math104-2calc Runur, markgildi og samfelldni

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

16. september 2015

Efnisyfirlit

1 Runur og markgildi

1.1 Óendanleg runa

Fall

$$f : \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\} \to \mathbb{R}$$

þar sem $n_0 \in \mathbb{Z}$ kallast óendanleg runa (sequence). Gildin $f(n)$ sem við skrifum venjulega sem a_n, b_n, o.s.frv. kallast liðir rununnar.

Runa er oft skrifuð $\{a_n\}$ eða $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$
Runan er **kvótaruna** ef til er tala q þannig að $a_{n+1}/a_n = q$.
Runur eru mikið notaðar í hagfræði, verkfræði, líffræði o.s.frv., m.a. koma mælingar á tímaröðum fram sem runur.
Ávöxtun í banka myndar kvótarunu, sömuleiðis hagnaður fyrirtækja. Slikar runur þarf að núvirða o.fl.

Skilgreining 1.1. Fall

$$f : \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\} \to \mathbb{R}$$

þar sem $n_0 \in \mathbb{Z}$ kallast óendanleg runa (sequence). Gildin $f(n)$ sem við skrifum venjulega sem a_n, b_n, o.s.frv. kallast liðir rununnar.

Runa er oft skrifuð $\{a_n\}$ eða $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$

Athugasemd 1.1. Oftast er f skilgreint á mengi náttúrlegra talna, eða á $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Skilgreining 1.2. Runan $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ er **kvótaruna** ef til er tala q þannig að $a_{n+1} = qa_n$ fyrir öll n.

Dæmi 1.1. Runur eru mikið notaðar í hagfræði, verkfræði, líffræði o.s.frv., m.a. koma tímaraðarmælingar fram sem runur.

Dæmi 1.2. Ávöxtun í banka myndar t.d. runu, sömuleiðis hagnaður fyrirtækja. Slikar runur þarf að núvirða o.fl.

Dæmi 1.3. 1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

þ.e. $f(n) = a_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

2. $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

   þ.e. $a_n = n, \quad n = 1, 2, \ldots$

3. $1, -1, 1, -1, \ldots$

   þ.e. $a_n = (-1)^n \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

4. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

   þ.e. $a_n = \frac{1}{2n+1} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

5. $0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \ldots$

   þ.e. $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

1.2 Endurkvæmni (recursion)

Oft er liður n í rununni skilgreindur út frá næstu liðum á undan, þ.e.

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots)$$

Dæmi

1. $a_n = ka_{n-1}, \qquad k$ fasti
   (hér er auðvelt að sjá að $a_n = k^n a_0$).

2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad a_1 = 1, a_2 = 2.$
   (Fibonacci runan: 1,1,2,3,5,8, ...)

Dæmi (skordýr): $N_t = N_{t-1} + rN_{t-1}(1 - N_{t-1}/K)$.
Dæmi (fiskar): $N_t = \frac{\alpha N_{t-1}}{(1+N_{t-1}/K)}$ - Beverton-Holt jafnan um nýliðun.
Í dæmunum sem við höfum skoðað þá er gefin formúla fyrir n-ta liðnum í rununni, t.d. $a_n = 1/n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$. Oft er hins vegar liður n í rununni skilgreindur út frá næstu liðum á undan, þ.e.

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots)$$

Ef slík regla er gefin, ásamt fyrstu gildum, þá er runan skilgreind á endurkvæman hátt (recursively). <u>Dæmi:</u>

1. Kvótaruna: $a_n = ka_{n-1}, \qquad k$ fasti
   (hér er auðvelt að sjá að $a_n = k^n a_0$).

2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad a_1 = 1, a_2 = 2.$
   (Fibonacci runan: 1,1,2,3,5,8, ...)

Dæmi (skordýr): $N_t = N_{t-1} + rN_{t-1}(1 - N_{t-1}/K)$.
Dæmi (fiskar): $N_t = \frac{\alpha N_{t-1}}{(1+N_{t-1}/K)}$ - Beverton-Holt jafnan um nýliðun.

1.3 Fastapunktar

Skilgreining: Ef a_n er skilgreing endurkvæmt með t.d. $a_n = F(a_{n-1})$ og $F(a) = a$ þá nefnist a **fastapunktur** rununna.

Dæmi (tölvunarfræði): Ef $x > 0$, finnið þá fastapunkt(a) rununnar $a_n = \frac{a_{n-1}+x/a_{n-1}}{2}$. Skilgreining: Ef a_n er skilgreing endurkvæmt með t.d. $a_n = F(a_{n-1})$ og $F(a) = a$ þá nefnist a **fastapunktur** rununna.
Dæmi: Ef $x > 0$, finnið þá fastapunkt(a) rununnar $a_n = \frac{a_{n-1}+x/a_{n-1}}{2}$.

1.4 Samleitni og markgildi

Runan $\{a_n\}$ er sögð samleitin með markgildið L ef:
fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til N þ.a.

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \forall n > N$$

Þetta er skrifað

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

(eða $a_n \to L$ þegar $n \to \infty$)

ATH: L verður að vera fastapunktur rununnar!

Það má þá komast eins nálægt L og og verkast vill - **og halda sig þar**.
Dæmi: Flest líkön af dýrastofnum hafa jafnvægispunkt, t.d. $B_{t+1} = B_t + rB_t(1 - B_t/K) - pB_t$ fyrir lífmassa fiska, þar sem p er veiðihlutfallið.
Varúð: EF runa er samleitin, ÞÁ er hún samleitin að fastapunkti. Það er EKKI gefið að runa sé samleitin þótt hún eigi sér fastapunkt(a). Ef við vitum að runa sé samleitin, þá dugar að kanna fastapunktana.
Skilgreining: Runan $\{a_n\}$ er sögð samleitin með markgildið L ef:
fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til N þ.a.

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \forall n > N$$

Þetta er skrifað

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

(eða $a_n \to L$ þegar $n \to \infty$)

Þetta má orða lauslega þannig að hægt sé að komast eins nálægt L og okkur lystir með því að taka N nægilega stórt.

Ath: N er háð ε, þ.e. $N = N(\varepsilon)$

ATH: L verður að vera fastapunktur rununnar!
Varúð: EF runa er samleitin, ÞÁ er hún samleitin að fastapunkti. Það er EKKI gefið að runa sé samleitin þótt hún eigi sér fastapunkt(a). Ef við vitum að runa sé samleitin, þá dugar að kanna fastapunktana.

Dæmi: Flest líkön af dýrastofnum hafa jafnvægispunkt. Fyrir fiskistofna er t.d. litið á fjölda dýra eða lífmassa, B_t, og reiknað hvert sú runa stefnir (miðað við tilteknar forsendur).
Dæmi:

1. Stefnir $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ á 1 þegar $n \to \infty$?
$$a_n = \frac{n+2}{n+1} = \frac{1+n+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$
Notum nú skilgreininguna á markgildi til að sýna fram á að $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, þ.e. sýnum að
$$|a_n - 1| < \varepsilon$$
fyrir gefið ε, ef n er nógu stórt.
Nú er
$$|a_n - 1| = \left|\frac{1}{n+1}\right|$$
Veljum N þ.a. $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$
$$\Rightarrow \quad N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$
Ef $n > N$ þá gildir (vegna $n > N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$)
$$|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$
og þá er $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

2. Sýnum að $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.
$\Big($ Athugum að $\frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+1/n} \approx \frac{2}{1}$ ef n er stórt$\Big)$
$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n - 2(n+1)}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$$
Gefið ε, veljum N þ.a. $\frac{2}{N} < \varepsilon$, þ.e. $N > \frac{2}{\varepsilon}$. Þá er
$$|a_n - 2| < \frac{2}{n} < \frac{2}{N} < \varepsilon \qquad \forall n > N$$

1.5 Ósamleitni

Ef ekki er hægt að finna neina tölu L þ.a.
$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \forall n > N$$
sé uppfyllt þá er runan ósamleitin.

Dæmi: Mörg dæmi úr líffræði fjalla um dýrastofna (skordýr, hreindýr, fiskar) sem þróast í tíma án þess að leita í jafnvægi.
Dæmi: Runan
$$a_n = (-1)^n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
er greinilega ósamleitin. Einnig
$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{n-1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Skilgreining: Ef ekki er hægt að finna neina tölu L þ.a.

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \forall n > N$$

sé uppfyllt þá er runan ósamleitin.

