math104-4calc Heildi

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

October 24, 2016

Contents

1 Óákveðin heildi

1.1 Stofnfall

F er stofnfall (antiderivative) f ef $F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in D_f$
Mengi stofnfalla f er óákveðið heildi f m.t.t. x og er táknað $\int f(x)\,dx$
Ef F er stofnfall f skrifum við

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

1.1.1 Details

Gefið fall $f(x)$, finnum **öll** föll $F(x)$ þ.a.

$$F'(x) = f(x)$$

Skilgreining: $F(x)$ kallast stofnfall (antiderivative) falls $f(x)$ ef

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in D_f$$

Mengi allra slíkra stofnfalla $f(x)$ kallast óákveðið heildi f m.t.t. x og er táknað

$$\int f(x)\,dx$$

Ath: Ein afleiðing af meðalgildissetningunni var að ef $F'(x) = G'(x)$ þá er

$$F(x) = G(x) + C \qquad (C \text{ fasti})$$

Þetta þýðir að ef við höfum fundið eitt stofnfall f, þ.e. $F(x)$ þ.a.

$$F'(x) = f$$

þá eru **öll** stofnföllin af gerðinni

$$F(x) + C$$

Táknum þetta

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

1.1.2 Examples

$$\int x^n\,dx = \tfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$
$$\int \cos kx\,dx = \tfrac{\sin kx}{k} + C$$
$$\int \sin kx\,dx = -\tfrac{\cos kx}{k} + C$$

o.s.frv.

Ýmis verkefni snúast um að finna fall sem hefur gefna afleiðu. T.d. hröðun gefin, finna staðsetningu sem fall af tíma.

1.2 Lausn diffurjöfnu

Þegar diffurjafnan

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (f(x) \quad \text{gefið fall})$$

er leyst, fæst óákvarðaður stuðull C. Til að ákvarða þann stuðul þarf að gefa skilyrði til viðbótar, t.d. að ferillinn $y(x)$ gangi í gegnum tiltekinn punkt (x_0, y_0).
Þetta er stundum kallað upphafsgildisverkefni (IVP).

1.2.1 Details

Þegar diffurjafnan

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (f(x) \quad \text{gefið fall})$$

er leyst, fæst óákvarðaður stuðull C. Til að ákvarða þann stuðul þarf að gefa skilyrði til viðbótar, t.d. að ferillinn $y(x)$ gangi í gegnum tiltekinn punkt (x_0, y_0).
Þetta er stundum kallað upphafsgildisverkefni (IVP).

1.2.2 Examples

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \qquad y(0) = 1 y(x) = \sin x + C; \qquad y(0) = C = 1 \Rightarrow \qquad y(x) = \sin x + 1$$

1.3 Heilda má lið fyrir lið

1. $\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \qquad (k \text{ fasti})$
2. $\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

1.3.1 Details

Nokkrar augljósar reglur:

1. $$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \qquad (k \text{ fasti})$$
2. $$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Reglur (1) og (2) má taka saman:

$$\int [A f(x) + B g(x)]\, dx = A \int f(x)\, dx + B \int g(x)\, dx$$

$$\left[\begin{array}{c} F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x) \quad \Rightarrow \\ [AF(x)+BG(x)]' = Af(x)+Bg(x) \end{array}\right]$$

Þetta þýðir að tegra (heilda) má lið fyrir lið.

1.3.2 Examples

<u>Dæmi 1:</u> Jaðartekjur eru $300-0,2x$ þar sem x er fjöldi seldra eininga. Hverjar eru heildartekjurnar?

$$r'(x) = 300-0,2x \qquad \text{(jaðartekjur)}$$

$$\begin{aligned} r(x) &= \int r'(x)\,dx = \int (300-0,2x)\,dx \\ &= \int 300\,dx - 0,2\int x\,dx \\ &= 300x - 0,2\tfrac{1}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

Nú er $r=0$ þegar $x=0$ og því er $C=0$. Fáum því

$$r(x) = 300x - 0,1x^2$$

<u>Dæmi 2:</u> Heildun á $\sin^2 x$ og $\cos^2 x$.

Notum

$$\begin{array}{ll} & \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \\ \text{og} & \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x\,dx &= \int \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x\right)dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int dx - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot x - \tfrac{1}{2}\tfrac{\sin 2x}{2} + C \\ &= \tfrac{x}{2} - \tfrac{\sin 2x}{4} + C \end{aligned}$$

1.4 Innsetning

Setning: Ef $u = g(x)$ er diffranlegt á opnu bili I og $f(u)$ er samfellt á opnu bili I_1 sem inniheldur $\{u(x) : x \in I\}$, þá er

$$\int f(g(x))\cdot\frac{dg}{dx}\,dx = \int f(u)\,du$$

1.4.1 Details

Innsetning:
$u(x)$;

$$\begin{array}{rl} & \frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}(x)}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n+1}\cdot u^n(x)\frac{du}{dx} \\ \Rightarrow & \int\left(u^n(x)\frac{du}{dx}\right)dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x) + C \end{array}$$

Þetta skrifum við

$$\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$$

Setning: Ef $u = g(x)$ er diffranlegt á opnu bili I og $f(u)$ er samfellt á opnu bili I_1 sem inniheldur $\{u(x) : x \in I\}$, þá er

$$\int f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}\,dx = \int f(u)\,du$$

Sönnun: G.r.f. að F sé stofnfall $f(u)$:

$$\frac{dF(u)}{du} = f(u)$$

Skv. keðjureglu er þá

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(F\left(u(x)\right)\right) &= f(u) \cdot \tfrac{du}{dx}\\ &= f\left(g(x)\right) \cdot \tfrac{dg}{dx}\end{aligned}$$

Notum nú eftirfarandi innsetningu:

$$\begin{aligned}\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx &= \textstyle\int f(u) \cdot \frac{du}{dx}\,dx \qquad (u = g(x))\\ &= \textstyle\int f(u)\,du \qquad \left(du = \frac{du}{dx} \cdot dx\right)\\ &= F(u) + C\\ &= F\left(g(x)\right) + C \qquad (g(x) = u)\end{aligned}$$

1.4.2 Examples

Dæmi 1:

$$\begin{aligned}\int \sin(x^2) \cdot 2x\,dx &= \textstyle\int \sin u \cdot du \qquad \begin{cases} u = x^2\\ du = 2x \cdot dx\end{cases}\\ &= -\cos u + C\\ &= -\cos(x^2) + C\end{aligned}$$

Ath: Alltaf má ganga úr skugga um að rétt hafi verið heildað með því að diffra útkomuna og athuga hvort fallið undir tegrinu fæst, t.d.

$$\frac{d}{dx}(-\cos x^2 + C) = \sin x^2 \cdot 2x$$

Dæmi 2:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int \sqrt{2x+1} \cdot 2\,dx, \qquad u = 2x+1\\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int \sqrt{u}\,du\\ &= \tfrac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Dæmi 3:

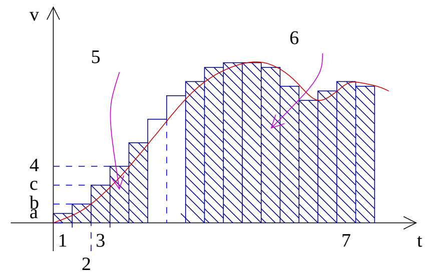
$$\int \sin 2x \cdot \cos^2(2x)\,dx$$

Látum $u = \cos 2x$ og $du = -2\sin 2x\,dx$. Þá er $\sin 2x\,dx = \frac{-1}{2}\,du$ og

$$\begin{aligned}\int \sin(2x) \cdot \cos^2(2x)\,dx &= \textstyle\int u^2(-\frac{1}{2}\,du)\\ &= -\tfrac{1}{2}\textstyle\int u^2 du\\ &= -\tfrac{1}{2}\tfrac{u^3}{3} + C\\ &= -\tfrac{1}{6}\cos^3(2x) + C\end{aligned}$$

1.5 Heildi og flatarmál

Gerum nú ráð fyrir að við þekkjum hraðann og viljum komast að því hversu langt farartæki hefur farið á T mín.



1.5.1 Details

Gerum nú ráð fyrir að við þekkjum hraðann og viljum komast að því hversu langt farartæki hefur farið á T mín.

Hraðinn þegar $t = 0$ er 0. Mælum hraðann með jöfnu millibili Δt (þar sem gert er ráð fyrir að Δt sé lítið þ.a. hraðinn breytist „lítið“ innan hvers bils).

G.r.f. að hraðinn þegar $t = i \cdot \Delta t$ sé v_i. Vegalengdin sem farartækið fer 1. tímabilið er $\approx v_1 \cdot \Delta t$, 2. tímabilið $\approx v_2 \cdot \Delta t$ o.s.frv. (Ath! þetta er ekki nákvæmt!).

