Heildunarreglur og meðalgildi

math104-4calc Heildi

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

October 24, 2016

Meðalgildi falls

Meðalgildi f á $[a, b]$ er

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Ath:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\overline{f} = \text{ flatarmál rétthyrnings með grunnflöt } (b-a) \text{ og hæð } \overline{f}$$

$\overline{f}$ er því hæð rétthyrnings með grunnlínu $(b-a)$ sem hefur sama flatarmál og flatarmálið undir grafinu $y = f(x)$ á milli a og b.

Nokkrar reglur um heldi

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad$ (skilgreining)
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad$ (skilgreining)
- $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad k \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Heildunarreglur (frh)

- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
- $$\min_{x\in[a,b]} f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max_{x\in[a,b]} f \cdot (b-a)$$
  $$\min f \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k}_{(b-a)} \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot \Delta x_k \le \max f \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k}_{(b-a)}$$
- $f(x) \ge g(x), \quad x \in [a,b] \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

Meðalgildissetning fyrir heildi

Látum f vera samfellt á $[a, b]$. Þá er til $c \in [a, b]$ þ.a.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$