Dæmi: Mörg dæmi úr líffræði fjalla um dýrastofna (skordýr, hreindýr, fiskar) sem þróast í tíma án þess að leita í jafnvægi.
Dæmi: Runan

$$a_n = (-1)^n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

er greinilega ósamleitin. Einnig

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{n-1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

1.6 Skilgreining

Runa stefnir á óendanlegt ef "halinn endar alltaf fyrir ofan hvaða tölu sem er":
Runan $\{a_n\}$ stefnir á ∞ ef

$$\forall Y > 0, \quad \text{þá} \quad \exists N \quad \text{þ.a.} \quad a_n > Y, \quad \forall n > N$$

Ath: $\forall$ þýðir „fyrir öll“ og $\exists$ þýðir „til er“.
Dæmi: Sum stofnlíkön þróast í tíma þannig að stofninn stækkar upp úr öllu valdi, oft með veldisvexti, t.d. $N_t = 2N_{t-1}$.
Dæmi: Í tölvunarfræði er mikill áhugi á, hve hratt erfiðleikastig eykst eftir stærð verkefnis. Stærð verkefnis getur t.d. verið fjöldi borga í "travelling salesman"verkefninu, en þá kemur runa sem stefnir á óendanlegt.
Skilgreining: Runan $\{a_n\}$ stefnir á ∞ ef

$$\forall Y > 0, \quad \text{þá} \quad \exists N \quad \text{þ.a.} \quad a_n > Y, \quad \forall n > N$$

Ath: $\forall$ þýðir „fyrir öll“ og $\exists$ þýðir „til er“.

Skilgreiningin segir þá að runuliðirnir verði stærri en hvaða tala sem er ef N er tekið nógu stórt. Athugið að N er háð Y, $N = N(Y)$

Ath: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ þýðir þá:

$$\forall Y > 0 \quad \exists N \quad \text{þ.a.} \quad a_n < -Y, \quad \forall n > N$$

1.7 Markgildisreglur

Þessar setningar eru nauðsynlegar til að geta unnið eitthvað með markgildin, og víð tökum varla eftir því að við notum þær t.d. þegar við reiknum $\lim 1 - \frac{1}{n} = 1 - \lim \frac{1}{n} = 0$.
Með þeim er auðvelt að reikna markgildi af ýmsum runum s.s. $1 + \frac{n}{2n+1}$ o.s.frv.
Setning: Látum $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\quad \lim_{n\to\infty} b_n = B$. Þá er

1. $\lim(a_n + b_n) = A + B$

$$(|a_n + b_n - (A+B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B|)$$

Látum $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Þá er

1. $\lim(a_n + b_n) = A + B$
2. $\lim(a_n - b_n) = A - B$
3. $\lim a_n b_n = A \cdot B$
4. $\lim k a_n = kA$
5. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \qquad (B \neq 0)$

2. $\lim(a_n - b_n) = A - B$

3. $\lim a_n b_n = A \cdot B$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\ &= |a_n(b_n - B) + (a_n - A)B| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |a_n - A| \cdot |B| \\ &\leq K|b_n - B| + |a_n - A| \cdot B \end{aligned}$$

(Því ef $\{a_n\}$ er samleitin þá er hún takmörkuð (sjá hér á eftir)).

4. $\lim k a_n = kA$

5. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \qquad (B \neq 0)$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - A b_n}{b_n B}\right| \\ &= \left|\frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{b_n B}\right| \\ &= \frac{1}{|b_n||B|} \left|(a_n - A)B + A(B - b_n)\right| \\ &\leq \frac{1}{|b_n||B|} \left(|a_n - A||B| + |A||B - b_n|\right) \end{aligned}$$

(ef $b_n \to B \neq 0$ þá er $|b_n| > k$ fyrir öll „nægjanlega stór“ n)

$$\leq \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{|B|} \cdot \left(|a_n - A||B| + |A||B - b_n|\right)$$

Dæmi: Þessar setningar eru nauðsynlegar til að geta unnið eitthvað með markgildin, og víð tökum varla eftir því að við notum þær t.d. þegar við reiknum $\lim 1 - \frac{1}{n} = 1 - \lim \frac{1}{n} = 0$.

1.8 Einhalla runur

Runan $\{a_n\}$ er (stíft) **vaxandi** ef $a_n < a_{n+1} \qquad \forall n$ og
ekki-minnkandi ef $a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n$

Runan er (stíft) **minnkandi** ef $a_n > a_{n+1} \qquad \forall n$ og
ekki-vaxandi ef $a_n \geq a_{n+1} \qquad \forall n$

Runa sem er annað hvort „ekki-minnkandi“ eða „ekki-vaxandi“ er **einhalla**. Ekki er nóg að stinga inn nokkrum gildum til að sýna að runa sé einhalla! Sjá t.d. $a_n = (n/2015 - 1)^2$.
Runan $\{a_n\}$ er **vaxandi** ef $a_n < a_{n+1} \qquad \forall n$ og

ekki-minnkandi ef $a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n$

Runan er **minnkandi** ef $a_n > a_{n+1} \qquad \forall n$ og
ekki-vaxandi ef $a_n \geq a_{n+1} \qquad \forall n$

Runa sem er annað hvort „ekki-minnkandi“ eða „ekki-vaxandi“ er **einhalla**.

Dæmi:

- $\{\frac{1}{n}\}$ er minnkandi runa.
- $\{n\}$ er vaxandi runa.
- $\{\frac{n}{n+1}\}$ er vaxandi runa.
- $\{(-1)^n \cdot n\}$ er hvorugt.

Dæmi: Ef sýna skal að $a_n = \frac{n}{n+1}$ myndar vaxandi runu þá er **ekki** nóg að reikna gildi runnnar fyrir nokkur gildi á n heldur þarf formlega að sýna $a_n < a_{n+1}$. Þetta er jafngilt því að sýna $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$, en hér getum við margaldað báðar hliðar með $n+1$ og $n+2$ til að losna við brotin og upphaflega ójafnan verður þá jafngild þessari: $n(n+2) < (n+1)^2$. Okkur dugar þá að sýna $n^2+2n < n^2+2n+1$ en það er augljóslega rétt því $1 > 0$.
Dæmi: Ekki er nóg að stinga inn nokkrum gildum til að sýna að runa sé einhalla! Sjá t.d. $a_n = (n/2015-1)^2$. Þessa runu má líka skrifa sem mismunarunu.

1.9 Takmörkuð runa

Runa $\{a_n\}$ er takmörkuð ef til eru tölur m og M þ.a.

$$m \leq a_n \leq M \qquad \forall n$$

Setning: Ef runa $\{a_n\}$ er samleitin þá er hún takmörkuð.

Skilgreining: Runa $\{a_n\}$ er takmörkuð ef til eru tölur m og M þ.a.

$$m \leq a_n \leq M \qquad \forall n$$

Setning Ef runa $\{a_n\}$ er samleitin þá er hún takmörkuð.

Sönnun: G.r.f. að $\lim a_n = L$. Gefið $\varepsilon > 0$, $\exists N$ þ.a. $|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > N$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \\ \Rightarrow \qquad & L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon \end{aligned}$$

Látum

$$\widehat{M} = \max_{0\leq i\leq N} a_i$$
$$\widehat{m} = \min_{0\leq i\leq N} a_i$$
$$\Rightarrow \qquad \widehat{m} \leq a_n \leq \widehat{M}, \quad 0 \leq n \leq N$$

Setjum

$$m = \min(\widehat{m}, L - \varepsilon)$$
$$M = \max(\widehat{M}, L + \varepsilon)$$

þá er

$$m \leq a_n \leq M, \qquad \forall n$$

þ.e. runan $\{a_n\}$ er takmörkuð (að ofan og neðan).