Við getum því nálgað heildarvegalengdina sem farin er á tímanum T $(= n \cdot \Delta T)$ með

$$\begin{aligned} &v_1\Delta t + v_2\Delta t + \cdots + v_{n-1}\Delta t + v_n\Delta t \\ &= (v_1 + v_2 + \cdots + v_n)\Delta t \end{aligned}$$

Ath: v_i er hæð grafsins í $t_i = i \cdot \Delta t$. Því er $v_i\Delta t$ flatarmálrétthyrnings með grunnlínu Δt og hæð v_i.

Heildarvegalengdina sem er farin má því **nálga** með flatarmáli allra rétthyrninganna (summu flatarmálanna). En við sjáum líka að summa flatarmála rétthyrninganna er nálgun á flatarmálinu undir grafinu $v = v(t)$. Við gætum e.t.v. fengið betri nálgun á heildarvegalengdinni með því að mæla hraðann í miðpunkti hvers bils (meðalhraði í bilinu $[(i-1)\Delta t, i\Delta t]$), en hugmyndin er sú sama.
Ath: Ef $v(t)$ er þekkt fall af t, þá er vegalengdin $s(t)$ stofnfall $v(t)$.
Spurning: Er samband á milli stofnfalls $f(t)$ og flatarmáls undir grafinu $f = f(t)$?

- $s(t) = \int v(t)\,dt$ (g.r.f. $v(0) = 0$). Heildarvegalengd er $s(T)$.
- $s(T)$, heildarvegalengd, er flatarmálið undir $v = v(t)$, $0 \le t \le T$.

2 Riemann summur og ákveðin heildi

2.1 Riemann summa

Veljum $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ ($x_0 = a$, $x_n = b$) þ.a.

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

Veljum stak $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$
Reiknum $f(c_k) \cdot \Delta x_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$
Leggjum saman alla liðina:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

þetta kallast Riemann summa fyrir f á $[a, b]$.

2.1.1 Details

Ætlum að finna (nálga til að byrja með) flatarmál undir grafi falls, milli línanna $x = a$ og $x = b$.

Byrjum á að skipta bilinu $[a, b]$ í n hlutbil:

Veljum $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ ($x_0 = a$, $x_n = b$) þ.a.

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

þá er

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

skipting á $[a, b]$.

Höfum n bil

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{n-1}, x_n]$$

Lengd bils númer k ($k = 1, 2, \ldots n$) er

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Veljum stak $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$
Reiknum $f(c_k) \cdot \Delta x_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$
(Ath: þetta er flatarmál rétthyrnings með grunnlínu Δx_k og hæð $f(c_k)$).
Leggjum saman alla liðina:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

þetta kallast Riemann summa fyrir f á $[a, b]$.

Þessi summa er nálgun á flatarmáli undir grafinu $y = f(x)$ á milli a og b ef $f \geq 0$. (< 0 ef $f < 0$).

2.2 Yfir- og undirsummur (efri og neðri Riemann summur)

Fyrir $f \geq 0$ og skiptingu P má velja mismunandi c_k, t.d.

- $f(c_k) = \max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = M_k$
- $f(c_k) = \min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = m_k$

og þá

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq I = \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

þar sem I er flatarmálið undir grafinu.

Fínni skipting gefur betri nálgun á I: Fínleiki= $||P|| = \max_k |\Delta x_k|$

2.2.1 Details

Fyrir gefna skiptingu P þá fást mismunandi nálgunargildi (summur) eftir því hvernig við veljum c_k.

T.d. veljum c_k þ.a.

- $f(c_k) = \max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = M_k$
- $f(c_k) = \min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = m_k$

þá er ljóst að

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

þar sem við táknum flatarmálið undir grafinu með

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Summurnar tvær kallast efri og neðri Riemann summur.

Það er ljóst að eftir því sem skiptingin verður fínni, þá verður Riemann summan betri nálgun á I.

Látum

$$||P|| = \max_k |\Delta x_k|$$

vera mælikvarða á hve fín skiptingin er.

2.3 Ákveðið heildi

Látum f vera skilgreint á $[a,b]$ (f þarf ekki að vera ≥ 0). Fyrir sérhverja skiptingu P, látum c_k vera einhverja tölu í hlutbili nr. k, $[x_{k-1}, x_k]$. Ef til er tala I þ.a.

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k = I$$

þar sem I er alveg óháð skiptingunum P og því hvernig c_k er valið, þá segjum við að f sé heildanlegt á $[a,b]$ og I sé ákveðna heildið af $f(x)$ yfir $[a,b]$. Táknum

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

2.3.1 Details

Skilgreining: Látum f vera skilgreint á $[a,b]$ (f þarf ekki að vera ≥ 0). Fyrir sérhverja skiptingu P, látum c_k vera einhverja tölu í hlutbili nr. k, $[x_{k-1}, x_k]$. Ef til er tala I þ.a.

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k = I$$

þar sem I er alveg óháð skiptingunum P og því hvernig c_k er valið, þá segjum við að f sé heildanlegt á $[a,b]$ og I sé ákveðna heildið af $f(x)$ yfir $[a,b]$. Táknum

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\sum \quad „\longrightarrow“ \int \quad ; \qquad \Delta x \quad „\longrightarrow“ \, dx$$

<u>Ath:</u> x er svokölluð gervibreyta (dummy variable) þ.e.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt$$

Það skiptir ekki máli hvað heildunarbreytan er kölluð.

2.4 Samfelld föll eru heildanleg

Setning:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

er til ef $f(x)$ er samfellt fall á $[a,b]$.

2.4.1 Details

Setning:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

er til ef $f(x)$ er samfellt fall á $[a,b]$.
Ath: $\int_a^b f(x)\,dx$ getur verið til, þó að $f(x)$ sé ekki samfellt.

2.5 Heildi og flatarmál undir jákvæðum föllum

- Ef $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, þá er $\int_a^b f(x)\,dx$ = flatarmál undir grafinu $y = f(x)$ á milli a og b.
- Framlag til heildisins frá bili þar sem $f(x) < 0$ er neikvætt (sbr. Riemannsummur:

$$\sum \underbrace{f(c_k)}_{<0} \cdot \Delta x_k < 0$$

ef öll $f(c_k) < 0$).

Munum: Flatarmál svæðis er alltaf jákvætt. Heildi getur verið neikvætt.

2.5.1 Details

- Ef $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, þá er $\int_a^b f(x)\,dx$ = flatarmál undir grafinu $y = f(x)$ á milli a og b.
- Framlag til heildisins frá bili þar sem $f(x) < 0$ er neikvætt (sbr. Riemannsummur:

$$\sum \underbrace{f(c_k)}_{<0} \cdot \Delta x_k < 0$$

ef öll $f(c_k) < 0$).

2.5.2 Examples

Dæmi: $f(x) = k$ fyrir fasta $k \in \mathbb{R}$.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = k(b-a)$$

og þetta er flatarmál kassa ef $k > 0$ en annars er $-A$ flatarmál kassans.

Dæmi: $f(x) = x$.

$$A = \int_0^b f(x)\,dx = b^2/2$$

og þetta er flatarmál þríhyrnings en ef $f(x) = -x$, þá er $-A$ flatarmálið.

2.6 Nokkur orð um formerki

- $\int_a^b f(x)\,dx$ er til ef f er **samfellt á köflum** í $[a,b]$, (þ.e. skipta má $[a,b]$ í endanlega mörg undirbil, $[a,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},b]$ þ.a. f er samfellt á hverju undirbili og endanleg markgildi í x_i). Notum svo
$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$
- Getum notað flatarmál til að reikna (einföld) heildi:
- Almennt:
  R_+ er svæðið undir $y=f(x)$ og ofan við x-ás þar sem $f(x)\geq 0$. R_- er svæðið yfir $y=f(x)$ og undir x-ás þar sem $f(x)<0$.
$$\int_a^b f(x)\,dx=A(R_+)-A(R_-)$$

2.6.1 Details

- $\int_a^b f(x)\,dx$ er til ef f er **samfellt á köflum** í $[a,b]$, (þ.e. skipta má $[a,b]$ í endanlega mörg undirbil, $[a,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},b]$ þ.a. f er samfellt á hverju undirbili og endanleg markgildi í x_i). Notum svo
$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$
  <u>Ath:</u>
$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$$
  því:
$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k+\sum_{k=n+1}^{m} f(c_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{m} f(c_k)\Delta x_k$$
  Þar sem $P_1=\{\overbrace{x_0}^{=a},x_1,\ldots,\overbrace{x_n}^{=b}\}$ og $P_2=\{x_n,\ldots,\overbrace{x_m}^{=c}\}$ eru skiptingar á $[a,b]$ og $[b,c]$.

