Markgildi og aðfellur

math104-2calc Runur, markgildi og samfelldni

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

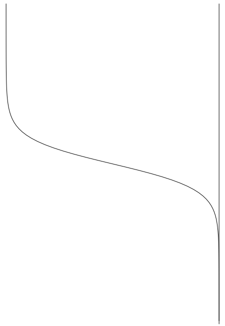
September 16, 2015

Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt

Skilgreinum nú markgildi þegar $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

merkir að $\forall \epsilon > 0 \quad \exists X > 0$ þ.a. ef $x > X$
þá gildir $\quad |f(x) - L| < \epsilon$
M.ö.o. $f(x)$ nálgast L þegar x vex eða:
Fyrir gefna nákvæmniskröfu ϵ má finna X þannig að $f(x)$ er ekki fjær L en ϵ ef $x > X$.



Dæmi:
1 Við sjáum að $e^x \to 0$ þegar $x \to -\infty$ og $e^x \to \infty$ þegar $x \to \infty$
2 Ef $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ þá gildir $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ og $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$
3 Ef $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ þá fæst $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} = \frac{a}{c}$

Markgildi ræðra falla

Markgildi ræðra falla þegar $x \to \pm\infty$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. $n < m$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{0}{b_m} = 0$$

2. $n = m$:

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}$$

3. $n > m$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$$

Óendanlegt markgildi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

merkir:

$\forall B > 0, \quad \exists \delta(B) \quad$ (þ.e. δ er fall af B) þ.a.

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > B$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

merkir:

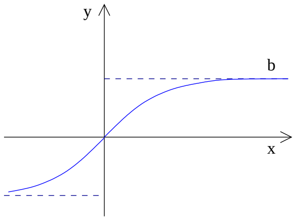
$\forall B > 0 \quad \exists \delta$ þ.a.

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) < -B$$

Lárétt aðfella

$y = b$ er lárétt aðfella ef

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{eða} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$



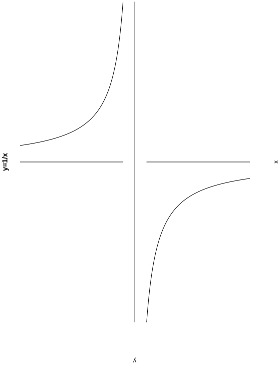
Dæmi $y = 1$ og $y = -1$ eru láréttar aðfellur fallsins

$$f(x) = \frac{x^3}{|x^3| + 1}$$

Lóðrétt aðfella

$x = a$ er lóðrétt aðfella ef

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{eða} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$



$y = 1/x$ hefur lóðrétta að aðfellu.

Að haga sér eins

Við segjum að tvö föll f og g „ hagi sér eins þegar x er stórt“ ef

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Hliðstætt fyrir $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Ritum $f(x) \sim g(x)$.
Almennt mikilvægt hugtak-sbr tölvunarfræði.
Dæmi: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ hagar sér eins og $g(x) = x^3$ fyrir stór x
Dæmi: $f(x) = e^x + x^2$ hagar sér eins og $g(x) = e^x$ þegar $x \to \infty$ því

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x + x^2}{e^x} = 1 + x^2 e^{-x} \to 1 \quad \text{þegar } x \to \infty \quad \text{(sjá síðar).}$$

Aðfellur

Almennari (línulegar) aðfellur koma fyrir ef $f(x)$ hegðar sér þannig að $f(x) - (ax + b) \to 0$ þegar $x \to \pm\infty$
Kemur oft fyrir með ræð föll. Hallastuðulinn a má finna sem markgildi $f(x)/x$, ef það er til.
Dæmi: Ræð föll (sjá "Examples"-takkann).
Sjá líka "asymptote" á Wikipedia.