# Notkun á afleiðum - hágildi og lággildi

## math104-3calc Diffrun og afleiður

Kjartan G. Magnusson o.m.fl.

February 8, 2016

# Víðfem há-lággildi

Skilgreining: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad c \in D$

- $f(c)$ er **stærsta gildi** $f$ í $D$ ef

$$f(c) \geq f(x) \qquad \forall x \in D$$

- $f(c)$ er **minnsta gildi** $f$ í $D$ ef

$$f(c) \leq f(x) \qquad \forall x \in D$$

(einnig kallað víðfeðmt hágildi/lággildi; „global").

Þetta eru gildin sem við viljum finna – hvernig verður hagnaður mestur o.s.frv. Hins vegar er erfitt að finna víðfeðm hágildi - auðveldara að finna staðbundin hágildi.
Stundum auðvelt, t.d. er lággildið á $(x-2)^2$ augljóslega í $x = 2$. Það sama er að segja um $(x^2-2)^2$ - þetta er alltaf $\geq 0$ og verður núll þegar $x^2 = 2$, þ.e. í $x = \pm\sqrt{2}$.

# Staðbundin há- lággildi

$c \in D_f$ (formengi $f$, $c$ ekki á jaðri $D_f$).

1. $f$ tekur staðbundið (local) hágildi í $c$ ($f(c)$) þá og því aðeins að
$$f(x) \leq f(c)$$
fyrir öll $x$ í opnu bili um $c$.
2. $f$ tekur staðbundið (local) lággildi í $c$ ($f(c)$) þá og því aðeins að
$$f(x) \geq f(c)$$
fyrir öll $x$ í opnu bili um $c$.

Hér eru staðbundin lággildi í $c_1$ og $c_3$, staðbundið hágildi í $c_2$, hágildi í $b$ og lággildi í $c_3$.

Athugið að bilið má vera þröngt – "staðbundið" getur

# Extreme Value Theorem

Setning: Ef $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ er **samfellt**, þá tekur $f$ bæði hágildi og lággildi í $[a, b]$, (þ.e. tekur stærsta gildi $M$ og minnsta gildi $m$ í $[a, b]$).

M.ö.o: til eru $x_1$ og $x_2 \in [a, b]$ þ.a. $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ og

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in [a, b]$$
$$f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

Ath: Bilið verður að vera lokað, sbr. $f(x) = \frac{1}{x}$ og $(0, 1)$, sem hefur hvorki há- né lággildi í $(0, 1)$.

# Setning (staðbundið há eða lággildi)

Ef $f$ tekur staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi í $c$ ($c \in D_f$, ekki á jaðri $D_f$) og $f'(c)$ er til, þá er

$$f'(c) = 0$$

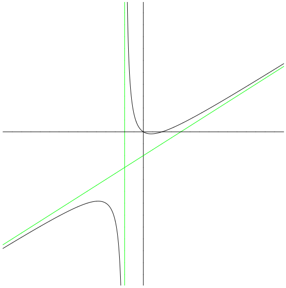

Figure : $y = \frac{1}{2}x - 2\frac{x}{x+2}$ with asymptotes in green.

Ath: $f'(x) = 0$ er nauðsynlegt skilyrði fyrir há/lággildi í $x$, en ekki nægjanlegt, sbr. $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ en $f$ hefur hvorki há- né lággildi í 0.

Prófum fyrri dæmi: $\left(x^2 - 2\right)^2 \ldots$

Flóknari dæmi:

$$\frac{1}{2}x - 2\frac{x}{x+2}$$

# Hvarfpunktur

Skilgreining: $x \in D_f$ þ.a. $f'(x) = 0$ eða ekki til, kallast hvarfpunktur.

Dæmi: $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3$

$f'(x) = 1 - x^2$. Hvarfpunktar eru $x = \pm 1$. $f(1) = \frac{2}{3}$, $f(-1) = \frac{-2}{3}$.

# Meðalgildissetningin

Ef $f(x)$ er samfellt á bili $[a, b]$ og diffranlegt í $(a, b)$, þá er til a.m.k. einn punktur $c$ í $(a, b)$ þ.a.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

eða

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Ath: Meðalgildissetningin segir ekkert til um hvert gildi $c$ er, aðeins að til sé $c$ þ.a.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Notagildi meðalgildissetningarinnar (MVT) felst einkum í því að leiða má ýmislegt út með hjálp hennar.

# Dæmi um notkun meðalgildissetningarinnar

Ef $f'(x) = 0 \quad \forall x$ í bili $I$, þá er $f$ fastafall í $I$. (þ.e. $f(x) = C, \forall x \in I$).

[ Veljum tvo punkta í $I$ af handahófi $x_1$ og $x_2$. G.r.f. að $x_1 < x_2$. Skv. MVT er þá til $c \in (x_1, x_2)$ þ.a.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

en $f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$.

Þar sem $x_1$ og $x_2$ geta verið hvaða punktar sem er, hlýtur $f(x)$ að vera fasti. ]

# Framhald af dæmi

$$\begin{aligned} & f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in I \quad \text{(bil)} \\ \Rightarrow \quad & f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

$$\Big[ \quad h(x) = f(x) - g(x), \quad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad h(x) = C \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) + C \quad \Big]$$

Ath: Þetta segir okkur að ef finna á öll föll sem hafa gefna afleiðu $g(x)$ þá er svarið

$$f(x) = f_0(x) + C \qquad \forall C$$

(þar sem $f_0(x)$ er eitthvað fall þ.a. $f_0'(x) = g(x)$).