  $P_1\cup P_2$ er því skipting á $[a,c]$.
- Getum notað flatarmál til að reikna (einföld) heildi:
- Almennt:
  R_+ er svæðið undir $y=f(x)$ og ofan við x-ás þar sem $f(x)\geq 0$. R_- er svæðið yfir $y=f(x)$ og undir x-ás þar sem $f(x)<0$.
$$\int_a^b f(x)\,dx=A(R_+)-A(R_-)$$

Skilgreiningin á (Riemann) heildi gildir þó að $f(x)<0$ fyrir sum x. Ef $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$ þá er flatarmál undir ferlinum $y=f(x)$ milli a og b gefið með
$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

2.6.2 Examples

Dæmi:

$$\int_{-1}^{1} 2x\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 2x\,dx &= \textstyle\int_{-1}^{0} 2x\,dx + \int_{0}^{1} 2x\,dx \\
\int_{0}^{1} 2x\,dx &= \text{flatarmál} \quad \Delta OAB \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} 2x\,dx &= -\,\text{flatarmál} \quad \Delta OCD \\
&= -\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = -1 \\
\Rightarrow \qquad \int_{-1}^{1} 2x\,dx &= -1+1 = 0
\end{aligned}$$

2.7 Dæmi: x^2

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

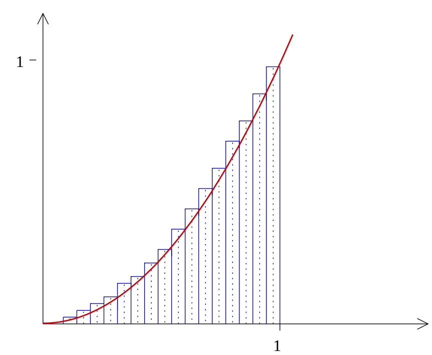
Reiknum undir- og yfirsummu

Í báðum tilfellum fáum við að

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(c_k)\cdot \Delta x_k = \frac{1}{3}$$

Drögum því þá ályktun að

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$



2.7.1 Examples

Dæmi:

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Skiptum $[0,1]$ í N hlutbil:

$$0 = x_0, \quad x_1 = \frac{1}{N}, \quad x_2 = \frac{2}{N}, \quad \ldots, x_{N-1} = \frac{N-1}{N}, \quad x_N = 1$$

Veljum c_k sem vinstri endapunkt hvers bils, þ.e.

$$c_k = \frac{k-1}{N}, \qquad k = 1,2,\ldots,N$$

Riemann summan fyrir þessa skiptingu og þetta val á c_k er

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k-1}{N}\right)^2\cdot\frac{1}{N}=RL_N$$

<u>Ath:</u> RL_N er neðri Riemann summa fyrir þessa skiptingu

$$\begin{aligned} RL_N &= \tfrac{1}{N^3}\textstyle\sum_{k=1}^{N}(k-1)^2 \\ &= \tfrac{1}{N^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+(N-1)^2) \end{aligned}$$

Hver er formúlan fyrir summu fyrstu $N-1$ kvaðratanna?

Sýna má fram á með þrepun (induction) að

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

því er

$$\begin{aligned} RL_N &= \tfrac{1}{N^3}\left(\tfrac{1}{3}(N-1)^3+\tfrac{1}{2}(N-1)^2+\tfrac{1}{6}(N-1)\right) \\ &= \tfrac{1}{3}\tfrac{(N-1)^3}{N^3}+\tfrac{1}{2}\tfrac{(N-1)^2}{N^3}+\tfrac{1}{6}\tfrac{N-1}{N^3} \end{aligned}$$

Látum nú $N\to\infty$ (ath. $\Delta x_k=1/N$ fyrir öll k);

$$\frac{(N-1)^2}{N^3}\to 0,\qquad \frac{N-1}{N^3}\to 0,\qquad \text{en}\qquad \left(\frac{N-1}{N}\right)^3\to 1$$

Þá fæst

$$\lim_{N\to\infty} RL_N=\frac{1}{3}$$

Hvað gerist ef við tökum c_k í hægri endapunkti hvers bils? Þ.e. $c_k=k/N$
Riemann summan:

$$\begin{aligned} RU_N=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^2\cdot\frac{1}{N} &= \tfrac{1}{N^3}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+N^2\right) \\ &= \tfrac{1}{N^3}\left(\tfrac{1}{3}N^3+\tfrac{1}{2}N^2+\tfrac{1}{6}N\right) \\ &= \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{N}+\tfrac{1}{6}\tfrac{1}{N^2} \qquad\longrightarrow \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

þegar $N\to\infty$ (og þar með $max_k|\Delta x_k|\to 0$).

Í báðum tilfellum fáum við að

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f(c_k)\cdot\Delta x_k=\frac{1}{3}$$

Drögum því þá ályktun að

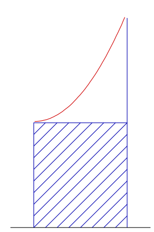
$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

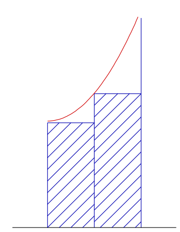
2.8 Fínni skiptingar og Riemann summur

neðri Riemann summa $\quad\leq I\leq\quad$ efri Riemann summa

þetta gildir alltaf.

Ef við tökum fínni skiptingu þannig að $P_1\subset P_2$ (P_2 er fínni en P_1) þá vex neðri Riemann summan en sú efri minnkar.





2.8.1 Details

$$\text{neðri Riemann summa} \quad \leq I \leq \quad \text{efri Riemann summa}$$

þetta gildir alltaf.

Ef við tökum fínni skiptingu þannig að $P_1 \subset P_2$ (P_2 er fínni en P_1) þá vex neðri Riemann summan en sú efri minnkar.

Neðri R-summur vaxa með fínni skiptingu. Neðri R-summurnar eru takmarkaðar að ofan (t.d. af hvaða efri R-summu sem er).

Höfum því runu af neðri summum sem vaxa, en eru takmarkaðar að ofan. Þær hafa því markgildi. Sama gildir um efri summur: þær eru takmarkaðar að neðan og minnkandi. Runan af efri summum hefur því markgildi. Ef þessi markgildi (fyrir efri summur og fyrir neðri summur) eru þau sömu, þá er þar komið

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

2.9 Sum föll eru ekki Riemann heildanleg

Tökum loks dæmi þar sem $\int_a^b f(x)\,dx$ er ekki til:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

2.9.1 Details

Tökum loks dæmi þar sem $\int_a^b f(x)\,dx$ er ekki til:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Á sérhverju bili $[x_{k-1}, x_k]$ eru bæði til ræðar og óræðar tölur. Minnsta gildi f í $[x_{k-1}, x_k]$ er því 0 og stærsta gildið 1. Allar neðri Riemann summur hafa því gildið 0 og allar efri Riemann summur gildið 1.

3 Grundvallarsetning stærðfræðigreiningarinnar

3.1 Meginsetningin 1.hluti

Látum f vera samfellt á $[a,b]$,

$$F(x) \equiv \int_a^x f(t)\,dt \qquad x \in [a,b]$$

Þá:

$F(x)$ hefur afleiðu $F'(x)$, $\forall x \in (a,b)$ og

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

3.1.1 Details

Látum f vera samfellt á $[a,b]$,

$$F(x) \equiv \int_a^x f(t)\,dt \qquad x \in [a,b]$$

Þá:
$F(x)$ hefur afleiðu $F'(x)$, $\forall x \in (a,b)$ og

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c) \qquad c \in [x,x+h],$$

skv. meðalgildissetningu fyrir heildi. Það er

$$\Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c), \qquad c \in [x,x+h] \\ \frac{dF}{dx}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ \qquad = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x) \end{array}$$

þ.e. $\qquad F'(x) = f(X).$

Hraði breytinga í flatarmáli, þ.e. $F'(x)$ er jafn hæð grafsins $f(x)$.
Ath: Neðri mörk heildisins (þ.e. a) skipta ekki máli:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\int_b^x f(t)\,dt$$

3.1.2 Examples

Dæmi:

1.
$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t^2\,dt = \sin x^2$$

2.

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} t^2\,dt = \left(x^2\right)^2 \cdot 2x = 2x^5$$

$$x \underbrace{\longrightarrow}_{2x} x^2 = u \quad \underbrace{\longrightarrow}_{u^2=\left(x^2\right)^2=x^4} \quad \int_0^u t^2\,dt = \int_0^{x^2} t^2\,dt$$

3.

$$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_a^x f(t)\,dt\right) = -f(x)$$

4.

