Markgildi falla

math104-2calc Runur, markgildi og samfelldni

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

September 16, 2015

Markgildi falls

Fall f stefnir á y í punktinum x_0, ritað

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y$$

ef um sérhverja runu a_n sem stefnir á x_0 gildir að talnarunan $f(a_n)$ stefnir á y.

Margliður eru samfelldar. Ræð föll eru yfirleitt ekki samfelld í punktum þar sem nefnarinn verður núll.

Sum flóknari föll eru líka samfelld, s.s. $f(x) = |x|$ en önnur ekki, t.d. $f(x) = |x/(x-1)|$.

Líma má saman sum föll og smíða þannig ný, t.d.

```
g(x) = x^3 - 2If[x - 1 > 0, (x - 1)^3, 0]
```

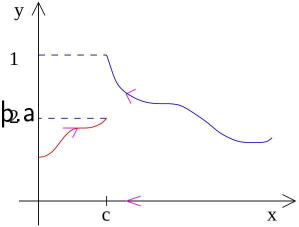
sem er kallað brúun og er mikið notað í tölulegri greiningu og hagnýttri tölfræði. Hér er reynt að líma föllin saman á samfelldan hátt (og raunar betur en það, sjá síðar um diffrun).

Markgildi frá hægri og vinstri

Skilgreining - Markgildi frá hægri:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L_1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{þa}$$

$$c < x < c+\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L_1| < \epsilon$$



$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

Dæmi: (styttum burt sameiginlegan þátt)

1. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

2. $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

Markgildi falls 2*

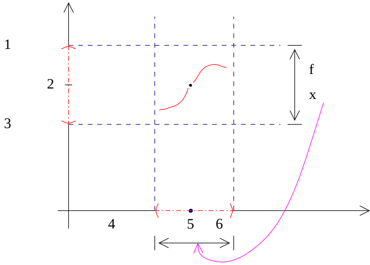
$f(x)$ er skilgreint í $(a, b) \subset \mathbb{R}$ (nema hugsanlega í $x_0 \in (a, b)$) þ.e.

$$f : (a, x_0) \cup (x_0, b) \longmapsto \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

þýðir

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ þ.a.}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$



Skekkjuhugleiðingar*

Nálgast má ϵ - δ hugtakið út frá skekkjuhugleiðingum.

Dæmi: Mælum $x_0 = 1$ og reiknum $f(x_0) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.
Hver þarf nákvæmni í x-mælingum að vera til að tryggt sé að nákvæmni í $y = f(x_0)$ sé minni en gefið ϵ, þ.e.

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,?$$

Svar:

$$|f(x) - f(x_0)| = |2 \cdot x + 1 - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1|$$

Markgildisreglur (fyrri hluti)

1. $$\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$$

   (ef bæði markgildin eru til).

2. $$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$$

   (eins er $\lim kf(x) = k \lim f(x)$)

Markgildisreglur (seinni hluti)

3.

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$$

(ef $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$) 4.

$$\lim_{x \to c} (f(x))^{\frac{r}{s}} = \left(\lim_{x \to c} f(x) \right)^{\frac{r}{s}}$$

$r, s \in \mathbb{Z}, \quad s \neq 0 \quad$ og svo framarlega sem $(\lim_{x \to c} f(x))^{r/s} \in \mathbb{R}$.

Dreififöll og önnur ósamfelld föll

Flest dæmi um ósamfelld föll í stærðfræðibókum eru heimatilbúin

Í líkindafræði birtast slík dæmi hins vegar á hverjum degi

Ef X táknar fjölda skjaldarmerkja í fjórum krónuköstum þá má reikna $F(x) = P[X \leq x]$ fyrir rauntölugildi á x.

Þetta fall er vaxandi, er alltaf samfellt frá hægri en er ósamfellt frá vinstri í $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

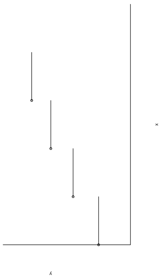
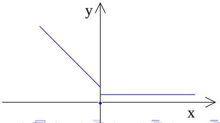


Figure : Dæmi um dreififall (cumulative distribution function).

Dæmi:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1}{2} & x > 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

Klemmusetningin (Sandwich Theorem)

Gerum ráð fyrir að

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

fyrir öll $x \in (a, b)$ og tökum $c \in (a, b)$. Ef

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

þá er

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Dæmi:

1.
$$-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta| \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0 = \sin 0$$

$$\sin\theta < \theta$$

Ath: $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0 = \sin 0$

2.
$$0 \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta| \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 = \cos 0$$

Markgildi sinx/x

Notum nú klemmusetninguna til að sýna fram á að

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$