1.10 Setning (klemmuregla)

Látum $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ vera rauntalnarunur þannig að $a_n \leq b_n \leq c_n$ og

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Þá er $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

Stundum kemur t.d. í ljós að $0 \leq b_n \leq c_n$ og $c_n \to 0$ og þar með stefnir b_n á núll. Athugið t.d. að $\cos\frac{1}{n} \leq n\sin\frac{1}{n} \leq 1$ því $\sin x \leq x \leq \tan x$. Þar með gildir $n\sin\frac{1}{n} \to 1$. **Setning:** Látum $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ vera rauntalnarunur, $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n > N$ fyrir eitthvað N og

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Þá er

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

<u>Sönnun:</u>

$$\begin{array}{ll} & a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L \\ \text{og} & L - a_n \geq L - b_n \geq L - c_n \\ \Rightarrow & |a_n - L| \leq |b_n - L| \leq |c_n - L|, \end{array}$$

en þetta síðasta má sjá betur með því að athugalið fyrir lið, byrjum t.d. á að bæði $b_n - L \leq |b_n - L|$ og $L - b_n \leq |b_n - L|$ og af fyrstu liðunum leiðir því hvort tveggja $a_n - L \leq |b_n - L|$ og $L - a_n \leq |b_n - L|$ og þarmeð $|a_n - L| \leq |b_n - L|$. Athugið t.d. að $\cos\frac{1}{n} \leq n\sin\frac{1}{n} \leq 1$ því $\sin x \leq x \leq \tan x$. Þar með gildir $n\sin\frac{1}{n} \to 1$.

1.11 Einhalla og takmarkaðar runur

Sérhver takmörkuð, einhalla runa er samleitin.

Dæmi: Runan $a_n = \frac{n+1}{n}$ uppfyllir $a_n > 0$ og $a_n = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ svo hún er takmörkuð. Auðvelt er að sýna að hún er einhalla því $n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow a_n = 1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$. Úr því hún er einhalla og takmörkuð er hún líka samleitin samkvæmt setningunni.
Athugið að **ekki** dugar að koma með rökleiðslu af gerðinni $a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow 1 \geq 0$. Hins vegar er stundum hægt að vinna sig áfram með jafngildingum: $a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 1 \geq 0$. Sérhver takmörkuð, einhalla runa er samleitin. **Dæmi:** Runan $a_n = \frac{n+1}{n}$ uppfyllir $a_n > 0$ og $a_n = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ svo hún er takmörkuð. Auðvelt er að sýna að hún er einhalla því $n+1 >$

$n \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} \Rightarrow a_n = 1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{n+1} = a_{n+1}$. Úr því hún er einhalla og takmörkuð er hún líka samleitin samkvæmt setningunni.
Athugið að **ekki** dugar að koma með rökleiðslu af gerðinni $a_n \ge a_{n+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow 1 \ge 0$. Hins vegar er stundum hægt að vinna sig áfram með jafngildingum: $a_n \ge a_{n+1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 1 \ge 0$.
Dæmi: Gefum okkur að $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ þegar $n \to \infty$ ($e = 2.7181\ldots$). Þá er $\{a_n\}$ takmörkuð. Því er

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$$

fyrir „stór“ n. Því er

$$\begin{aligned} & \left(\tfrac{n+1}{n}\right)^n < n \\ \Rightarrow \quad & (n+1)^n < n \cdot n^n = n^{n+1} \\ \Rightarrow \quad & n\ln(1+n) < (n+1)\cdot \ln n \end{aligned}$$

Við gerum ráð fyrir að logri sé vaxandi (sjá síðar), þ.e. $a < b \quad \Leftrightarrow \quad \ln a < \ln b$. Þá er

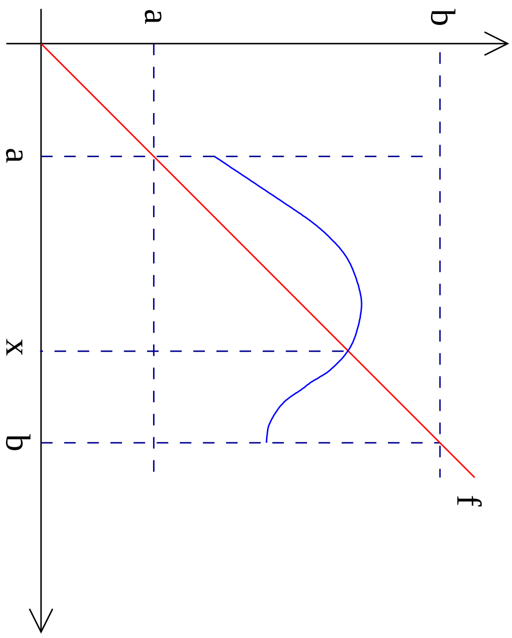
$$\Rightarrow \quad \frac{\ln(n+1)}{(n+1)} < \frac{\ln n}{n}$$

og því er $\{b_n\} = \{\frac{\ln n}{n}\}$ minnkandi runa. Jafnframt er

$$\frac{\ln n}{n} > 0 \qquad \text{ef} \quad n > 1$$

$\{b_n\} = \{\frac{\ln n}{n}\}$ er því minnkandi runa og takmörkuð að neðan. Þess vegna hefur $\{\frac{\ln n}{n}\}$ markgildi.

1.12 Fastapunktsítrun



1. G.r.f. að $g(x)$ sé samfellt fall (sjá síðar) og

$$a \le g(x) \le b \qquad \forall x \in [a, b]$$

þá er til a.m.k. ein lausn á $g(x) = x$; táknum lausnina með x^*.

2. Ef að auki

$$|g'(x)| \le r < 1, \qquad a < x < b$$

þá er til nákvæmlega ein lausn á $g(x) = x$. Sú lausn er markgildi rununnar $x_{n+1} = g(x_n)$.

Fastapunktsítrunin $x_{n+1} = g(x_n)$ er oft mjög öflug og er mikið notuð í tölulegri greiningu. Hún var t.d. notuð í örgjörfum, til að draga kvaðratrætur og hefur verið talsvert notuð í fiskifræði til að leysa ýmis verkefni við stofnstærðarmat. Ýmsar aðferðir til að leysa jöfnur gefa runu af gildum þar sem runan stefnir á lausn jöfnunnar. Oft er runan skilgreind endurkvæmt. Lítum nú á eina slíka sem kallast „Fastapunktsítrun“ eða Aðferð Picard (sjá bls. 622).

Þurfum að leysa
$$f(x) = 0$$
sem við getum skrifað sem
$$g(x) = x$$
þar sem $g(x) = f(x) + x$.

Lausn á jöfnunni kallast fastapunktur (fixed point) fyrir g.

Gefum okkur byrjunargildi x_0. Þá getum við skilgreint runu á endurkvæman hátt skv.
$$x_{n+1} = g(x_n)$$
og „vonumst“ svo til að runan hafi markgildi og að markgildið sé lausn á $g(x) = x$.

Sýna má fram á eftirfarandi:

<u>Setning</u>

1. G.r.f. að $g(x)$ sé samfellt fall (sjá síðar) og
$$a \leq g(x) \leq b \qquad \forall x \in [a, b]$$
þá er til a.m.k. ein lausn á $g(x) = x$; táknum lausnina með x^*.

2. Ef að auki
$$|g'(x)| \leq r < 1, \qquad a < x < b$$
þá er til nákvæmlega ein lausn á $g(x) = x$. Sú lausn er markgildi rununnar $x_{n+1} = g(x_n)$.

Sjá myndir og dæmi á bl.s 622-625 í TC.
Dæmi: Fastapunktsítrunin $x_{n+1} = g(x_n)$ er oft mjög öflug og er mikið notuð í tölulegri greiningu. Hún var t.d. notuð í örgjörfum, til að draga kvaðratrætur og hefur verið talsvert notuð í fiskifræði til að leysa ýmis verkefni við stofnstærðarmat.

2 Markgildi falla

2.1 Markgildi falls

Fall f stefnir á y í punktinum x_0, ritað
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y$$
ef um sérhverja runu a_n sem stefnir á x_0 gildir að talnarunan $f(a_n)$ stefnir á y.

Margliður eru samfelldar. Ræð föll eru yfirleitt ekki samfelld í punktum þar sem nefnarinn verður núll.
Sum flóknari föll eru líka samfelld, s.s. $f(x) = |x|$ en önnur ekki, t.d. $f(x) = |x/(x-1)|$.
Líma má saman sum föll og smíða þannig ný, t.d.

