Riemann summur og ákveðin heildi

math104-4calc Heildi

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

October 24, 2016

Riemann summa

Veljum $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ $(x_0 = a,\ x_n = b)$ þ.a.

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

Veljum stak $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$
Reiknum $f(c_k) \cdot \Delta x_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$
Leggjum saman alla liðina:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

þetta kallast Riemann summa fyrir f á $[a, b]$.

Dæmi: $f(x) = c$

Dæmi: $f(x) = x$

Yfir- og undirsummur (efri og neðri Riemann summur)

Fyrir $f \geq 0$ og skiptingu P má velja mismunandi c_k, t.d.

- $f(c_k) = \max_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = M_k$
- $f(c_k) = \min_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = m_k$

og þá

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq I = \int_a^b f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

þar sem I er flatarmálið undir grafinu.

Fínni skipting gefur betri nálgun á I: Fínleiki$= ||P|| = \max_k |\Delta x_k|$

Ákveðið heildi

Látum f vera skilgreint á $[a, b]$ (f þarf ekki að vera ≥ 0). Fyrir sérhverja skiptingu P, látum c_k vera einhverja tölu í hlutbili nr. k, $[x_{k-1}, x_k]$. Ef til er tala I þ.a.

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k = I$$

þar sem I er alveg óháð skiptingunum P og því hvernig c_k er valið, þá segjum við að f sé heildanlegt á $[a, b]$ og I sé ákveðna heildið af $f(x)$ yfir $[a, b]$. Táknum

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Samfelld föll eru heildanleg

Setning:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

er til ef $f(x)$ er samfellt fall á $[a,b]$.

Ath: $\int_a^b f(x)\,dx$ getur verið til, þó að $f(x)$ sé ekki samfellt.

Heildi og flatarmál undir jákvæðum föllum

- Ef $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, þá er $\int_a^b f(x)\,dx$ = flatarmál undir grafinu $y = f(x)$ á milli a og b.
- Framlag til heildisins frá bili þar sem $f(x) < 0$ er neikvætt (sbr. Riemannsummur:

$$\sum \underbrace{f(c_k)}_{<0} \cdot \Delta x_k < 0$$

ef öll $f(c_k) < 0$).

Munum: Flatarmál svæðis er alltaf jákvætt. Heildi getur verið neikvætt.
Dæmi: $f(x) = k$ fyrir fasta $k \in \mathbb{R}$.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = k(b-a)$$

og þetta er flatarmál kassa ef $k > 0$ en annars er $-A$ flatarmál kassans.
Dæmi: $f(x) = x$.

$$A = \int_0^b f(x)\,dx = b^2/2$$

Nokkur orð um formerki

- $\int_a^b f(x)\,dx$ er til ef f er **samfellt á köflum** í $[a,b]$, (þ.e. skipta má $[a,b]$ í endanlega mörg undirbil, $[a,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},b]$ þ.a. f er samfellt á hverju undirbili og endanleg markgildi í x_i). Notum svo

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Getum notað flatarmál til að reikna (einföld) heildi:
- Almennt:
  R_+ er svæðið undir $y=f(x)$ og ofan við x-ás þar sem $f(x)\geq 0$.
  R_- er svæðið yfir $y=f(x)$ og undir x-ás þar sem $f(x)<0$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(R_+) - A(R_-)$$

Dæmi: x^2

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

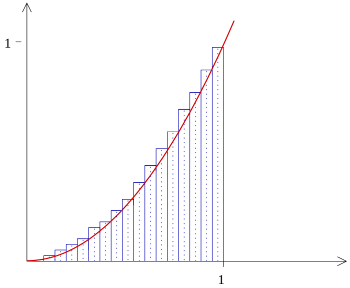
Reiknum undir- og yfirsummu

Í báðum tilfellum fáum við að

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f(c_k)\cdot\Delta x_k = \frac{1}{3}$$

Drögum því þá ályktun að

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

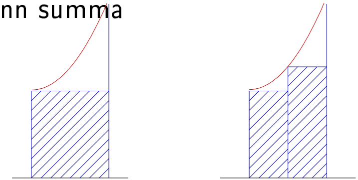


Fínni skiptingar og Riemann summur

neðri Riemann summa $\leq I \leq$ efri Riemann summa

þetta gildir alltaf.

Ef við tökum fínni skiptingu þannig að $P_1 \subset P_2$ (P_2 er fínni en P_1) þá vex neðri Riemann summan en sú efri minnkar.



Sum föll eru ekki Riemann heildanleg

Tökum loks dæmi þar sem $\int_a^b f(x)\,dx$ er ekki til:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$