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2+x}^a \sin t\,dt = -\sin(x^2+x)\cdot(2x+1)$$

3.2 Meginsetningin 2. hluti

Ef f er samfellt á $[a,b]$ og F er stofnfall f á $[a,b]$ (þ.e. $\forall x \in [a,b], F'(x) = f(x)$).

Þá er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

3.2.1 Details

$f(x)$ er samfellt í $[a,b]$ og $F(x)$ er stofnfall $f(x)$ í $x \in [a,b]$ ($\forall x \in [a,b], F'(x) = f(x)$).

Þá er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ath: Alltaf er til stofnfall f þ.e. $G(x) \equiv \int_a^x f(t)\,dt$ er stofnfall $f(x)$. (1.hluti)

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= (G(b)+C)-(G(a)+C) \\ &= G(b)-G(a) \qquad (C \text{ er fasti}) \\ &= \textstyle\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\ &= \textstyle\int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

3.2.2 Examples

Dæmi:

1.

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}(x^{10}-6x^2)\,dx = [x^{10}-6x^2]_0^1 = 1-6 = -5$$

Ath: Við skrifum

$$[F(x)]_a^b \equiv F(b) - F(a)$$

2.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

3. Finnið flatarmál svæðisins sem afmarkast af (a) x-ás, (b) $y = \sqrt{x}$, (c) $x = 4$:
$$\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{16}{3}$$

4. Finnið flatarmál svæðisins sem afmarkast af (a) x-ás, (b) $y = 3x^{-2}$, (c) $x = -3$, (d) $x = -1$.
$$\int_{-3}^{-1} 3x^{-2}\,dx = \left[-3x^{-1}\right]_{-3}^{-1} = -3(-1)^{-1} - (-3)(-3)^{-1} = \frac{-3}{-1} - \frac{-3}{-3} = 3 - 1 = 2$$

5. Finnið flatarmálið milli (a) $y = \cos 3x$, (b) x-ás, (c) $x = \frac{\pi}{6}$, (d) $x = \frac{\pi}{2}$
$$-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,dx = -\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{3}\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}$$

4 Heildunarreglur og meðalgildi

4.1 Meðalgildi falls

Meðalgildi f á $[a,b]$ er
$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

4.1.1 Details

Skilgreining: **Meðalgildi** f á $[a,b]$ er
$$\overline{f} = \mathrm{av}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Ath:
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\overline{f} = \text{ flatarmál rétthyrnings með grunnflöt } (b-a) \text{ og hæð } \overline{f}$$

$\overline{f}$ er því hæð rétthyrnings með grunnlínu $(b-a)$ sem hefur sama flatarmál og flatarmálið undir grafinu $y = f(x)$ á milli a og b.

4.2 Nokkrar reglur um heldi

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (skilgreining)
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (skilgreining)
- $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad k \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

4.2.1 Details

Heildunarreglur:

- $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \text{(skilgreining)}$$

  [Ath: Við getum litið svo á að $\Delta x_k < 0$ í Riemann summunum]

- $$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{(skilgreining)}$$

  [Öll $\Delta x_k = 0$ í Riemann summunni]

- $$\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad k \in \mathbb{R}$$

  $$[\underbrace{\sum_{k=1}^n k f(c_k)\Delta x_k}_{\to\int_a^b k f(x)\,dx} = k\underbrace{\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k}_{\to\int_a^b f(x)\,dx}]$$

- $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

  $$[\quad \sum_{k=1}^n (f(c_k)+g(c_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(c_k)\Delta x_k \quad]$$

4.3 Heildunarreglur (frh)

- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
- $$\min_{x\in[a,b]} f\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max_{x\in[a,b]} f\cdot(b-a)$$

  $$\min f\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^n \Delta x_k}_{(b-a)} \le \sum_{k=1}^n f(c_k)\cdot\Delta x_k \le \max f\underbrace{\sum_{k=1}^n \Delta x_k}_{(b-a)}$$

- $f(x) \ge g(x), \quad x\in[a,b] \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

4.3.1 Details

- $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

  $$[\qquad \sum_{k=1}^n f(c_k)\cdot\Delta x_k + \sum_{k=n+1}^m f(c_k)\cdot\Delta x_k]$$

  þar sem $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ og $P_2 = \{x_n, \ldots x_m\}$, $(x_0 = a, x_n = b, x_m = c)$ eru skiptingar á $[a,b]$ og á $[b,c]$]

- $$\min_{x\in[a,b]} f\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max_{x\in[a,b]} f\cdot(b-a)$$
$$\min f\cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k}_{(b-a)} \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k \le \max f \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k}_{(b-a)}$$

- $f(x) \ge g(x), \quad x\in[a,b]$
$$\Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\left(\quad f(x)\ge 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \ge 0, \quad \text{sértilfelli} \quad \right)$$
$$\left[\qquad \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \ge \sum_{k=1} g(c_k)\Delta x_k \qquad \right]$$

4.4 Meðalgildissetning fyrir heildi

Látum f vera samfellt á $[a,b]$. Þá er til $c\in[a,b]$ þ.a.
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

4.4.1 Details

Setning Látum f vera samfellt á $[a,b]$. Þá er til $c\in[a,b]$ þ.a.
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Sönnun:
$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

(Sjá (6)). Þar sem $f(x)$ er samfellt á $[a,b]$ tekur f öll gildi milli $\min f$ og $\max f$, þar á meðal $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Flatarmál rétthyrnings með grunnlínu $(b-a)$ og hæð $f(c)$ er jafnt flatarmáli undir grafinu á milli a og b.

Ath: Nauðsynlegt er að f sé samfellt.

5 Heildi og afleiður logra og veldisvísisfalla

5.1 Skilgreining: Náttúrulegi logrinn

Ein skilgreining á ln er

$$\ln x \equiv \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0.$$

5.1.1 Details

Náttúrulega logrann má skilgreina á marga jafngilda vegu.

Skilgreining:

$$\ln x \equiv \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0$$

5.2 Ýmsir eiginleikar logra

1. $$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$
2. $$\ln x = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0, \qquad 0 < x < 1$$
3. $$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt > 0, \qquad x > 1$$
4. $$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x} \quad x > 0$$
5. $$\frac{d^2}{dx^2}\ln x = -\frac{1}{x^2} < 0$$

5.2.1 Details

Þurfum nú að sýna fram á lograeiginleikana; en athugið fyrst

1. $$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$
2. $$\ln x = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0 \qquad \text{ef} \quad 0 < x < 1$$

3.
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt > 0 \qquad \text{ef} \quad x > 1$$

4.
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x} \quad x > 0$$

(því $\frac{1}{t}$ er samfellt fall fyrir $t > 0$.)
(ath: $\frac{d}{dx}\ln x > 0$. Því er $\ln x$ samfellt, diffranlegt og vaxandi fyrir $x > 0$)

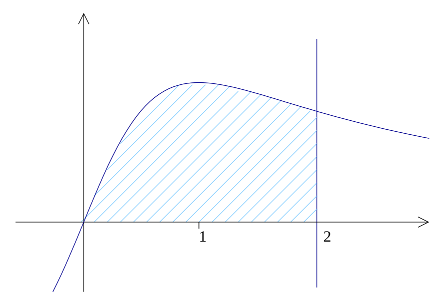
5.
$$\frac{d^2}{dx^2}\ln x = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Graf $\ln x$ er því hvelft niður $x > 0$.