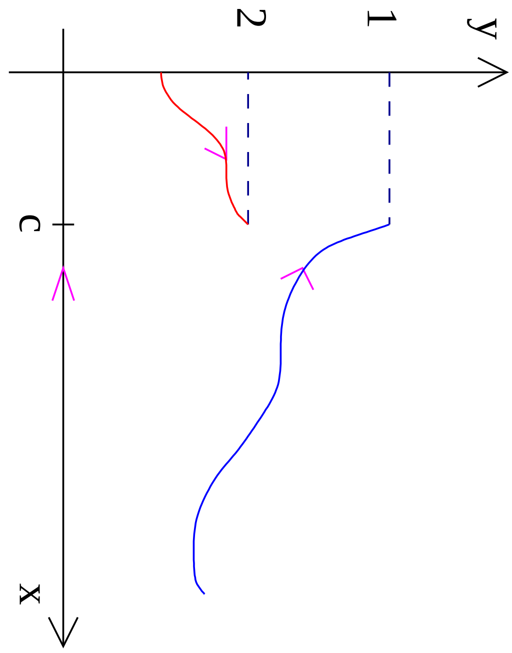
```
g(x) = x^3 - 2If[x - 1 > 0, (x - 1)^3, 0]
```

sem er kallað brúun og er mikið notað í tölulegri greiningu og hagnýttri tölfræði. Hér er reynt að líma föllin saman á samfelldan hátt (og raunar betur en það, sjá síðar um diffrun).
Fall f stefnir á y í punktinum x_0, ritað $\lim_{x\to x_0} f(x) = y$ ef um sérhverja runu a_n sem stefnir á x_0 gildir að talnarunan $f(a_n)$ stefnir á y. **Ýmis dæmi:**
Margliður eru samfelldar. Ræð föll eru yfirleitt ekki samfelld í punktum þar sem nefnarinn verður núll.
Sum flóknari föll eru líka samfelld, s.s. $f(x) = |x|$ en önnur ekki, t.d. $f(x) = |x/(x-1)|$.
Líma má saman sum föll og smíða þannig ný, t.d.


```
g(x) = x^3 - 2If[x - 1 > 0, (x - 1)^3, 0]
```

sem er kallað brúun og er mikið notað í tölulegri greiningu og hagnýttri tölfræði. Hér er reynt að líma föllin saman á samfelldan hátt (og raunar betur en það, sjá síðar um diffrun).

2.2 Markgildi frá hægri og vinstri



Skilgreining - Markgildi frá hægri:

$\lim_{x\to c^+} f(x) = L_1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ þ.a

$c < x < c+\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_1| < \varepsilon$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

<u>Dæmi:</u> (styttum burt sameiginlegan þátt)

1.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

2.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

Skilgreining:

Markgildi frá hægri:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \text{þ.a}$$
$$c < x < c+\delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

Markgildi frá vinstri:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \text{þ.a}$$
$$c - \delta < x < c \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

Ath: Ef

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

Þá er

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

og öfugt.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

Dæmi: (styttum burt sameiginlegan þátt)

1.
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

2.
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

2.3 Markgildi falls 2*

Höfum fall $f(x)$,

$$f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

Athugum hvað gerist með $f(x)$ þegar „x nálgast x_0“, þ.e. ætlum að skilgreina

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

Skilgreining $f(x)$ er skilgreint í $(a,b) \subset \mathbb{R}$ (nema hugsanlega í $x_0 \in (a,b)$) þ.e.

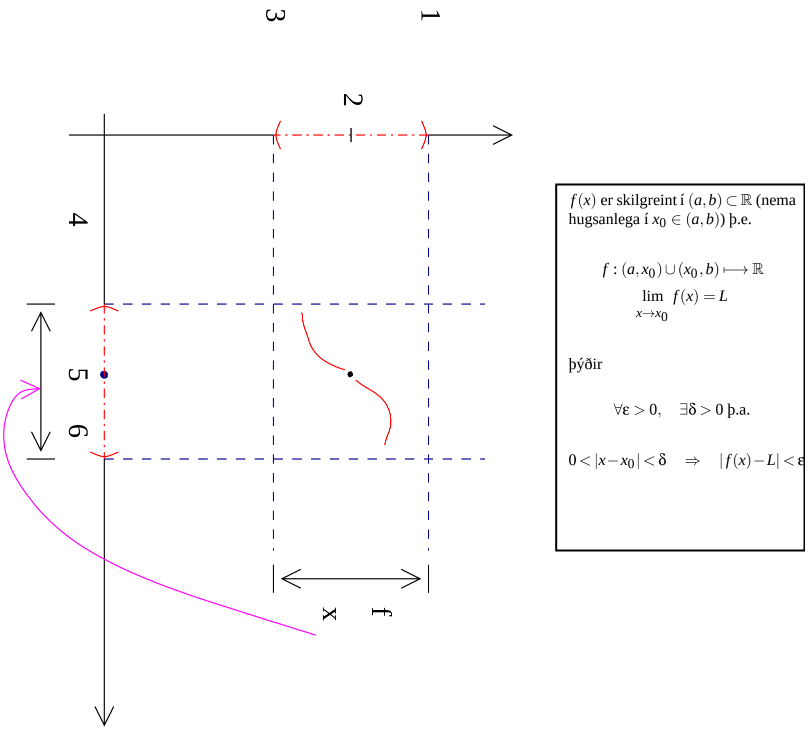
$$f : (a,x_0) \cup (x_0,b) \longmapsto \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

þýðir

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0 \text{ þ.a.}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$



Dæmi:

1.
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 2 - x & x > 0 \end{cases}$$

Hér er markgildið í $x_0 = 0$ ekki til því $f(x)$ nálgast 2 ef x nálgast 0 frá hægri, en $f(x)$ nálgast 1 x nálgast 0 frá vinstri. Þetta skrifum við

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \qquad \text{(markgildi frá hægri)}$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \qquad \text{(markgildi frá vinstri)}$$

2.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Þegar x nálgast 0 vex $f(x)$ og verður stærra en hvaða tala sem er. Segjum því að $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$.

2.4 Skekkjuhugleiðingar*

Ath: $\delta = \delta(\varepsilon)$, þ.e. fall af ε. „f stefnir á L þegar x stefnir á x_0“.

Nálgast má ε - δ hugtakið út frá skekkjuhugleiðingum.

Dæmi:

1. $f(x) = 2x + 1$
   Mælum $x_0 = 1$ og reiknum $f(x_0) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.
   Hver þarf nákvæmni í x-mælingum að vera til að tryggt sé að nákvæmni í $y = f(x_0)$ sé minni en gefið ε, þ.e.
   $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon?$$

Nálgast má ε - δ hugtakið út frá skekkjuhugleiðingum.

Dæmi: Mælum $x_0 = 1$ og reiknum $f(x_0) = 2\cdot 1 + 1 = 3$.
Hver þarf nákvæmni í x-mælingum að vera til að tryggt sé að nákvæmni í $y = f(x_0)$ sé minni en gefið ε, þ.e.

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon ?$$

Svar:

$$|f(x) - f(x_0)| = |2\cdot x + 1 - 3| = |2x - 2| = 2|x-1|$$

Svar:

$$|f(x) - f(x_0)| = |2\cdot x + 1 - 3| = |2x - 2| = 2|x-1|$$

Skekkjan í $f(x)$ (þ.e. $|f(x) - f(x_0)|$) er minni en ε ef skekkjan í x (þ.e. $|x-1|$) er minni en $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|f(x) - 3| = 2|x-1| < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

2. $f(x) = x^2, \qquad x_0 = 2$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - 4| = |x+2||x-2| < 5|x-2|$$

ef gert er ráð fyrir að $|x+2| < 5$.
Það er tryggt að skekkja í f er minni en ε, ef skekkja í x er minni en $\frac{\varepsilon}{5}$.

2.5 Markgildisreglur (fyrri hluti)

1.
$$\lim_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$$
(ef bæði markgildin eru til).

2.
$$\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x)$$
(eins er $\lim kf(x) = k\lim f(x)$)

Setning 2.1 1. $\lim_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$ (ef bæði markgildin eru til).

2. $\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x)$ (eins er $\lim kf(x) = k\lim f(x)$)

Dæmi 2.1. 1. $\lim_{x\to c} x = c$

2. $\lim_{x\to c} x^2 = c^2$
og tilsvarandi fyrir margliður.

3.

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

(ef $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$) 4.

$$\lim_{x\to c}(f(x))^{\frac{r}{s}} = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^{\frac{r}{s}}$$

$r,s \in \mathbb{Z}, \quad s \neq 0$ og svo framarlega sem $(\lim_{x\to c} f(x))^{r/s} \in \mathbb{R}$.

