Margliður, veldisföll og ræð föll

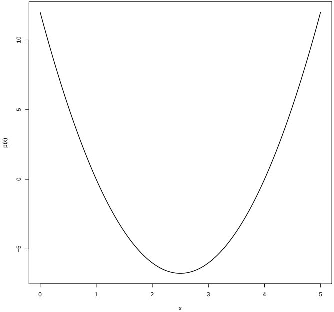
math104-1calc Inngangur að stærðfræðigreiningu

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

September 20, 2015

Annars stigs margliður-fleygbogar

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$



Margliður eru notaðar út um allt: margliður í tíma í tölvunarfræði; BMI í heilsufræðum gerir ráð fyrir kvaðratsambandi þyngdar og hæðar; í fiskifræði er oftar gert ráð fyrir þriðja veldi...
Spurningar:

- Hvaða rætur hefur margliðan (fyrir hvaða x gildir $p(x) = 0$)?
- Er hægt að þátta margliðuna í einfaldari þætti (eru til q og m þannig að $p(x) = q(x)m(x)$)?
- Hvernig er best að teikna margliðuna?
- Er til x þannig að $p(x)$ sé hæsta mögulega gildi margliðunnar?

Að teikna margliður

Myndræn framsetning er nauðsynleg til að sjá eiginleika falla og margliður eru engin undantekning.

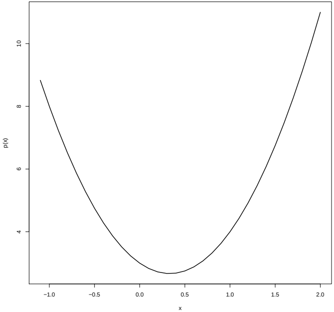


Figure : Margliðan $3 * x^2 - 2 * x + 3$.

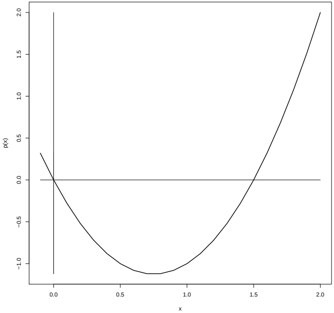
Margliður sem föll

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

p er fall
$p(x)$ er tala
Ef x er tala þá er $p(x)$ önnur tala

Einfalt tilvik: c=0

Ef $c = 0$ verður $p(x) = ax^2 + bx$.
Ef finna skal rót, þ.e. finna x þannig að $p(x) = 0$ þarf að leysa $ax^2 + bx = 0$.
Athugum þá að $ax^2 + bx = x(ax + b)$. Þetta er margfeldi tveggja liða, þ.e. x og $ax + b$ en slíkt margfeldi er núll þá og því aðeins að annar hvor liðurinn sé núll, þ.e. $x = 0$ eða $ax + b = 0$.
Við höfum sýnt að $ax^2 + bx = 0$ ef og aðeins ef $x = 0$ eða $x = -b/a$.



Um rætur

Margliðan $p(x) = ax^2 + bx + c$

Teiknum: $(x, p(x))$ gefur fleygboga

Getur snert x-ásinn, skorið í tveimur punktum eða hvergi snert

Snerti- eða skurðpunktar við x-ás: $p(x) = 0$

Jafnan $p(x) = 0$ hefur í mesta lagi tvær lausnir

Athugið að margliða hefur alltaf sama formerki á milli róta. Ef t.d. $p(x) = 0$ aðeins í x_1 og x_2 (með $x_1 < x_2$), þá hefur hún fast formerki á hverju bilanna $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) og (x_2, ∞).