5.3 Logradæmi

Finnið flatarmálið milli $y = \frac{2x}{x^2+1}$, x-áss, $x = 0$, $x = 2$:

$$A = \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \underbrace{\int_1^5 \frac{1}{u}\,du}_{u=x^2+1 \quad du=2x\,dx} = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$$



5.3.1 Details

Ath: Getum nú heildað ýmis föll eins og t.d. $\tan x$.

$$\begin{aligned} \int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \\ &= \underbrace{-\int \frac{1}{u}\,du}_{u=\cos x, \quad -du=\sin x\,dx} \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C \\ (&= \ln|\sec x| + C) \end{aligned}$$

5.3.2 Examples

1.
$$\int_5^{10} \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_5^{10} = \ln 10 - \ln 5 = \ln 2$$

2.
$$\int \frac{1}{1-4x}\,dx = \underbrace{\int \frac{1}{u}\left(\frac{du}{-4}\right)}_{u=1-4x, \quad du=-4\,dx} = \frac{-1}{4}\ln|u| = \frac{-1}{4}\ln|1-4x| + C$$

3. Finnið flatarmálið milli $y = \frac{2x}{x^2+1}$, x-áss, $x = 0$, $x = 2$:

$$A = \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \underbrace{\int_1^5 \frac{1}{u}\,du}_{u=x^2+1 \quad du=2x\,dx} = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$$

5.4 Afleiða og stofnfall exp

Afleiða e^x:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

5.4.1 Details

Setning (Afleiða e^x):

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Sönnun:

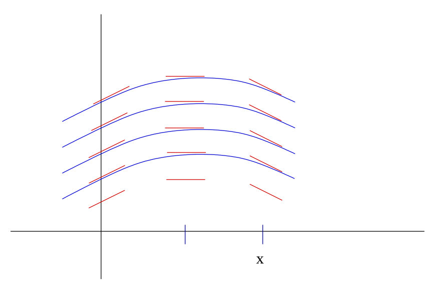
$$\begin{aligned} y = e^x \quad &\Leftrightarrow \quad \ln y = x \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{y}\tfrac{dy}{dx} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{dy}{dx} = y \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{dy}{dx} = e^x \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{d}{dx}e^x = e^x \end{aligned}$$

Stofnfall e^x:

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

5.5 Einfaldar diffurjöfnur

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x \cdot y, \quad y(0) = 1$$



5.5.1 Details

Við erum nú í aðstöðu til að leysa einfaldar diffurjöfnur:

Við höfum þegar sé hvernig á að leysa

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

($y(x) = \int f(x)\,dx + C$) Ath: Þetta þýðir að hallatala lausnarferils er $f(\hat{x})$ þegar $x = \hat{x}$.

Ath: Fyrir fast x er hallatalan sú sama, **óháð** y.

Hvað ef $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$?
þ.e. hallatalan í punkti (x,y) er háð bæði x og y:

5.5.2 Examples

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x \cdot y, \quad y(0) = 1$$

Deilum í gegn með y:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x$$

Heildum m.t.t. x:

$$\begin{aligned} & \int \tfrac{1}{y(x)} \tfrac{dy}{dx}\,dx = \int 2x\,dx \\ & \int \tfrac{1}{y}\,dy = \int 2x\,dx \\ \Rightarrow \quad & \ln y + C_1 = x^2 + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \ln y = x^2 + C_3 \\ \Rightarrow \quad & y(x) = e^{x^2 + C_3} \\ \Rightarrow \quad & y(x) = e^{C_3} e^{x^2} \\ \Rightarrow \quad & y(x) = Ce^{x^2} \end{aligned}$$

$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = Ce^0 = C$

$$\Rightarrow \quad y(x) = e^{x^2}$$

Ath: Þetta er sá ferill í $x - y$ plani sem hefur hallatölu $2x \cdot y$ í punktinum (x,y) og gengur í gegnum punktinn $(0,1)$.

6 Ákveðin heildi og flatarmál

6.1 Innsetning í ákveðnum heildum

1. $$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$
2. Reiknum óákveðið heildi (stofnfall) með innsetningu og setjum svo inn mörkin.

6.1.1 Details

1. $$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

   Setjum $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$,
   $x = a \Rightarrow u = g(a)$, $x = b \Rightarrow u = g(b)$.

   $$\left[\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= [F(g(x))]_{x=a}^{x=b} \qquad (F' = f) \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= [F(u)]_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \textstyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \end{aligned} \right]$$

2. Reiknum óákveðið heildi (stofnfall) með innsetningu og setjum svo inn mörkin.

6.1.2 Examples

Dæmi um (1):

1. $$\begin{aligned} \int_0^5 x\sqrt[3]{100 - x^2}\,dx &= \textstyle\int_{100}^{75} \sqrt[3]{u}(-\frac{1}{2}\,du) \qquad \begin{cases} u = 100 - x^2 \\ du = -2x\,dx \\ x\,dx = -\frac{1}{2}\,du \end{cases} \\ &= \tfrac{1}{2} \textstyle\int_{75}^{100} u^{\frac{1}{3}}\,du \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right]_{75}^{100} \\ &= \tfrac{3}{8}(100^{\frac{4}{3}} - 75^{\frac{4}{3}}) \end{aligned}$$

2. $$\int_0^8 \frac{x}{1 + x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int_0^2 \frac{3u^5}{1+u}\,du$$

   $$\left[\begin{aligned} u = {} & x^{\frac{1}{3}}, \quad du = \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx \\ \Rightarrow \quad x\,dx &= 3 \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x \cdot du \\ &= 3u^2 \cdot u^3\,du \\ &= 3u^5\,du \end{aligned} \right]$$

... sjá síðar.

Dæmi um (2): (1)

$$\int_{-1}^1 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}(1)$$

(2)

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx \quad = \int \sqrt{u}\,du \qquad \begin{cases} u = x^3+1 \\ du = 3x^2\,dx \end{cases}$$
$$= \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \tfrac{2}{3}(1+x^3)^{\frac{3}{2}} + C$$

því fæst:

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \left[\frac{2}{3}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

6.2 Setning

1. Ef $f(x)$ er jafnstætt fall, þá er
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
2. Ef $f(x)$ er oddstætt fall, þá er
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$
.

6.2.1 Details

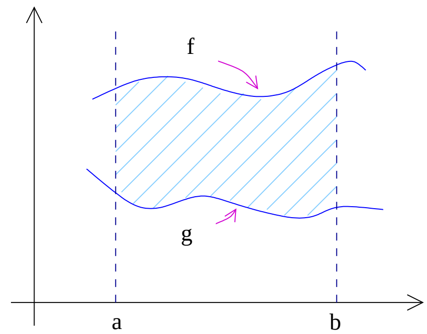
Setningar:

1. Ef $f(x)$ er jafnstætt fall, þá er
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
Sönnun:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \qquad = \textstyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$
$$= \textstyle\int_a^0 f(-u)(-du) + \int_0^a f(x)\,dx \qquad (u=-x)$$
$$= \textstyle\int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx$$
$$= \textstyle\int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx \qquad (f \text{ jafnstætt})$$
$$= 2\textstyle\int_0^a f(x)\,dx$$
2. Ef $f(x)$ er oddstætt fall, þá er
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$
Sönnun:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \qquad = \textstyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$
$$= \textstyle\int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx \qquad (\text{sbr. } (1))$$
$$= -\textstyle\int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

6.3 Flatarmál milli grafa

G.r.f. $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$. Flatarmál milli $y = f(x)$ og $y = g(x)$ er:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



6.3.1 Details

G.r.f. $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$. Flatarmál milli $y = f(x)$ og $y = g(x)$ er:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$\Bigg[\quad A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \qquad = (\text{flatarmál „undir“ } y = f(x)) \\ -(\text{flatarmál „undir“ } y = g(x)) \quad \Bigg]$$

<u>Ath:</u> Ef $g(x) \leq 0$ þá er $\int_a^b g(x)\,dx \leq 0$ og „neikvætt“ flatarmál fæst úr heildinu sem leggst þá við flatarmálið $\int_a^b f(x)\,dx$ við frádráttinn $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$.

Einnig má skilgreina út frá Riemann summum fyrir $f(x) - g(x)$.

6.3.2 Examples

<u>Dæmi:</u> Finnið flatarmál svæðisins sem afmarkast af $y = x^2$ og $y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$.

$$\begin{aligned} A &= \textstyle\int_0^2 (-x^2 + 4x - x^2)\,dx \\ &= \textstyle\int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx \\ &= \left[2x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= 2 \cdot 2^2 - \tfrac{2}{3} \cdot 2^3 = 8 - \tfrac{16}{3} = \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

7 Nálganir

7.1 Miðpunktsreglan

Reikna skal nálgunargildi $\int_a^b f(x)\,dx$.
Skiptum bilinu í n jafnstór minni bil.
Setjum $y_i = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$ og $A_i = y_i \cdot \Delta x_i = y_i \cdot h \qquad i = 1,2,\ldots,n$ Nálgunargildi:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \qquad &\approx \textstyle\sum_{i=1}^n A_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n y_i \cdot h \\ &= h\,(y_i + y_2 + \cdots + y_n)\end{aligned}$$

7.1.1 Details

Reikna skal nálgunargildi $\int_a^b f(x)\,dx$

Þegar ekki er hægt að finna stofnfall verður að heilda tölulega (þ.e. finna nálgunargildi, svipað og Riemann summur).

