Diffrun og afleiður

math104-3calc Diffrun og afleiður

Kjartan G. Magnusson o.m.fl.

February 8, 2016

Meðalhraði

Höfum stærð y sem er fall af x, $y = f(x)$. Látum nú x breytast frá x_1 í x_2;

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

þá breytist y um

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$$

Meðalhraði breytingar í y á bilinu $[x_1, x_2]$ er:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Aðalástæðan fyrir því að vilja þetta er, að hallinn er núll þar sem fallið er flatt. Við viljum finna aðferðir til að finna bestu lausnir s.s. hámarka hagnað, finna línur sem passa best í gegnum gögn o.s.frv. Allt þetta er gert með því að finna staði þar sem fall er "flatt", þ.e. þar sem halli þess er núll. Til þess þurfum við að skilgreina nákvæmlega hvað átt er við og hvernig er hægt að leysa slík verkefni.

Sjá líka sýnidæmi um hraða breytinga

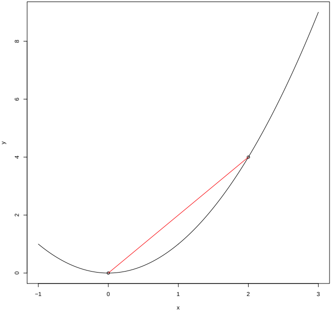
Hallatala strengs

Gefið er fall $f(x)$, skilgreint á bili I, sem inniheldur punkta x_1 og x_2.
Athugum nú strenginn (secant) milli punktanna $(x_1, f(x_1))$ og $(x_2, f(x_2))$

Hallatala strengsins er

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(þetta köllum við mismunakvóta). Hvað gerist þegar $x_2 \to x_1$?



Ath: Augljóst er hvað átt er við þegar talað er um hallatölu línu, $y = f(x) = ax + b$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1]} = a \qquad (1)$$

Þetta er alltaf sama talan, **óháð** x_1 og x_2.

Afleiða

Skilgreining

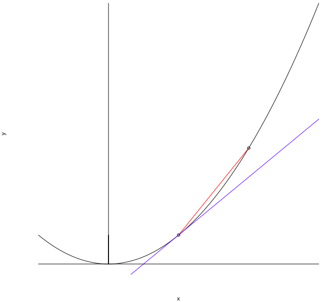
Afleiða (derivative) falls f í punkti x_0, táknað $f'(x_0)$, er

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eða

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ef markgildið er til.



Má líka skrifa sem $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ eða $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Dæmi: Afleiðu $y = f(x) = x^2$ í $x = x_0$ má finna með því að athuga fyrst, að $f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2hx_0 + h^2$ og þar með

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx_0 + h^2}{h} = 2$$

Setning - Diffrun veldisfalls (heiltölu veldisvísir)

Gerum ráð fyrir að $n \in \mathbb{N}$ (heilar tölur) og $f(x) = x^n$.

Þá er $f'(x) = nx^{n-1}$
Sértilvik: $f(x) = x^2$. Þá gildir $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$ og þá fáum við líka

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x.$$

Setning - Diffrun veldisfalls (ræður veldisvísir)

Gerum ráð fyrir að $n \in \mathbb{Q}$ (ræðar tölur) og $f(x) = x^n$.

Þá er $f'(x) = nx^{n-1}$

Sönnun: sjá details

Leibniz form afleiðu

Í sumum tilfellum er þægilegra að nota hið svokallaða Leibniz form til að tákna afleiður, þ.e. $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$
Ef $y = f(x)$ skrifum við jöfnum höndum $\frac{dy}{dx}$ og $f'(x)$.
Þetta er hugsað þannig að $x = x_0 + \Delta x, \quad \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ og

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}; \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} \to \frac{df}{dx} \quad \text{þegar} \quad \Delta x \to 0$$

(athugið $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ er **meðal**hraði f-breytingar í $[x_0, x_0 + \Delta x]$)

Afleiðufall og diffurvirki

- Afleiðan sjálf er fall
$$f' : x \to f'(x)$$
Formengi f' eru öll x þar sem $f'(x)$ er til.
Dæmi: $f(x) = x^4, \qquad f'(x) = 4x^3 \qquad$ (ath. **fall** af x).
- Diffrunin sjálf er aðgerð, **virki**, sem nefnist diffurvirki (differential operator)
$\frac{d}{dx}$ virkar á föll f og breytir þeim í afleiðufallið
$$\frac{d}{dx} : \quad f \to f' \qquad \left(= \frac{df}{dx}\right)$$

Nokkrar diffurreglur

$(f+g)' = f' + g'$	$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$	
$(cf)' = cf'$	$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{df}{dx}(x)$	c fasti
$(f \cdot g)' = f'g + fg'$	$\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = \frac{df}{dx}(x)g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$	
$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{1}{g^2} \cdot g'$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{1}{g(x)^2} \cdot \frac{dg}{dx}(x)$	
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$		

Diffranleg föll eru samfelld

Ef $f'(x_0)$ er til, þá er f samfellt í punktinum x_0.

Ath: Samfellt fall þarf ekki að vera diffranlegt, sbr. $f(x) = |x|, \qquad x_0 = 0$