

Óeiginleg heildi

math104-4calc Heildi

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

October 24, 2016

Heildað yfir ótakmarkað bil

- 1 f samfelld á $[a, \infty)$,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

- 2 f samfelld á $(-\infty, b]$,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

- 3 f samfelld á $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

($c \in (-\infty, \infty)$); hægri hlið skilgreind í (i) og (ii)).

Dæmi

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1$$

Reiknum þetta svona:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = -e^{-\infty} - (-1) = 1$$

Heildað yfir bil þar sem $f(x)$ er ekki takmarkað

- 1 f samfelld á $(a, b]$
 $(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty)$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

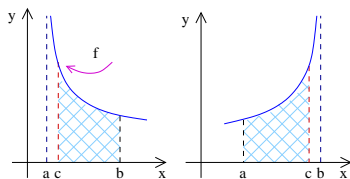
- 2 $f(x)$ samfelld á $[a, b)$
 $(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty)$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx,$$

ef þessi markgildi eru til.

- 3 f samfelld á $[a, c) \cup (c, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\int_a^c f(x) dx}_{\text{improper}} + \underbrace{\int_c^b f(x) dx}_{\text{improper}}$$



Dæmi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

Setning

$f(x)$ og $g(x)$ samfelld á $[a, \infty)$ og $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$. Þá

1 $\int_a^\infty f(x) dx$ er samleitið ef $\int_a^\infty g(x) dx$ er samleitið.

2 $\int_a^\infty g(x) dx$ er ósamleitið ef $\int_a^\infty f(x) dx$ er ósamleitið.

Athugið

Getum borið saman tvö föll á annan hátt:

$f(x), g(x)$ eru ≥ 0 og samfelld á $[a, \infty)$.

Ef

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty$$

þá eru heildin $\int_a^\infty f(x) dx$ og $\int_a^\infty g(x) dx$ bæði samleitin eða hvorugt.