2.6 Markgildisreglur (seinni hluti)

3. $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$
(ef $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$)

4. $\lim_{x\to c}(f(x))^{\frac{r}{s}} = (\lim_{x\to c} f(x))^{\frac{r}{s}}$
$r,s \in \mathbb{Z}, \quad s \neq 0$ og svo framarlega sem $(\lim_{x\to c} f(x))^{r/s} \in \mathbb{R}$.

(sjá Appendix 2, bls 1146 og athugasemdir í tengslum við sömu reglur fyrir markgildi runa á bls. 4).

Sönnun á reglu 3:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim f(x) \cdot \lim \frac{1}{g(x)}$$

Athugum

$$\lim \frac{1}{g(x)},$$

köllum $\lim g(x) = M$.

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M-g(x)}{g(x)\cdot M}\right| = \frac{1}{|g(x)||M|}|M-g(x)|$$

Við þurfum að sýna fram á að

$$\frac{1}{|g(x)|} \leq k$$

þar sem k er einhver fasti:

$$\begin{aligned}
\exists\delta_1 \quad \text{þ.a.} \quad 0<|x-c|<\delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |g(x)-M| < \left|\tfrac{M}{2}\right| \\
&\Rightarrow \quad ||g(x)|-|M|| \leq |g(x)-M| < \left|\tfrac{M}{2}\right| \\
&\Rightarrow \quad -\tfrac{|M|}{2} < |g(x)|-|M| < \tfrac{|M|}{2} \\
&\Rightarrow \quad \tfrac{|M|}{2} \leq |g(x)| \leq \tfrac{3}{2}|M| \\
&\Rightarrow \quad \tfrac{1}{|g(x)|} \leq \tfrac{2}{|M|} = k
\end{aligned}$$

fyrir $0<|x-c|<\delta_1$.

Þá gildir (ef $0<|x-c|<\delta_1$):

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| \leq \frac{2}{|M||M|}|g(x)-M|$$

Ef $\varepsilon > 0$ er gefið, veljum þá δ_2 þ.a.:

$$0 < |x-c| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}|M|^2$$

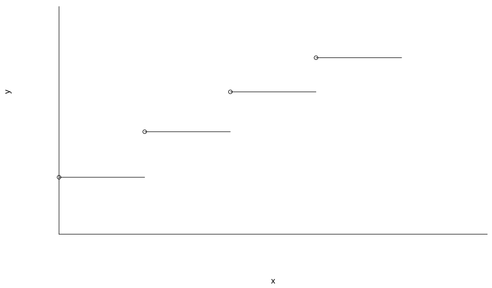
Setjum svo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Þá gildir:

$$0 < |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| \leq \frac{2}{|M|^2}|g(x)-M| < \frac{2}{|M|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{2}|M|^2 = \varepsilon$$

þ.e.

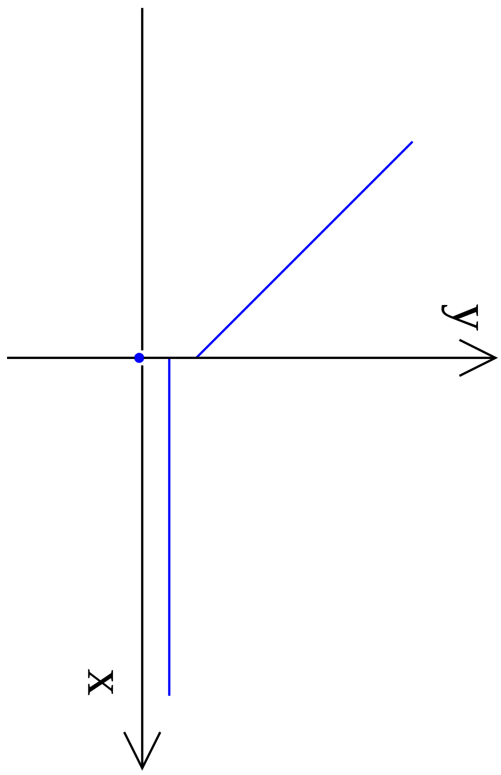
$$\lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to c} g(x)}$$

2.7 Dreififöll og önnur ósamfelld föll



Flest dæmi um ósamfelld föll í stærðfræðibókum eru heimatilbúin Í líkindafræði birtast slík dæmi hins vegar á hverjum degi
Ef X táknar fjölda skjaldarmerkja í fjórum krónuköstum þá má reikna $F(x) = P[X \leq x]$ fyrir rauntölugildi á x.
Þetta fall er vaxandi, er alltaf samfellt frá hægri en er ósamfellt frá vinstri í $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Mynd 1: Dæmi um dreififall (cumulative distribution function).



Mynd 2: Dæmi um ósamfellt fall.

Dæmi:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \frac{1}{2} & x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$$
$$\text{en} \qquad f(0)=0.$$

Flest dæmi um ósamfelld föll í stærðfræðibókum eru augljóslega heimatilbúin.
Í líkindafræði birtast slík dæmi hins vegar á hverjum degi.
Dæmi: Ef X táknar fjölda skjaldarmerkja í fjórum krónuköstum þá má reikna $F(x) = P[X \le x]$ fyrir rauntölur x.
Þetta fall er vaxandi, er alltaf samfellt frá hægri en er ósamfellt frá vinstri í $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.
Fleiri dæmi:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \frac{1}{2} & x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$$
$$\text{en} \qquad f(0)=0.$$

Dæmi:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+3x-1}{x^3+4x^2+1}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \sqrt{\lim_{x\to 1}\left(\tfrac{x^2+3x-1}{x^3+4x^2+1}\right)} \\
&= \sqrt{\tfrac{\lim_{x\to 1}(x^2+3x-1)}{\lim_{x\to 1}(x^3+4x^2+1)}} \\
&= \sqrt{\tfrac{\lim_{x\to 1} x^2+\lim_{x\to 1} 3x+\lim_{x\to 1}(-1)}{\lim_{x\to 1} x^3+\lim_{x\to 1}(4x^2)+\lim_{x\to 1} 1}} \\
&= \sqrt{\tfrac{(\lim_{x\to 1} x)^2+3\lim_{x\to 1} x-1}{(\lim_{x\to 1} x)^3+4(\lim_{x\to 1} x)^2+1}} \\
&= \sqrt{\tfrac{1^2+3\cdot 1-1}{1^3+4\cdot 1^2+1}} \\
&= \sqrt{\tfrac{3}{6}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

2.8 Klemmusetningin (Sandwich Theorem)

Dæmi:

1.

$$-|\theta| \le \sin\theta \le |\theta| \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0 = \sin 0$$
$$\sin\theta < \theta$$

Ath:$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0 = \sin 0$

Gerum ráð fyrir að

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

fyrir öll $x \in (a,b)$ og tökum $c \in (a,b)$. Ef

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

þá er

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

2.

$$0 \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta| \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1 = \cos 0$$

Ath: $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1 = \cos 0$

Gerum ráð fyrir að

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

fyrir öll $x \in (a,b)$ og tökum $c \in (a,b)$. Ef

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

þá er

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

(sjá App. 2) Dæmi:

1.

$$-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta| \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0 = \sin 0$$

$$\sin\theta < \theta$$

Ath: $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0 = \sin 0$

2.

$$0 \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta| \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1 = \cos 0$$

Ath: $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1 = \cos 0$

2.9 Markgildi sinx/x

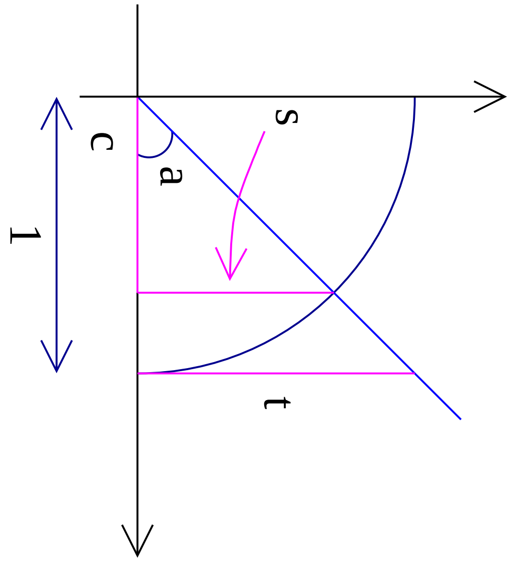
Notum nú klemmusetninguna til að sýna fram á að

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Notum nú klemmusetninguna til að sýna fram á að

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Skoðum flatarmál nokkurra svæða sem tengjast einingarhringnum.
Byrjum á flatarmáli þríhyrningsins sem afmarkast af núllpunkti, x-ás og punktinum $(\cos\theta, \sin\theta)$. Þessi þríhyrningur er rétthyrndur svo hann hefur flatarmál sem er hálft margfeldi skammhliðanna, þ.e. $\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$.