Margliða sem margfeldi einfaldra liða

G.r.f. $p(x) = ax^2 + bx + c$ hefur ræturnar α og β,
þ.e. $p(\alpha) = 0$ og $p(\beta) = 0$.
Þá gildir: $p(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$

Tengsl róta og stuðla

$p(x) = ax^2 + bx + c$ hafi rætur α og β
þ.e. $p(\alpha) = 0$ og $p(\beta) = 0$
svo $p(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$.
Nú er $p(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) = a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)$
svo $p(x) = ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta$
þ.e. $-a(\alpha+\beta) = b$ og $a\alpha\beta = c$
Ef $a = 1$: $b = -(\alpha+\beta)$ og $c = \alpha\beta$

Almennar margliður

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Sértilvik $n = 2$:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Sértilvik $n = 3$:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Að margfalda margliðu með annarri

Þurfum að margfalda alla liði úr annarri með öllum úr hinni

$$q(x) = 2x + 3$$

$$p(x) = 5x^2 - 4x + 1$$

þá er $p(x)q(x) = \dots$

Umritun annars stigs margliðu

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Rætur annars stigs margliðu

Margliðan $p(x) = ax^2 + bx + c$ hefur lausnirnar

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ef

$$D = b^2 - 4ac > 0.$$

Margliður með heiltölustuðla

Ef margliða með heiltölustuðla hefur rætur sem eru heilar tölur eða ræðar, þá má finna þær á einfaldan hátt.
Ef k er heil tala sem er rót í margliðu með heiltölustuðla,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0,$$

þá gildir $p(k) = 0$ og þar með

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \ldots + a_1 k = -a_0.$$

Athugum að k gengur upp í öllum liðum vinstra megin og þar með upp í fastanum a_0.
Á svipaðan hátt má sjá að ef ræð tala er rót heiltölumargliðu, þá þarf teljarinn að ganga upp í a_0 og nefnarinn upp í a_n.

Dæmi: Einu mögulegu heiltölulausnirnar á $x^5 + 2x - 1 = 0$ eru ± 1. Hvorug er rót, svo margliðan hefur engar heiltölurætur.

Margliðudeiling

Dæmi: Deilum margliðunni $x+2$ upp í margliðuna $2x^2+6x+4$.
Byrjum á að rita þetta sem deilingu. Finnum síðan, hvað þarf að margfalda x með til að fá rétt hæsta veldið, þ.e. $2x^2$, en það er $2x$. Skrifum þetta fyrir ofan strikið sem fyrsta hluta deilingarinnar:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 2x \\ \cline{3-3}
x+2 & | & 2x^2+6x+4
\end{array}
$$

Margföldum nú $x+2$ með því sem komið eri (þ.e. með $2x$), fáum út úr því $2x^2+4x$ og drögum frá eins og í venjulegri deilingu:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & 2x \\ \cline{3-3}
x+2 & | & 2x^2+6x+4 \\
 & & 2x^2+4x \\ \cline{3-3}
 & & \quad 2x+4
\end{array}
$$

Nú er ljóst að $2(x+2)=2x+4$ og því vantar okkur aðeins 2 fyrir ofan strik:

Veldisföll (power functions)

$$y(x) = x^a$$

Einföldustu veldisföllin er heltöluveldi, t.d. $y = kx^3$ sem er stundum notað til að lýsa sambandi þyngdar (y) og lengdar (x). Yfirleitt kemur í ljós að slík föll eru ekki nægjanleg, heldur þarf að nota $y = kx^a$ þar sem a er nálægt 3.

Gildi veldisfalls með $a > 0$ hækkar með x. Veldið ræður því hve hröð aukningin er. Ef $a < b$ þá endar $y = cx^b$ fyrir ofan $y = kx^a$, sama hvaða gildi eru valin á c og k – notað t.d. í tölvunarfræði.

Ræð föll

Ef p og q eru margliður, þá nefnist p/q rætt fall.
Ef q hefur rót í tölu x en ekki p, þ.e. $q(x) = 0$ og $p(x) \neq 0$, þá hefur ræða falli p/q **skaut** í x.

Dæmi:

$$\frac{1}{x}$$

Dæmi:

$$\frac{1}{x-2}$$

Dæmi:

$$\frac{x+1}{1-x}$$