Lítum á 3 mest notuðu reglurnar. Í öllum tilfellum skulum við gera ráð fyrir að búið sé að skipta bilinu $[a,b]$ í n jafnstór undirbil af lengd $h = \frac{b-a}{n}$. Setjum

$$y_i = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$
$$A_i = y_i \cdot \Delta x_i = y_i \cdot h \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Nálgunargildi:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \qquad &\approx \textstyle\sum_{i=1}^n A_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n y_i \cdot h \\ &= h\,(y_i + y_2 + \cdots + y_n)\end{aligned}$$

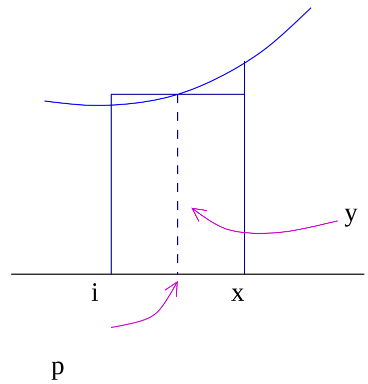
7.2 Trapisureglan

Flatarmál trapisunnar:

$$A_i = \frac{1}{2}(y_{i-1}+y_i)\cdot h \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Nálgunargildi:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = h\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\right)$$



7.2.1 Details

Flatarmál trapisunnar:

$$A_i = \frac{1}{2}(y_{i-1}+y_i)\cdot h \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

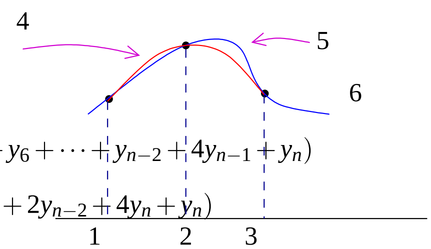
Nálgunargildi:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \quad &\approx \textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i = h\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\right)\\ &= \tfrac{h}{2}(y_0+y_1+y_1+y_2+\cdots+y_{n-2}+y_{n-1}+y_{n-1}+y_n)\\ &= \tfrac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n)\end{aligned}$$

7.3 Regla Simpson

Finnum fleygboga í gegnum punktana $(x_{i-1},y_{i-1}),(x_i,y_i),(x_{i+1},y_{i+1})$ Nálgunargildi:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \quad &\approx \tfrac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2+y_2+4y_3+y_4+y_4+4y_5+y_6+\cdots+y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)\\ &= \tfrac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+2y_{n-2}+4y_n+y_n)\end{aligned}$$



7.3.1 Details

Finnum fleygboga í gegnum punktana $(x_{i-1},y_{i-1}),(x_i,y_i),(x_{i+1},y_{i+1})$

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+C)\,dx \quad &= 2\textstyle\int_0^h (Ax^2+C)\,dx\\ &= 2A\tfrac{h^3}{3}+2C\cdot h\end{aligned}$$

$y = Ax^2 + Bx + C$ gengur í gegnum $(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$, $\quad \Longrightarrow$

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \quad y_1 = C, \quad y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

$\Longrightarrow \qquad C = y_1$

$$\begin{cases} Ah^2 - Bh = y_0 - y_1 \\ Ah^2 + Bh = y_2 - y_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2Ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$$

$\Longrightarrow \qquad$ Flatarmál undir $y = Ax^2 + Bx + C$ milli $x = -h$ og $x = h$ er:

$$\begin{aligned} \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right) &= \tfrac{h}{3}\left(y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1\right) \\ &= \tfrac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) \end{aligned}$$

Beitum þessari formúlu á samliggjandi pör svæða:

Nálgunargildi:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\approx \tfrac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6 + \cdots + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right) \\ &= \tfrac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_n + y_n\right) \end{aligned}$$

Ath: $y_i = f(x_i)$, $\qquad x_i = a + i \cdot h$
Ath: n verður að vera slétt tala.

7.4 Dæmi

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Tökum $n = 4$, $h = \frac{1}{4}$.
$x_0 = 0 \quad x_1 = 0,25 \quad x_2 = 0,50 \quad x_3 = 0,75 \quad x_4 = 1,00$

7.4.1 Examples

Dæmi:

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Tökum $n = 4$, $h = \frac{1}{4}$.
$x_0 = 0 \quad x_1 = 0,25 \quad x_2 = 0,50 \quad x_3 = 0,75 \quad x_4 = 1,00$

1. Miðpunktsreglan $\qquad y_i = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$

$$\begin{aligned} h(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) &= 0,25\left(\left(\tfrac{1}{8}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{8}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{8}\right)^2 + \left(\tfrac{7}{8}\right)^2\right) \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{64}\left(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2\right) \\ &= \tfrac{84}{4 \cdot 64} = \tfrac{21}{64} = 0,3281 \end{aligned}$$

2. Trapisureglan. $h = 1/4$
$y_i = f(x_i)$
$y_0 = f(0) = 0$
$y_1 = f(1/4) = 1/16$
$y_2 = f(1/2) = 1/4$
$y_3 = f(3/4) = 9/16$
$y_4 = f(1) = 1$

$$\frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) = \tfrac{1}{8}\left(0 + \tfrac{2}{16} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{2}{16}\cdot 9 + 1\right)$$
$$= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{2+8+18+16}{16}\right) = \tfrac{44}{8\cdot 16} = \tfrac{11}{32} = 0{,}3437$$

3. Regla Simpson $h = 1/4, \quad n = 4.$

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$y_0 = (0)^2 = 0$
$y_1 = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$
$y_2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
$y_3 = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$
$y_4 = 1^2 = 1$

$$\frac{1}{4\cdot 3}\left(0 + 4\cdot\frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{9}{16} + 1\right) = \tfrac{1}{12}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{9}{4} + \tfrac{4}{4}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}$$ **Ath:** Þetta er rétta gildið!

Simpson reglan nálgar fallið $f(x)$ með parabólum og heildar þær. Hér er fallið hins vegar parabóla svo að nálgunin er sú sama og fallið.

Skekkja

1. Miðpunktsreglan

$$|E_M| \le \frac{(b-a)}{24}h^2 M$$
$$M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|, \qquad h = \frac{(b-a)}{n}$$

2. Trapisureglan

$$|E_T| \le \frac{(b-a)}{12}\cdot h^2 M$$
$$M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|; \qquad h = \frac{(b-a)}{n}$$

3. Regla Simpson

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180}\cdot h^4 M$$
$$M = \max_{x\in[a,b]} |f^{(iv)}(x)|, \qquad h = \frac{(b-a)}{n}$$

Ath: Skekkjan í Simpson minnkar mun hraðar, en skekkjan í miðpunktsreglunni eða trapisureglunni þegar billengdin h er minnkuð;
þ.e.

$$|E_S| \sim h^4 \qquad (= O(h^4))$$

en

$$|E_T| \sim h^2 \qquad (= O(h^2))$$

og eins fyrir miðpunktsregluna. Ath: Við segjum að stærð $f(x)$ sé $O(x^n)$ þegar $x \to 0$ ef

$$\left| \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} \right| < \infty$$

þ.e $f(x)$ og x^n minnka jafnhratt þegar $x \to 0$.

8 Hlutheildun og stofnbrot

8.1 Hlutheildun

Fyrir $f,\ g$ diffranleg gildir $(fg)' = f'g + g'f$ og þá $f'g = (fg)' - fg'$:

$$\int f(x)g(x)'dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Þessa aðferð má umrita:

$$\int uv'\,dx = u(x)v(x) - \int vu'\,dx$$

8.1.1 Details

Höfum

$$\begin{aligned} & \tfrac{d}{dx}(uv) = u\tfrac{dv}{dx} + v\tfrac{du}{dx} \\ \Rightarrow \qquad & \textstyle\int (uv)'\,dx = \int u\,\underbrace{v'dx}_{dv} + \int v\,\underbrace{u'dx}_{du} \\ \Rightarrow \qquad & (uv) = \textstyle\int u\,dv + \int v\,du \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

sem má líka skrifa

$$\int uv'\,dx = u(x)v(x) - \int vu'\,dx$$

Ath: Við flytjum diffrun frá v yfir á u.

8.1.2 Examples

Dæmi 0: $\int x^2 e^{-x}\,dx$

$u = x^2$, $v' = e^{-x}$.

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = x^2(-e^{-x}) + \int 2xe^{-x}\,dx$$

$u = 2x$, $v' = e^{-x}$

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} &= -x^2e^{-x} + 2x(-e^{-x}) + \textstyle\int e^{-x}\cdot 2\,dx \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C\end{aligned}$$

Ath: $(x^2, 2x, 2$

Dæmi 1: $\int \ln x\,dx = \int \ln x \cdot 1\,dx$

Setjum $u = \ln x$, $v = x$ $(dv = 1 \cdot dx)$

$$\begin{aligned}\int 1\cdot \ln x\,dx &= \ln x \cdot x - \textstyle\int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x\cdot \ln x - x + C \\ \int \ln x\,dx &= x\cdot \ln x - x + C\end{aligned}$$

Dæmi2: $\int e^x \sin x\,dx$

$u = e^x$, $v' = \sin x \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x\,dx &= e^x(-\cos x) + \textstyle\int \cos x e^x\,dx \\ &= -e^x\cos x + \textstyle\int \cos x e^x\,dx \\ &(u = e^x,\ v' = \cos x \quad \Rightarrow \quad v = \sin x) \\ &= -e^x\cos x + e^x \sin x - \textstyle\int \sin x e^x\,dx\end{aligned}$$

þ.e.

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\,dx$$

(jafna fyrir $\int e^x \sin x\,dx$)

$$\Rightarrow \qquad \int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

8.2 Stofnbrot

Markmiðið er að leysa rætt fall $\frac{f(x)}{g(x)}$ (f og g margliður) upp í summu stofnbrota.

Kljúfum „flókin“ brot upp í einfaldari brot, sem hægt er að heilda.

Dæmi:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

8.2.1 Details

Ætlum að kljúfa „flókin“ brot upp í einfaldari brot, sem hægt er að heilda.

Markmiðið er sem sé að leysa rætt fall $\frac{f(x)}{g(x)}$ (f og g margliður) upp í summu stofnbrota.

Athugum fyrst að allar margliður með rauntölustuðla hafa rætur í $\mathbb{C}$ og við getum alltaf skrifað $p(x) = \Pi\,(x-a_i)$ þar sem sumar rætur koma e.t.v. oft fyrir. Athugum svo að ef $a \in \mathbb{C}$ er slík rót þá er $\overline{a}$ líka rót og að $(x-a_i)\,(x-\overline{a_i})$ er 2. stigs margliða með raunstuðla. Við höfum þá: Ef p er margliða með rauntölustuðla, þá má rita p sem margfeldi af línulegum og kvaðratískum liðum.

8.2.2 Examples

Dæmi:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

(Athugið að auðvelt er að heilda hægri hliðina).

8.3 Stofnbrot (frh)

Gerum ráð fyrir að

$$\text{stig}\, f(x) < \text{stig}\, g(x)$$

Ef ekki, má deila g uppí f og skoða afganginn:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{q(x)}{g(x)} \qquad p,\ q \text{ margliður}$$

Dæmi:

$$\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+x-1} = x+1+\frac{x+2}{x^2+x-1}$$

8.3.1 Details

Gerum ráð fyrir að
$$\text{stig}\, f(x) < \text{stig}\, g(x)$$
Ef ekki, má deila g uppí f og skoða afganginn:
$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{q(x)}{g(x)} \qquad p,\ q \text{ margliður}$$

8.3.2 Examples

<u>Dæmi:</u>
$$\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+x-1} = x+1+\frac{x+2}{x^2+x-1}$$

8.4 Línulegir þættir í nefnara

Ef $(x-r)^m$ er þáttur $g(x)$ þá fengjum við summu
$$\frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$
við þann þátt. Gerum þetta við hvern svona þátt í $g(x)$.

8.4.1 Details

Finnum alla þætti $g(x)$, þ.e.
$$g(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_m)^{\alpha_m}$$
Ef $(x-r)^m$ er þáttur $g(x)$ þá fengjum við summu
$$\frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$
við þann þátt. Gerum þetta við hvern svona þátt í $g(x)$:

8.4.2 Examples

<u>Dæmi 1:</u>
$$\begin{aligned} & \tfrac{2x+2}{x^2-2x+1} = \tfrac{2x+2}{(x-1)^2} = \tfrac{A_1}{x-1} + \tfrac{A_2}{(x-1)^2} \\ \Rightarrow \quad & 2x+2 = A_1(x-1)+A_2 \end{aligned}$$
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Stuðlar við } x\text{:} & 2 = A_1 \\ \text{Stuðlar við 1:} & 2 = -A_1 + A_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad A_2 = 4$$
þ.e.
$$\frac{2x+2}{x^2-2x+1} = \frac{2x+2}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$$

Dæmi 2:

$$\frac{x+1}{x^3-x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x^2-x-6)} = \frac{x+1}{x(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

$$\Rightarrow \qquad x+1 = A(x-3)(x+2) + Bx(x-3) + Cx(x+2)$$

Setjum svo stuðla við 1, x og x^2, þá sömu á vinstri og hægri hlið jöfnunnar:

$$\begin{aligned} x+1 &= A(x^2-x-6) + B(x^2-3x) + C(x^2+2x) \\ &= (A+B+C)x^2 + (-A-3B+2C)x - 6A \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -A-3B+2C &= 1 \\ -6A &= 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

$B = -\frac{1}{10}, \quad C = \frac{8}{30}$

$$\frac{x+1}{x(x+2)(x-3)} = \frac{-\frac{1}{6}}{x} - \frac{\frac{1}{10}}{x+2} + \frac{\frac{4}{15}}{x-3}$$

Hér er þó einfaldara að setja $x = 0$ inn í jöfnuna:

$$\begin{aligned} x+1 &= A(x-3)(x+2) + Bx(x-3) + Cx(x+2) \\ \Rightarrow \qquad 1 &= A(-3)(2) \qquad \Rightarrow \qquad A = -\tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

$x = -2$:

$$-2+1 = 0 + B(-2)(-5) + 0$$
$$\Rightarrow \qquad B = -\frac{1}{10}$$

$x = 3$:

$$4 = 0 + 0 + C \cdot 3 \cdot 5$$
$$\Rightarrow \qquad C = \frac{4}{15}$$

8.5 Kvaðratískir þættir í nefnara

Ef $g(x)$ inniheldur kvaðratíska þætti, ax^2+bx+c, sem ekki er hægt að þátta frekar (t.d. x^2+1), þá verða stofnbrotin sem svara til þessa þáttar (þ.e. til $(x^2+px+q)^n$):

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

8.5.1 Details

Ef $g(x)$ inniheldur kvaðratíska þætti, ax^2+bx+c, sem ekki er hægt að þátta frakar (t.d. x^2+1), þá verða stofnbrotin sem svara til þessa þáttar (þ.e. til $(x^2+px+q)^n$):

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

8.5.2 Examples

Dæmi:

$$\begin{aligned} \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \\ \Rightarrow \qquad -2x+4 &= (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) + D(x^2+1) \end{aligned}$$

Ath: $x = 1$ gefur: $-2+4 = D \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad D = 1$, en við getum ekki fundið fleiri stuðla með því að setja inn ákveðin x-gildi.

Tökum saman veldi á x:

$$-2x+4 = (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B+C)x + (B-C+D)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} A+C &= 0 \\ -2A+B-C+D &= 0 \\ A-2B+C &= -2 \\ B-C+D &= 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A &= 2 \\ B &= 1 \\ C &= -2 \\ D &= 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+1}}_{=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Stofnfallið er því

$$\ln(x^2+1) + \tan^{-1} x - 2\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C$$

8.6 Samantekt um stofnbrot

$\frac{f(x)}{g(x)}$ leyst í stofnbrot.

- Ef $(x-r)^m$ er þáttur í $g(x)$:

$$\frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

  =stofnbrotaliðirnir sem svara til $(x-r)^m$.

- $(x^2+px+q)^n$ þáttur í $g(x)$:

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

  eru stofnbrotaliðirnir sem svara til $(x^2+px+q)^n$.

8.6.1 Details

$\frac{f(x)}{g(x)}$ leyst í stofnbrot.

- $(x-r)^m$ þáttur í $g(x)$:
$$\frac{A_1}{(x-r)}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-r)^m}$$
eru stofnbrotaliðirnir sem svara til $(x-r)^m$.
- $(x^2+px+q)^n$ þáttur í $g(x)$:
$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$
eru stofnbrotaliðirnir sem svara til $(x^2+px+q)^n$.

Ath: Almenna aðferðin er að margfalda í gegn með $g(x)$ og setja stuðla við veldi af x, þá sömu vinstra og hægra megin jöfnu. Þá fást jöfnur fyrir óþekktu stuðlana $A_i, B_i, C_i \qquad i=1,2,\ldots$.

Í þeim tilfellum þegar $g(x)$ inniheldur enga kvaðratíska þætti (sem ekki er hægt að þátta) og $m=1$ fyrir allar rætur $g(x)$, þá er til einfaldari leið (sbr. dæmi (2) í kafla 1.5 hér að framan).

8.7 Aðferð Heaviside

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)+\cdots(x-r_n)}$$

Ath: 1. veldi á öllum þáttum $g(x)$ og engir óþættanlegir kvaðratískir þættir.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \tfrac{A_1}{(x-r_1)}+\tfrac{A_2}{(x-r_2)}+\cdots+\tfrac{A_n}{(x-r_n)}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \tfrac{A_i}{(x-r_i)}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}f(x) &= \textstyle\sum_{i=1}^n \tfrac{A_i g(x)}{(x-r_i)}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \tfrac{A_i(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)}{(x-r_i)}\end{aligned}$$

$(x-r_i)$ styttist út í lið númer i fyrir öll i frá 1 til n.