Tökum næst flatarmál þeirrar sneiðar hringsins sem liggur frá x-ás upp að línunni frá núllpunkti að $(\cos\theta, \sin\theta)$. Hringskífa með radíus r hefur flatarmál πr^2, en í okkar tilviki er $r = 1$ og við höfum ekki áhuga á öllum hringnum (lengd 2π) heldur aðeins þeim hluta sem hefur boglengd θ og sá hluti hefur því flatarmál $\frac{1}{2}1^2\theta$.
Að lokum tökum við þríhyrning sem hefur grunnlínu af lengd 1 á x-ás og langhlið sem gengur í gegnum $(\cos\theta, \sin\theta)$. Hæð þríhyrningsins er þá $\tan\theta$ og flatarmálið þar með $\frac{1}{2}\tan\theta$.
Við sjáum að þessi þrjú svæði raðast á eðlilegan hátt eftir stærð:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta < \frac{1}{2}1^2\theta < \frac{1}{2}\tan\theta \qquad &\Rightarrow \qquad \cos\theta < \tfrac{\theta}{\sin\theta} < \tfrac{1}{\cos\theta} \\
&\Rightarrow \qquad \cos\theta < \tfrac{\sin\theta}{\theta} < \tfrac{1}{\cos\theta}
\end{aligned}
$$

Nú er

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta} = 1$$

og þá er skv. klemmusetningunni

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Ath: Hér höfum við gert ráð fyrir að $\sin\theta > 0$. Strangt til tekið höfum við því sýnt fram á að

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Hins vegar er $\frac{\sin\theta}{\theta}$ jafnstætt fall og því er

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

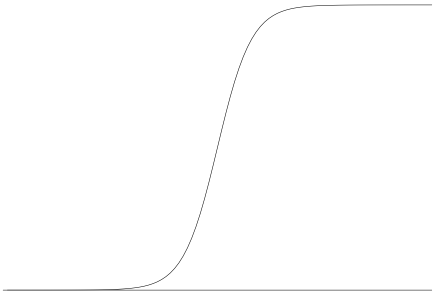
og því er

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

3 Markgildi og aðfellur

3.1 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt

Dæmi:



Skilgreinum nú markgildi þegar $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

merkir að $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists X > 0$ þ.a. ef $x > X$ þá gildir $|f(x) - L| < \varepsilon$
M.ö.o. $f(x)$ nálgast L þegar x vex
eða:
Fyrir gefna nákvæmniskröfu ε má finna X þannig að $f(x)$ er ekki fjær L en ε ef $x > X$.

1 Við sjáum að $e^x \to 0$ þegar $x \to -\infty$ og $e^x \to \infty$ þegar $x \to \infty$
2 Ef $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ þá gildir $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ og $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$
3 Ef $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ þá fæst $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} = \frac{a}{c}$
Athugum nú markgildi þegar $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

merkir:

$$\begin{array}{ccc} & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists X > 0 \quad \text{þ.a.} & \\ x > X & \Rightarrow & |f(x) - L| < \varepsilon \end{array}$$

($f(x)$ nálgast L þegar x vex)

Dæmi:
1 Við sjáum að $e^x \to 0$ þegar $x \to -\infty$ og $e^x \to \infty$ þegar $x \to \infty$
2 Ef $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ þá gildir $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ og $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$
3 Ef $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ þá fæst $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} = \frac{a}{c}$

3.2 Markgildi ræðra falla

Markgildi ræðra falla þegar $x \to \pm\infty$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. $n < m$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{0}{b_m} = 0$$

2. $n = m$:

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}$$

3. $n > m$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$$

Sömu markgildisreglur gilda hér sbr. bls 113 í TC.

Markgildi ræðra falla þegar $x \to \pm\infty$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. $n < m$:

$$f(x) = \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-m-1} + \cdots + a_1 x^{-m+1} + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots + b_1 x^{-m+1} + b_0 x^{-m}}$$

   Öll veldi í teljara eru neikvæð og því er

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{0}{b_m} = 0$$

2. $n = m$:

$$f(x) = \frac{a_n + \text{liðir með neikvæðan veldisvísi}}{b_n + \text{liðir með neikvæðan veldisvísi}}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}$$

3. $n > m$

$$f(x) = \frac{a_n x^{n-m} x + \cdots + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + \cdots + b_1 x^{-m+1} + b_0 x^{-m}}$$

   Fyrsti/fyrstu liðir í teljara hafa jákvæða veldisvísa og því er

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$$

3.3 Óendanlegt markgildi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

merkir:
$\forall B > 0, \quad \exists\delta(B)$ (þ.e. δ er fall af B) þ.a.

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > B$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

merkir:
$\forall B > 0 \quad \exists\delta$ þ.a.

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) < -B$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

merkir:
$\forall B > 0, \quad \exists\delta(B)$ (þ.e. δ er fall af B) þ.a.

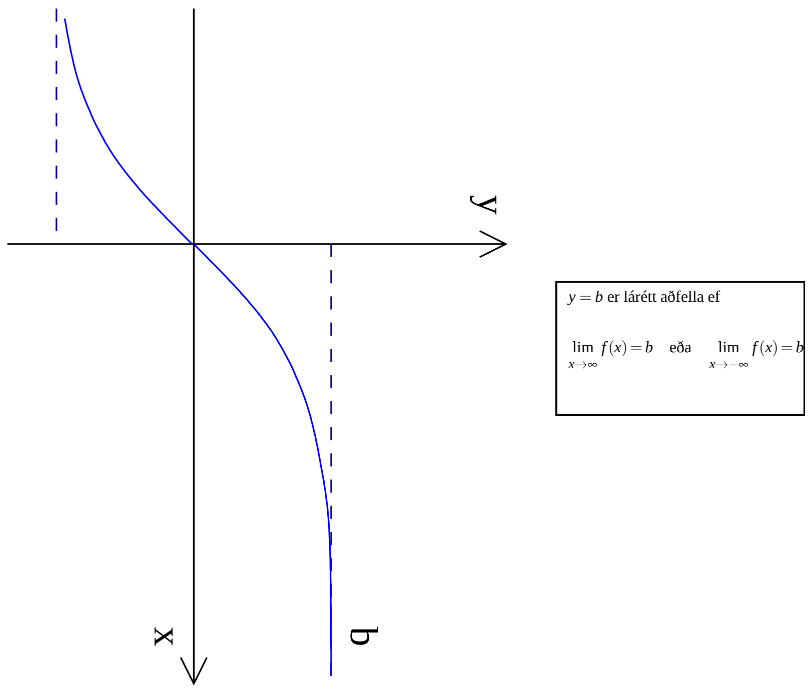
$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > B$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

merkir:
$\forall B > 0 \quad \exists\delta$ þ.a.

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) < -B$$

3.4 Lárétt aðfella



Dæmi $y = 1$ og $y = -1$ eru láréttar aðfellur fallsins

$$f(x) = \frac{x^3}{|x^3| + 1}$$

$y = b$ er lárétt aðfella ef

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{eða} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Dæmi:

1. $y = 1$ og $y = -1$ eru láréttar aðfellur fallsins

$$f(x) = \frac{x^3}{|x^3| + 1}$$

2.

$$f(x) = 1 - \frac{\cos x}{x}$$

hefur lárétta aðfellu $y = 1$.
($0 \leq |\frac{\cos x}{x}| \leq \frac{1}{|x|}$ og skv. klemmusetningu er $\lim \frac{\cos x}{x} = 0$)

3.5 Lóðrétt aðfella

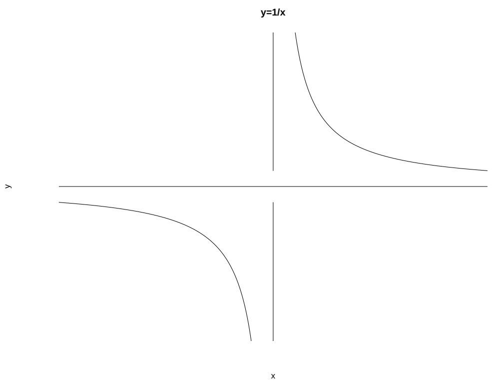
$y = 1/x$ hefur lóðrétta að aðfellu. $x = a$ er lóðrétt aðfella ef

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{eða} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Ath:

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

er ekki til, (sjá bls. 105).



