Ýmsar afleiður, snertlar, keðjuregla og hornaföll

math104-3calc Diffrun og afleiður

Kjartan G. Magnusson o.m.fl.

February 8, 2016

Hærri afleiður

$$f^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}\right)$$

Þar sem $\frac{df}{dx}(x)$ $(= f'(x))$ er fall af x (afleiðufallið) þá má skilgreina afleiðu af $f'(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \qquad (= f''(x))$$

$x \mapsto \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$ er fall og taka má afleiðu þess o.s.frv.

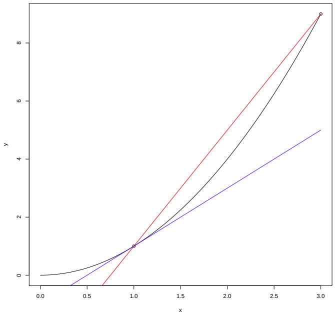
$$\frac{d^n f}{dx^n} = \underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{diffurvirki}} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)$$

eða

$$f^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}\right)$$

Snertilína (tangent line)

Lína gegnum $(x_0, f(x_0))$ með hallatölu $f'(x_0)$ er **snertilína** grafsins $y = f(x)$ í punktinum $(x_0, f(x_0))$



Ath: Snertilína er besta línulega nálgunin á $f(x)$ í $(x_0, f(x_o))$
Ath:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

er jafna snertilínunnar í $(x_0, f(x_0))$.)

Andartakshraði (instantaneous rate of change)

Andartakshraði í x er $f'(x)$

þ.a. breytingahraði f m.t.t. x í x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dæmi: Breytingahraði rúmmáls kúlu m.t.t geisla:

$$\frac{dV}{dr}\Big|_{r=r_0} = \frac{d}{dr}\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right)\Big|_{r=r_0} = \frac{4\pi \cdot 3r^2}{3}\Big|_{r=r_0} = 4\pi r_0^2$$

Dæmi

Breytingahraði rúmmáls kúlu m.t.t geisla:

$$\frac{dV}{dr}\Big|_{r=r_0} = \frac{d}{dr}\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right)\Big|_{r=r_0} = \frac{4\pi\cdot 3r^2}{3}\Big|_{r=r_0} = 4\pi r_0^2$$

(ath. að þetta er flatarmál yfirborðs kúlu með geisla r_0)
Ath:

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Afleiður hornafalla

1. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
2. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
3. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \left(= \frac{1}{\cos^2 x}\right)$

Örstutt sönnun á $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cdot\cos h + \cos x\cdot\sin h - \sin x}{h}\\ &= \sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\cdot\frac{\sin h}{h} \to \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x\end{aligned}$$

Samsett fall

$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ kallast samsett fall

Keðjureglan - afleiða samsetts falls

Ef f er diffranlegt í $u = g(x)$ og g er diffranlegt í x, þá er $f \circ g$ diffranlegt í x og

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Þetta má einnig rita:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

eða

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{du}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x)$$

Dæmi

Snjóbolti að bráðna.

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \qquad \text{(rúmmál kúlu)}$$

Nú eru V og r föll af t (tíma) $\quad V(t)$ og $r(t)$. G.r.f. að

$$\frac{dV}{dt} = -k \cdot (\text{yfirborðsflatarmál kúlunnar}), \quad k > 0 \quad \text{er fasti.}$$

Þetta er stærðfræðilegt líkan af bráðnununni, þ.e. rúmmál minnkar með hraða sem er í beinu hlutfalli við flatarmál yfirborðs kúlunnar

Óbein diffrun

Skilgreinum $y(x)$ með $y^5 - y - x^2 + 1 = 0$ og finnum hallatölu snertils ferilsins í $(1,1)$
Lítum á y sem fall af x þ.a. $y(1) = 1$.
Diffrum jöfnuna m.t.t. x.

$$5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

Finnum nú $\frac{dy}{dx}(1)$, með því að nýta okkur að $y(1) = 1$:

$$\begin{aligned} & 5 \cdot 1^4 \tfrac{dy}{dx}(1) - \tfrac{dy}{dx}(1) - 2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{dy}{dx}(1)(5-1) - 2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{dy}{dx}(1) = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Snertill í $(1,1)$ er því:$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$ þ.e.$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Háðir breytingahraðar

Sandur bæstist við keilulaga hrúgu með hraða $24m^3/min$. Hornið við toppinn er 1.2 rad. Hversu hratt vex hæð sandbingsins þegar hann er 2 m?
Lausn:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot hm^3$$

Þekkjum $\frac{dV}{dt}$ og h, viljum finna $\frac{dh}{dt}$. Viljum því losna við r. Höfum að $\frac{r}{h} = \tan 0,6$ og því $r = h \tan 0,6$ Þá er

$$V = \frac{1}{3}\pi (h \tan 0.6)^2 \cdot h$$

þ.e.

$$\begin{aligned} & V(t) = \tfrac{1}{3}\pi \tan^2 0,6 \cdot h(t)^3 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{dV}{dt} = \tfrac{1}{3}\pi \cdot \tan^2 0,6 \cdot 3h(t)^2 \cdot \tfrac{dh}{dt} \end{aligned}$$

$\frac{dV}{dt} = 24m^3/min, \; h = 2m$: