Runur og markgildi

math104-2calc Runur, markgildi og samfelldni

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

September 16, 2015

Óendanleg runa

Fall

$$f : \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\} \to \mathbb{R}$$

þar sem $n_0 \in \mathbb{Z}$ kallast óendanleg runa (sequence). Gildin $f(n)$ sem við skrifum venjulega sem a_n, b_n, o.s.frv. kallast liðir rununnar.

Runa er oft skrifuð $\{a_n\}$ eða $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$
Runan er **kvótaruna** ef til er tala q þannig að $a_{n+1}/a_n = q$.
Runur eru mikið notaðar í hagfræði, verkfræði, líffræði o.s.frv., m.a. koma mælingar á tímaröðum fram sem runur.
Ávöxtun í banka myndar kvótarunu, sömuleiðis hagnaður fyrirtækja. Slikar runur þarf að núvirða o.fl.

Endurkvæmni (recursion)

Oft er liður n í rununni skilgreindur út frá næstu liðum á undan, þ.e.

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots)$$

Dæmi

1. $a_n = ka_{n-1}, \qquad k$ fasti
   (hér er auðvelt að sjá að $a_n = k^n a_0$).
2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad a_1 = 1,\ a_2 = 2.$
   (Fibonacci runan: 1,1,2,3,5,8, ...)

Dæmi (skordýr): $N_t = N_{t-1} + rN_{t-1}(1 - N_{t-1}/K)$.

Dæmi (fiskar): $N_t = \frac{\alpha N_{t-1}}{(1+N_{t-1}/K)}$ - Beverton-Holt jafnan um nýliðun.

Fastapunktar

Skilgreining: Ef a_n er skilgreing endurkvæmt með t.d. $a_n = F(a_{n-1})$ og $F(a) = a$ þá nefnist a **fastapunktur** rununna.

Dæmi (tölvunarfræði): Ef $x > 0$, finnið þá fastapunkt(a) rununnar $a_n = \frac{a_{n-1} + x/a_{n-1}}{2}$.

Samleitni og markgildi

Runan $\{a_n\}$ er sögð samleitin með markgildið L ef:
fyrir sérhvert $\epsilon > 0$ er til N þ.a.

$$|a_n - L| < \epsilon \qquad \forall n > N$$

Þetta er skrifað

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

(eða $a_n \to L$ þegar $n \to \infty$)

ATH: L verður að vera fastapunktur rununnar!
Það má þá komast eins nálægt L og og verkast vill - **og halda sig þar**.
Dæmi: Flest líkön af dýrastofnum hafa jafnvægispunkt, t.d. $B_{t+1} = B_t + rB_t\,(1 - B_t/K) - pB_t$ fyrir lífmassa fiska, þar sem p er veiðihlutfallið.
Varúð: EF runa er samleitin, ÞÁ er hún samleitin að fastapunkti. Það er EKKI gefið að runa sé samleitin þótt hún eigi sér fastapunkt(a). Ef við vitum að runa sé samleitin, þá dugar að kanna fastapunktana.

Ósamleitni

Ef ekki er hægt að finna neina tölu L þ.a.

$$|a_n - L| < \epsilon \qquad \forall n > N$$

sé uppfyllt þá er runan ósamleitin.
Dæmi: Mörg dæmi úr líffræði fjalla um dýrastofna (skordýr, hreindýr, fiskar) sem þróast í tíma án þess að leita í jafnvægi.
Dæmi: Runan

$$a_n = (-1)^n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

er greinilega ósamleitin. Einnig

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{n-1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Skilgreining

Runa stefnir á óendanlegt ef "halinn endar alltaf fyrir ofan hvaða tölu sem er":

Runan $\{a_n\}$ stefnir á ∞ ef

$$\forall\, Y > 0, \quad \text{þá} \quad \exists\, N \quad \text{þ.a.} \quad a_n > Y, \quad \forall\, n > N$$

Ath: $\forall$ þýðir „fyrir öll“ og $\exists$ þýðir „til er“.

Dæmi: Sum stofnlíkön þróast í tíma þannig að stofninn stækkar upp úr öllu valdi, oft með veldisvexti, t.d. $N_t = 2N_{t-1}$.

Dæmi: Í tölvunarfræði er mikill áhugi á, hve hratt erfiðleikastig eykst eftir stærð verkefnis. Stærð verkefnis getur t.d. verið fjöldi borga í "travelling salesman" verkefninu, en þá kemur runa sem stefnir á óendanlegt.

Markgildisreglur

Látum $\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B$. Þá er

1. $\lim(a_n + b_n) = A + B$
2. $\lim(a_n - b_n) = A - B$
3. $\lim a_n b_n = A \cdot B$
4. $\lim k a_n = kA$
5. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \qquad (B \neq 0)$

Þessar setningar eru nauðsynlegar til að geta unnið eitthvað með markgildin, og víð tökum varla eftir því að við notum þær t.d. þegar við reiknum $\lim 1 - \frac{1}{n} = 1 - \lim \frac{1}{n} = 0$.
Með þeim er auðvelt að reikna markgildi af ýmsum runum s.s. $1 + \frac{n}{2n+1}$ o.s.frv.

Einhalla runur

Runan $\{a_n\}$ er (stíft) **vaxandi** ef $a_n < a_{n+1} \qquad \forall n$ og
ekki-minnkandi ef $a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n$

Runan er (stíft) **minnkandi** ef $a_n > a_{n+1} \qquad \forall n$ og
ekki-vaxandi ef $a_n \geq a_{n+1} \qquad \forall n$

Runa sem er annað hvort „ekki-minnkandi“ eða „ekki-vaxandi“ er **einhalla**.
Ekki er nóg að stinga inn nokkrum gildum til að sýna að runa sé einhalla! Sjá t.d. $a_n = (n/2015 - 1)^2$.

Takmörkuð runa

Runa $\{a_n\}$ er takmörkuð ef til eru tölur m og M þ.a.

$$m \leq a_n \leq M \qquad \forall n$$

Setning: Ef runa $\{a_n\}$ er samleitin þá er hún takmörkuð.

Setning (klemmuregla)

Látum $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ vera rauntalnarunur þannig að $a_n \leq b_n \leq c_n$ og

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Þá er $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

Stundum kemur t.d. í ljós að $0 \leq b_n \leq c_n$ og $c_n \to 0$ og þar með stefnir b_n á núll.

Athugið t.d. að $\cos\frac{1}{n} \leq n\sin\frac{1}{n} \leq 1$ því $\sin x \leq x \leq \tan x$. Þar með gildir $n\sin\frac{1}{n} \to 1$.

Einhalla og takmarkaðar runur

Sérhver takmörkuð, einhalla runa er samleitin.

Dæmi: Runan $a_n = \frac{n+1}{n}$ uppfyllir $a_n > 0$ og $a_n = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ svo hún er takmörkuð. Auðvelt er að sýna að hún er einhalla því $n + 1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow a_n = 1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$.
Úr því hún er einhalla og takmörkuð er hún líka samleitin samkvæmt setningunni.
Athugið að **ekki** dugar að koma með rökleiðslu af gerðinni $a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow 1 \geq 0$. Hins vegar er stundum hægt að vinna sig áfram með jafngildingum: $a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 1 \geq 0$.

Fastapunktsítrun

1. G.r.f. að $g(x)$ sé samfellt fall (sjá síðar) og

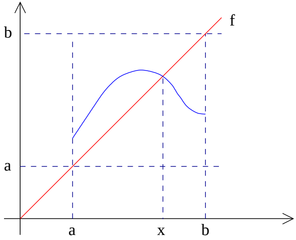
$$a \leq g(x) \leq b \qquad \forall x \in [a, b]$$

þá er til a.m.k. ein lausn á $g(x) = x$; táknum lausnina með x^*.

2. Ef að auki

$$|g'(x)| \leq r < 1, \qquad a < x < b$$

þá er til nákvæmlega ein lausn á $g(x) = x$. Sú lausn er markgildi rununnar $x_{n+1} = g(x_n)$.



Fastapunktsítrunin $x_{n+1} = g(x_n)$ er oft mjög öflug og er mikið notuð í tölulegri greiningu. Hún var t.d. notuð í örgjörfum, til að draga kvaðratrætur og hefur verið talsvert notuð í fiskifræði til að leysa ýmis verkefni við stofnstærðarmat.