$x = a$ er lóðrétt aðfella ef

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{eða} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Við segjum að tvö föll f og g „hagi sér eins þegar x er stórt“ ef

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Hliðstætt fyrir $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Ritum $f(x) \sim g(x)$.

3.6 Að haga sér eins

Almennt mikilvægt hugtak-sbr tölvunarfræði.
Dæmi: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ hagar sér eins og $g(x) = x^3$ fyrir stór x
Dæmi: $f(x) = e^x + x^2$ hagar sér eins og $g(x) = e^x$ þegar $x \to \infty$ því

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x + x^2}{e^x} = 1 + x^2 e^{-x} \to 1 \quad \text{þegar}\, x \to \infty \quad \text{(sjá síðar).}$$

<u>Skilgreining:</u> Við segjum að tvö föll f og g „hagi sér eins þegar x er stórt“ ef

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Hliðstætt fyrir

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Ritum $f(x) \sim g(x)$.

<u>Dæmi:</u>

1. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ hagar sér eins og $g(x) = x^3$ fyrir stór x því

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \tfrac{x^3+ax^2+bx+c}{x^3} \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(1 + a\cdot\tfrac{1}{x} + b\cdot\tfrac{1}{x^2} + c\cdot\tfrac{1}{x^3}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

2. $f(x) = e^x + x^2$ hagar sér eins og $g(x) = e^x$ þegar $x \to \infty$ því

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x + x^2}{e^x} = 1 + x^2 e^{-x} \to 1 \quad \text{þegar}\, x \to \infty \quad \text{(sjá síðar).}$$

<u>Ath:</u> $f(x) = x^2 + e^{-x}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = e^{-x}$

$$f \sim g \qquad \text{þegar} \quad x \to \infty$$
$$f \sim h \qquad \text{þegar} \quad x \to -\infty$$

3.7 Aðfellur

Almennari (línulegar) aðfellur koma fyrir ef $f(x)$ hegðar sér þannig að $f(x)-(ax+b)\to 0$ þegar $x\to\pm\infty$
Kemur oft fyrir með ræð föll. Hallastuðulinn a má finna sem markgildi $f(x)/x$, ef það er til.
Dæmi: Ræð föll (sjá Ęxamplestakkann).
Sjá líka "asymptote"á Wikipedia.

Skilgreining 3.1. Fallið f er sagt hafa (línulega) aðfellu ef $f(x)-(ax+b)\to 0$ þegar $x\to\pm\infty$

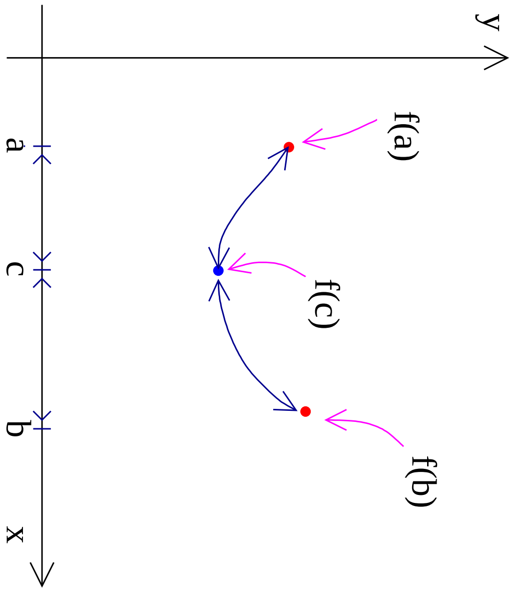
Kemur oft fyrir með ræð föll. Hallastuðulinn a má finna sem markgildi $f(x)/x$, ef það er til. Eftir það má finna b sem markgildi $f(x)-ax$, ef það er til.
Skoðum hegðun ræðra falla.

Dæmi 3.1. Ef
$$q(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}=\frac{(x+1)^2}{x-1},$$
þá vitum við að
$$\lim_{x\to\pm\infty} q(x)=+\infty$$
og við sjáum annars vegar að
$$\lim_{x\to 1+} q(x)=+\infty$$
og hins vegar, að
$$\lim_{x\to 1-} q(x)=+\infty.$$
Við tökum líka eftir því að gráða teljarans er nákvæmlega einum hærri en nefnarans svo $q(x)/x$ hefur markgildi þegar x stefnir á óendanlegt.
Nánar:
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{q(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{(x+1)^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$$
og ef við umritum nefnarann og teljarann, t.d. með því að deila fyrir ofan og neðan strik með x^2, þá sjáum við strax að þetta brot stefnir á einn.
Þá getum við haldið áfram og litið á markgildin $\lim_{x\to\infty} q(x)-x$ og $\lim_{x\to-\infty} q(x)-x$. Atugum fyrst
$$\lim_{x\to\infty} q(x)-x=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1-x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1-x^2+x}{x-1}=3$$
Svo $q(x)\sim x+3$ þegar $x\to\infty$ (og líka þegar $x\to-\infty$).

Athugið að það er líka gagnlegt að nota GeoGebra til að teikna fallið.

4 Samfelld föll

4.1 Samfelldni



f er **samfellt** í punkti $c \in (a,b)$ ef

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

f er samfellt í vinstri og hægri endapunktum bils $[a,b]$ ef

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{og} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Skilgreining 4.1. f er **samfellt** í punkti $c \in (a,b)$ ef

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

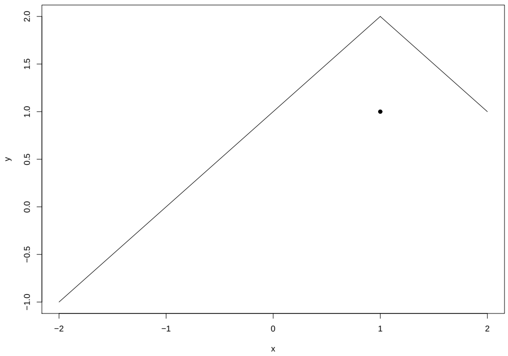
Skilgreining 4.2. f er samfellt í vinstri og hægri endapunktum bils $[a,b]$ ef

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{og} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Athugasemd 4.1. Þetta merkir að graf $f(x)$ er ekki „slitið í sundur“ í c.

Athugasemd 4.2. Fall sem er ekki samfellt í c er ósamfellt.

Athugasemd 4.3. f er samfellt á bili (a,b) ef það er samfellt í öllum punktum í (a,b) $(\forall c \in (a,b))$.



4.2 Samfelld föll

Fall f er samfellt ef það er samfellt í sérhverjum punkti í formenginu D_f.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ 1 & x=1 \\ -x+3 & x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

og því er

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$$

f er því ekki samfellt í $x=1$.

Dæmi 4.1.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ 1 & x=1 \\ -x+3 & x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

og því er

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq f(1)$$

f er því ekki samfellt í $x=1$.

Dæmi 4.2. Hins vegar er

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & x\leq 1 \\ -x+3 & x>1 \end{cases}$$

samfellt í $x=1$.

Athugasemd 4.4. Fall f er samfellt ef það er samfellt í sérhverjum punkti í formenginu D_f.

4.3 Samfelldar aðgerðir á samfelldum föllum

Setning: Ef $f(x)$ og $g(x)$ eru samfelld í $x = c$ þá eru eftirfarandi föll einnig samfelld í $x = c$:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $f \cdot g$
4. $k \cdot f$ $\quad (k \in \mathbb{R})$
5. f/g $\quad$ (ef $g(c) \neq 0$)

Setning: Ef $f(x)$ og $g(x)$ eru samfelld í $x = c$ þá eru eftirfarandi föll einnig samfelld í $x = c$:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $f \cdot g$
4. $k \cdot f$ $\quad (k \in \mathbb{R})$
5. f/g $\quad$ (ef $g(c) \neq 0$)

4.4 Nokkur samfelld föll

Eftirfarandi föll eru samfelld í öllum punktum í **formenginu** D_f:

1. margliður $\quad P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
2. ræð föll $\quad P(x)/Q(x)$
3. rætur $\quad \sqrt[n]{x} \quad n \in \mathbb{N}, n > 1$
4. hornaföllin $\quad \sin x$, $\cos x$, $\tan x$, ($\sec x$, $\csc c$, $\cot x$)
5. andhverfu hornaföllin $\quad \sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, o.s.fr.
6. veldisvísisföllin $\quad a^x$, e^x
7. lograföll $\quad \log x$, $\ln x$

Markgildi af summur, margfeldum og samsetningum falla eru tilsvarandi summur, margfeldi og samsetningar af markgildum. Að auki eru hornaföll og veldisvísisföll samfelld.

