# Hlutheildun og stofnbrot

## math104-4calc Heildi

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

October 24, 2016

# Hlutheildun

Fyrir $f$, $g$ diffranleg gildir $(fg)' = f'g + g'f$ og þá $f'g = (fg)' - fg'$:

$$\int f(x)g(x)'dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Þessa aðferð má umrita:

$$\int uv'\,dx = u(x)v(x) - \int vu'\,dx$$

$\int \ln x\,dx = \int \ln x \cdot 1\,dx$ - prófum nú $u = \ln x$, $v = x$ $(dv = 1 \cdot dx)$

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln x\,dx &= \ln x \cdot x - \textstyle\int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x \cdot \ln x - x + C \\ \int \ln x\,dx &= x \cdot \ln x - x + C\end{aligned}$$

# Stofnbrot

Markmiðið er að leysa rætt fall $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($f$ og $g$ margliður) upp í summu stofnbrota.

Kljúfum „flókin“ brot upp í einfaldari brot, sem hægt er að heilda.

Dæmi:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

Athugið að auðvelt er að heilda hægri hliðina.
Athugum fyrst að allar margliður með rauntölustuðla hafa rætur í $\mathbb{C}$ og við getum alltaf skrifað $p(x) = \Pi\,(x - a_i)$ þar sem sumar rætur koma e.t.v. oft fyrir. Athugum svo að ef $a \in \mathbb{C}$ er slík rót þá er $\bar{a}$ líka rót og að $(x - a_i)(x - \bar{a}_i)$ er 2. stigs margliða með raunstuðla. Við höfum þá: Ef $p$ er margliða með rauntölustuðla, þá má rita $p$ sem margfeldi af línulegum og kvaðratískum liðum.

# Stofnbrot (frh)

Gerum ráð fyrir að

$$\operatorname{stig} f(x) < \operatorname{stig} g(x)$$

Ef ekki, má deila $g$ uppí $f$ og skoða afganginn:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{q(x)}{g(x)} \qquad p,\ q \text{ margliður}$$

Dæmi:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + x - 1} = x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 + x - 1}$$

# Línulegir þættir í nefnara

Ef $(x-r)^m$ er þáttur $g(x)$ þá fengjum við summu

$$\frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

við þann þátt. Gerum þetta við hvern svona þátt í $g(x)$.

# Kvaðratískir þættir í nefnara

Ef $g(x)$ inniheldur kvaðratíska þætti, $ax^2 + bx + c$, sem ekki er hægt að þátta frekar (t.d. $x^2 + 1$), þá verða stofnbrotin sem svara til þessa þáttar (þ.e. til $(x^2 + px + q)^n$):

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n}$$

## Samantekt um stofnbrot

$\frac{f(x)}{g(x)}$ leyst í stofnbrot.

- Ef $(x-r)^m$ er þáttur í $g(x)$:

$$\frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

=stofnbrotaliðirnir sem svara til $(x-r)^m$.

- $(x^2+px+q)^n$ þáttur í $g(x)$:

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

eru stofnbrotaliðirnir sem svara til $(x^2+px+q)^n$.

# Aðferð Heaviside

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)+\cdots(x-r_n)}$$

Ath: 1. veldi á öllum þáttum $g(x)$ og engir óþættanlegir kvaðratískir þættir.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r_n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(x-r_i)}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i g(x)}{(x-r_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i (x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)}{(x-r_i)}\end{aligned}$$

$(x-r_i)$ styttist út í lið númer $i$ fyrir öll $i$ frá 1 til $n$.

Dæmi: