

# Óákveðin heildi

## math104-4calc Heildi

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

October 24, 2016

## Stofnfall

$F$  er stofnfall (antiderivative)  $f$  ef  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$

Mengi stofnfalla  $f$  er óákveðið heildi  $f$  m.t.t.  $x$  og er táknað  $\int f(x) dx$

Ef  $F$  er stofnfall  $f$  skrifum við

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Dæmi:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$$

# Lausn diffurjöfnu

Þegar diffurjafnan

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (f(x) \text{ gefið fall})$$

er leyst, fæst óákvarðaður stuðull  $C$ . Til að ákvarða þann stuðul þarf að gefa skilyrði til viðbótar, t.d. að ferillinn  $y(x)$  gangi í gegnum tiltekinn punkt  $(x_0, y_0)$ .

Þetta er stundum kallað upphafsgildisverkefni (IVP).

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad y(0) = 1 \Rightarrow y(x) = \sin x + C; \quad y(0) = C = 1 \Rightarrow y(x) = \sin x + 1$$

# Heilda má lið fyrir lið

$$\textcircled{1} \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ fasti})$$

$$\textcircled{2} \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Dæmi: Jaðartekjur eru  $300 - 0,2x$  þar sem  $x$  er fjöldi seldra eininga. Hverjar eru heildartekjurnar?

$$r'(x) = 300 - 0,2x \quad (\text{jaðartekjur})$$

$$\begin{aligned} r(x) &= \int r'(x) dx = \int (300 - 0,2x) dx \\ &= \int 300 dx - 0,2 \int x dx \\ &= 300x - 0,2 \frac{1}{2} x^2 + C \end{aligned}$$

Nú er  $r = 0$  þegar  $x = 0$  og því er  $C = 0$ . Fáum því

$$r(x) = 300x - 0,1x^2$$

## Innsetning

Setning: Ef  $u = g(x)$  er diffranlegt á opnu bili  $I$  og  $f(u)$  er samfelld á opnu bili  $I_1$  sem inniheldur  $\{u(x) : x \in I\}$ , þá er

$$\int f(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx} dx = \int f(u) du$$

$$\begin{aligned} \int \sin(x^2) \cdot 2x dx &= \int \sin u \cdot du && \begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x \cdot dx \end{cases} \\ &= -\cos u + C \\ &= -\cos(x^2) + C \end{aligned}$$

Ath: Alltaf má ganga úr skugga um að rétt hafi verið heildað með því að diffra útkomuna og athuga hvort fallið undir tegrinu fæst, t.d.

$$\frac{d}{dx}(-\cos x^2 + C) = \sin x^2 \cdot 2x$$

# Heildi og flatarmál

Gerum nú ráð fyrir að við þekkjum hraðann og viljum komast að því hversu langt faratæki hefur farið á  $T$  mín.

