff 5a=\frac{35}{2} \iff a=\frac{7}{2}.$$

Þegar a er ákvarðað finnum við c með $c=\frac{17}{2}-a=\frac{17-7}{2}=5$. Með því að stinga því svo inn í síðustu jöfnuna jöfnuna fáum við $b=5-c-a=-a=\frac{-7}{2}$. Þá er lausn jöfnuhneppisins

$$a=\frac{7}{2}, \quad b=\frac{-7}{2}, \quad c=5.$$