Eftirfarandi föll eru samfelld í öllum punktum í **formenginu** D_f:

1. margliður $\quad P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
2. ræð föll $\quad P(x)/Q(x)$
3. rætur $\quad \sqrt[n]{x} \quad n \in \mathbb{N}, n > 1$
4. hornaföllin $\quad \sin x$, $\cos x$, $\tan x$, ($\sec x$, $\csc c$, $\cot x$)
5. andhverfu hornaföllin $\quad \sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, o.s.fr.
6. veldisvísisföllin $\quad a^x$, e^x
7. lograföll $\quad \log x$, $\ln x$

4.5 Andhverfa samfellds falls

Andhverfa samfellds falls $f(x)$, $f^{-1}(x)$ er samfelld.
(Graf f er ekki „slitið í sundur“ og graf f^{-1} fæst með speglun um línuna $y = x$)

a^x er samfellt fall og því er $\log_a x$ það líka, $\quad \forall a > 0$.
Andhverfa samfellds falls $f(x)$, $f^{-1}(x)$ er samfelld.
(Graf f er ekki „slitið í sundur“ og graf f^{-1} fæst með speglun um línuna $y = x$)

Dæmi: a^x er samfellt fall og því er $\log_a x$ það líka, $\quad \forall a > 0$.

4.6 Samsett föll

Ef f er samfellt í c og g er samfellt í $f(c)$, þá er $g \circ f$ samfellt í c. Dæmi:

$$F(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x + 2\sin x}$$
$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x}$$

$F(x) = (g \circ f)(x)$ er samfellt í c þar sem $\sin c \neq 0$.

Setning 4.1 Ef f er samfellt í c og g er samfellt í $f(c)$, þá er $g \circ f$ samfellt í c.

Athugasemd 4.5. Um samfelld föll gildir (sjá skilgreiningu):

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = f(\lim_{x \to c} x)$$

og því er

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} g(f(x)) &= g(\lim_{x \to c} f(x)) && g \text{ samfellt} \\ &= g(f(\lim_{x \to c} x)) && f \text{ samfellt} \\ &= g(f(c)) = (g \circ f)(c) \end{aligned}$$

Því er $g \circ f$ samfellt í c.

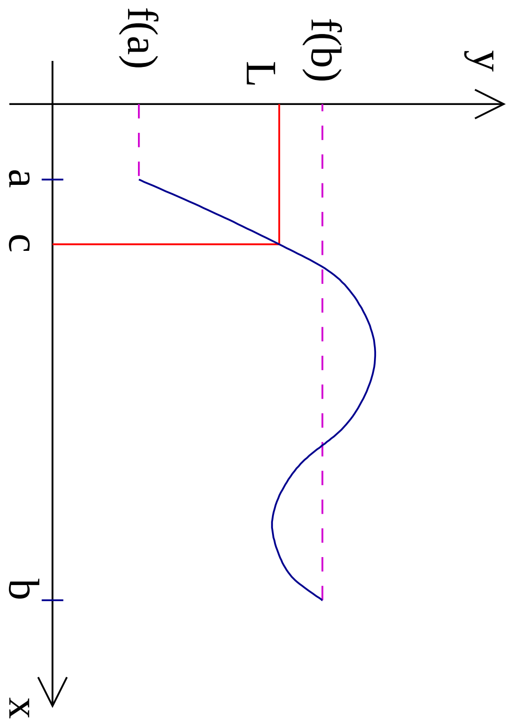
x „nálægt“ $c \quad \Rightarrow \quad f(x)$ „nálægt“ $f(c) \quad \Rightarrow g(f(x))$ „nálægt“ $g(f(c))$.

Dæmi 4.3.

$$F(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x + 2\sin x}$$
$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x}$$

$F(x) = (g \circ f)(x)$ er samfellt í c þar sem $\sin c \neq 0$.

4.7 Milligildissetningin (Intermediate Value Theorem) og helmingunaraðferðin



Gerum ráð fyrir að fall $f(x)$ sé **samfellt** í $[a,b]$ og L sé á milli $f(a)$ og $f(b)$. Þá er til $c \in [a,b]$ þ.a. $f(c) = L$.
Notum þetta til að finna t.d. lausnir á $f(x) = 0$.
Gerum ráð fyrir að fall $f(x)$ sé **samfellt** í $[a,b]$ og L sé á milli $f(a)$ og $f(b)$. Þá er til $c \in [a,b]$ þ.a. $f(c) = L$.

<u>Ath:</u> Milligildissetningin tengist því að graf samfellds falls er ekki „slitið í sundur“.
Dæmi um not á milligildissetningunni er helmingunaraðferðin (bisection method):
Viljum leysa $f(x) = 0$. Finnum bil $[a_0, b_0]$ þ.a. $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. (G.r.f. að $f(a_0) > 0$ og $f(b_0) < 0$). Þá er til $c \in [a_0, b_0]$ þ.a. $f(c) = 0$.
Tökum miðpunkt $[a_0, b_0]$

$$\alpha = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

og reiknum $f(\alpha)$.

- Ef $f(\alpha) > 0$ setjum við $[a_1, b_1] = [\alpha, b_0]$.
- Ef $f(\alpha) < 0$ setjum við $[a_1, b_1] = [a_0, \alpha]$.

Nú er $f(a_1) > 0$ og $f(b_1) < 0$ og því er til $c \in [a_1, b_1]$ þ.a. $f(c) = 0$.
Tökum nú

$$\alpha = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Reiknum $f(\alpha)$ og athugum fomerki þess.
Fáum nú nýtt bil $[a_2, b_2]$ sem inniheldur lausn á $f(x) = 0$. Endurtökum uns lausnin er fengin með nægjanlegri nákvæmni.

<u>Ath:</u> Stærð bilsins sem inniheldur lausn á $f(x) = 0$ helmingast í hverri ítrun.

Dæmi 4.4.

$$f(x) = x^5 + 4x^4 - 22 = 0$$
$$f(0) = -22 \qquad f(2) = 32 + 4 \cdot 4 - 22 > 0$$
$$x_0 = \frac{2+0}{2} = 1 \qquad \text{(skekkja er } \pm 1\text{)}$$
$$[a_0, b_0] = [0, 2], \qquad x_0 = 1 \pm 1$$
$$f(1) = 1 + 4 - 22 < 0$$

$$[a_1, b_1] = [1, 2], \qquad x_1 = 1,5 \pm 0,5$$
$$f(1,5) = -5,406\ldots \quad < 0$$
$$[a_2, b_2] = [1.5, 2] \qquad x_2 = 1,75 \pm 0,25$$

o.s.fr.

Dæmi 4.5. Við getum flýtt fyrir:
Finnum lausn á $f(x) = 0$ með skekkju < 0.001:
Skiptum $[1, 2]$ í 10 bil og reiknum f-gildin í endapunktum.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$f(x)$	-17	-15,55	-13,75	-11,53	-8,78	-5,41	-1,27	3,76	9,86	17,20	26

Lausnin liggur á bilinu $[1,6\,,\,1,7]$, $x_1 = 1,65$. Skekkja $\leq 0,05$.

Dæmi 4.6.

x	1,60	1,61	1,62	1,63	1,64	16,5	1,66	1,67	1,68	1,69	1,70
$f(x)$	-1,27	-0,81	-0,34	0,13	0,62	1,12	1,63	2,14	2,67	3,21	3,76

Lausnin liggur á bilinu $[1,62\,,\,1,63]$ $x_2 = 1,625$. Skekkja $\leq 0,025$.

Dæmi 4.7.

x	1,620	1,621	1,622	1,623	1,624	1,625	1,626	1,627	1,628	1,629	1,630
$f(x)$	-0,345	-0,297	-0,202	-0,154	-0,107	-0,059	0,037	0,086	0,134		

Lausnin liggur á bilinu $[1,627\,,\,1,628]$ $x_3 = 1,6275$. Skekkja $\leq 0,0005$.