8.7.1 Details

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)+\cdots(x-r_n)}$$

Ath: 1. veldi á öllum þáttum $g(x)$ og engir óþættanlegir kvaðratískir þættir.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \tfrac{A_1}{(x-r_1)}+\tfrac{A_2}{(x-r_2)}+\cdots+\tfrac{A_n}{(x-r_n)}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \tfrac{A_i}{(x-r_i)}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}f(x) &= \textstyle\sum_{i=1}^n \tfrac{A_i g(x)}{(x-r_i)}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \tfrac{A_i(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)}{(x-r_i)}\end{aligned}$$

$(x-r_i)$ styttist út í lið númer i fyrir öll i frá 1 til n.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \underbrace{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x-r_j)}_{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_{i-1})(x-r_{i+1})\cdots(x-r_n)}$$

Setjum svo $x = r_k$:

$$\begin{aligned} f(x_k) &= \sum_{i=1}^{n} A_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (r_k - r_j) \\ &= A_k \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (r_k - r_j) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$A_k = \frac{f(x_k)}{\underbrace{\prod_{\substack{j=k \\ j\neq i}}^{n} (r_k - r_j)}_{(r_k-r_1)(r_k-r_2)\cdots(r_k-r_{k-1})(r_k-r_{k+1})\cdots(r_k-r_n)}}$$

þ.e. allir þættir $(r_k - r_j)$ nema $j = k$.

8.7.2 Examples

<u>Dæmi:</u>

$$\frac{2x+1}{x^2-7x+12} = \frac{2x+1}{(x-3)(x-4)}$$

$r_1 = 3$, $r_2 = 4$, $f(x) = 2x+1$

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{f(r_1)}{r_1-r_2} = \tfrac{2\cdot 3+1}{3-4} = -7 \\ A_2 &= \tfrac{f(r_2)}{r_2-r_1} = \tfrac{2\cdot 4+1}{4-3} = 9 \end{aligned}$$

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x-4)} = -\frac{7}{x-3} + \frac{9}{x-4}$$

Samanber:

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x-4)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-4}$$

$\Rightarrow$

$$2x+1 = A_1(x-4) + A_2(x-3)$$

$x = 3$: $\quad 7 = A_1(-1) \quad \Rightarrow \quad A_1 = -7.$
$x = 4$: $\quad 9 = A_2 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 9.$

9 Óeiginleg heildi

9.1 Heildað yfir ótakmarkað bil

1. f samfellt á $[a,\infty)$,
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
2. f samfellt á $(-\infty,b]$,
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
3. f samfellt á $(-\infty,\infty)$
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$
($c \in (-\infty,\infty)$; hægri hlið skilgreind í (i) og (ii)).

9.1.1 Details

Skoðum tvennskonar heildi þar sem venjuleg skilgreining út frá Riemann summum gengur ekki:

I Bilið sem heildað er yfir er ekki takmarkað, þ.e. heildað yfir $[a,b]$ þar sem a og/eða b er ótakmarkað; $(-\infty,b],[a,\infty),(-\infty,\infty)$.

II $f(x)$ er ekki takmarkað á $[a,b]$.

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx; \qquad \lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty, \qquad c\in[a,b]\right)$$

Tökum (I) fyrir fyrst:

Skilgreining:

(a) f samfellt á $[a,\infty)$,
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
(b) f samfellt á $(-\infty,b]$,
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
(c) f samfellt á $(-\infty,\infty)$
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$
($c \in (-\infty,\infty)$; hægri hlið skilgreind í (i) og (ii)).

9.2 Dæmi

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-e^{-b}\right) = 1$$

Reiknum þetta svona:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = -e^{-\infty}-(-1) = 1$$

9.2.1 Details

Við getum stundum ákvarðað hvort heildi (óeiginlegt) er samleitið með því að bera saman við heildi þar sem samleitni er þekkt.

Setning: $f(x)$ og $g(x)$ samfelld á $[a,\infty)$ og $0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \ge a$. Þá

1. $$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{er samleitið ef} \quad \int_a^\infty g(x) \quad \text{er samleitið.}$$
2. $$\int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{er ósamleitið ef} \quad \int_a^\infty f(x) \quad \text{er ósamleitið.}$$

Sönnun:

$$f(x) \le g(x) \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

látum svo b stefna á ∞.

9.2.2 Examples

Dæmi 1:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-e^{-b}\right) = 1$$

Reiknum þetta svona:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = -e^{-\infty}-(-1) = 1$$

Dæmi 2:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} &= \left[\tfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^\infty \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\tfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\tfrac{1}{-p+1}\left(\tfrac{1}{b^{p-1}}-1\right) = \begin{cases}\frac{1}{p-1} & p>1\\ \infty & p<1\end{cases}\end{aligned}$$

þ.e.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases}\frac{1}{p-1} & p>1\\ \infty & p<1\end{cases}$$

Samleitið heildi ef $p > 1$.
$p = 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

9.3 Heildað yfir bil þar sem f(x) er ekki takmarkað

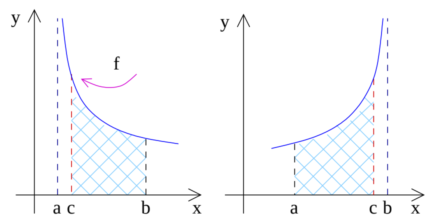
1. f samfellt á $(a,b]$ $\quad(\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

2. $f(x)$ samfellt á $[a,b)$ $\quad(\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx,$$

ef þessi markgildi eru til.



3. f samfellt á $[a,c)\cup(c,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{(2)} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{(1)}$$

9.3.1 Details

Skoðum nú (II). Gerum ráð fyrir að $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$

<u>Skilgreining</u>

1. f samfellt á $(a,b]$ $\quad(\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

2. $f(x)$ samfellt á $[a,b)$ $\quad(\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx,$$

ef þessi markgildi eru til.

3. f samfellt á $[a,c)\cup(c,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{(2)} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{(1)}$$

9.4 Dæmi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+}\left(2-2\sqrt{c}\right) = 2$$

9.4.1 Examples

Dæmi 1:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+}\left(2-2\sqrt{c}\right) = 2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{(2)} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{(1)}$$

Dæmi 2:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

(ath: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^p} = \infty \quad$ ef $p>0$).

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \quad &= \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \tfrac{1}{x^p}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[\tfrac{x^{-p+1}}{1-p}\right]_c^1 \\ &= \tfrac{1}{1-p}\left(1-\lim_{c\to 0^+} c^{1-p}\right) = \begin{cases}\frac{1}{1-p} & p<1\\ \infty & p\ge 1\end{cases}\end{aligned}$$

$p=1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left[\ln x\right]_c^1 = 0 - \lim_{c\to 0^+}\ln c = \infty$$

9.5 Setning

$f(x)$ og $g(x)$ samfelld á $[a,\infty)$ og $0\le f(x)\le g(x) \quad \forall x\ge a$. Þá

1. $$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{er samleitið ef} \quad \int_a^\infty g(x) \quad \text{er samleitið.}$$

2. $$\int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{er ósamleitið ef} \quad \int_a^\infty f(x) \quad \text{er ósamleitið.}$$

9.5.1 Examples

Dæmi:

$$e^{-x^2}\le e^{-x} \qquad \forall x\ge 1$$

$(x^2\ge x \quad\Rightarrow\quad -x^2\le -x \quad\Rightarrow\quad e^{-x^2}\le e^{-x})$.

$$e^{-x^2}\le e^{-x} \quad\Rightarrow\quad \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \le \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = e^{-1}$$

9.6 Athugið

Getum borið saman tvö föll á annan hátt:

$f(x), g(x)$ eru ≥ 0 og samfelld á $[a, \infty)$.

Ef

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty$$

þá eru heildin $\int_a^\infty f(x)\,dx$ og $\int_a^\infty g(x)\,dx$ bæði samleitin eða hvorugt.

9.6.1 Details

Getum borið saman tvö föll á annan hátt:

$f(x), g(x)$ eru ≥ 0 og samfelld á $[a, \infty)$.

Ef

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty$$

þá eru heildin $\int_a^\infty f(x)\,dx$ og $\int_a^\infty g(x)\,dx$ bæði samleitin eða hvorugt.

<u>Ath:</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad (0 < L < \infty)$$

merkir að $f(x)$ og $g(x)$ minnka jafnhratt þegar $x \to \infty$.

9.6.2 Examples

<u>Dæmi:</u>

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \quad \to \quad 1, \quad x \to \infty$$

$\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx$ er ósamleitið $\quad \Rightarrow \quad \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ er ósamleitið.