math104-5calc Diffurjöfnur

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

12. nóvember 2015

Efnisyfirlit

1 Inngangur að diffurjöfnum

1.1 Diffurjöfnur

Við þekkjum jöfnur af gerðinni
$$\frac{dy}{dx} = h(x)$$
þar sem h er eitthvert fall, og við vitum hvernig má leysa þær:
$$y = \int h(x)dx + C.$$
Þetta er dæmi um **diffurjöfnu**: y er eitthvert fall af x, t.d. $f(x)$, og gefið er samband sem diffurkvótinn $\frac{dy}{dx}$ uppfyllir, en finna þarf sjálft fallið $y = f(x)$.

1.1.1 Details

Við þekkjum jöfnur af gerðinni
$$\frac{dy}{dx} = h(x)$$
þar sem h er eitthvert fall, og við vitum hvernig má leysa þær:
$$y = \int h(x)dx + C.$$
Þetta er dæmi um **diffurjöfnu**: y er eitthvert fall af x, t.d. $f(x)$, og gefið er samband sem diffurkvótinn $\frac{dy}{dx}$ uppfyllir, en finna þarf sjálft fallið $y = f(x)$.

1.1.2 Examples

Dæmi: Diffurjöfnur eru mýmargar í líffræði, t.d. fiskifræði og kerfislíffræði, lyfjafræði, eðlisfræði, efnafræði o.s.frv.

1.2 Dæmigerð uppsetning diffurjöfnu

Oft byrjum við á að hugsa um, hvernig t.d. fall af tíma hljóti að breytast á stuttu tímabili og skrifum jöfnu sem lýsir $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ sem falli af öðrum þáttum.
Þetta leiðir til diffurjöfnu þegar við látum Δt stefna á núll.

1.2.1 Examples

Dæmi: Eðlilegt er að gera ráð fyrir að breytingar í fjölda fiska í tilteknum árgangi breytast þannig að fast hlutfall drepist á stuttum tíma:
$$\frac{\Delta N}{N} = -Z\Delta t$$
sem leiðir til diffurjöfnu.

1.3 Eru til einkvæmar lausnir?

Oft er unnt að heilda og finna þá "almenna lausn".
Ef gefin eru upphafsskilyrði s.s. $y(x_0) = y_0$ má oft finna sérlausn sem uppfyllir skilyrðið.
Hugsanaleikur: Ef við þekkjum byrjunargildi og afleiðu, þá getum við teiknað fallið áfram með línulegum nálgunum (aðferð Euler, sjá síðar).

1.3.1 Details

Oft er unnt að heilda og finna þá "almenna lausn", en það er alls ekki fyrirfram gefið að unnt sé að leysa diffurjöfnuna almennt.
Ef gefin eru upphafsskilyrði s.s. $y(x_0) = y_0$ má oft finna sérlausn sem uppfyllir skilyrðið.
Athugum samt að ef við þekkjum byrjunargildi og afleiðu, þá getum við teiknað fallið áfram með línulegum nálgunum (aðferð Euler, sjá síðar). Oft er einungis hægt að leysa flóknar jöfnur tölulega.

1.4 Diffurjafna af 1.stigi

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

(x kallast óháð breyta, y háð breyta).

Diffurjafnan er „sjálfstæð“ (autonomous) ef rita má $f(x,y) = g(y)$ svo jafnan verður

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

(þ.e. x kemur ekki beint fyrir í jöfnunni).

1.4.1 Details

Diffurjafna af 1.stigi:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

(x kallast óháð breyta, y háð breyta).

Diffurjafnan er „sjálfstæð“ (autonomous) ef rita má $f(x,y) = g(y)$ svo jafnan verður

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

(þ.e. x kemur ekki beint fyrir í jöfnunni).

Ath: 1. stig vísar til þess að $\frac{dy}{dx}$ er hæsta afleiðan sem fyrir kemur í jöfnunni. Diffurjafna af 2. stigi er:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,\frac{dy}{dx})$$

o.s.frv.
Venjulega er markmiðið að leysa diffurjöfnuna, þ.e. finna fall $y = y(x)$ þ.a.

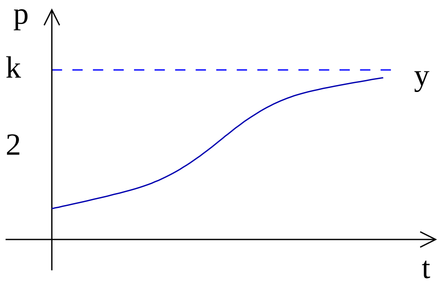
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Hins vegar má fá miklar upplýsingar um lausnarfallið án þess að leysa diffurjöfnuna.

1.5 "Logistic"jafnan

Jafnan
$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$
kallast „logistic“ jafnan og er stundum notuð til að lýsa vexti stofns (dýrastofns) þar sem vöxturinn er takmarkaður.

$$\begin{aligned} \tfrac{dP}{dt} &= \quad \text{vaxtahraði stofnsins.} \\ \tfrac{1}{P}\tfrac{dP}{dt} &= \quad \text{vaxtarhraði á stofneiningu, t.d. tonn} \\ &\tfrac{1}{P}\tfrac{dP}{dt} = r\left(1 - \tfrac{P}{K}\right) \end{aligned}$$



merkir því að vaxtahraði á stofneiningu **minnkar** með vaxandi stofni og er **neikvæður** ef $P > K$.

Lausnarferill (ef $0 < P(0) < \frac{K}{2}$) kallast s-ferill (sigmoid).

Berið saman við $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = r$ (ótakmarkaður vöxtur); ($P' > 0$ ef $P > 0$ og $P'' = rP' = r^2P > 0$).

1.5.1 Details

Jafnan
$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$
kallast „logistic“ jafnan og er stundum notuð til að lýsa vexti stofns (dýrastofns) þar sem vöxturinn er takmarkaður.

$$\begin{aligned} \tfrac{dP}{dt} &= \quad \text{vaxtahraði stofnsins.} \\ \tfrac{1}{P}\tfrac{dP}{dt} &= \quad \text{vaxtarhraði á stofneiningu, t.d. tonn} \\ &\tfrac{1}{P}\tfrac{dP}{dt} = r\left(1 - \tfrac{P}{K}\right) \end{aligned}$$

merkir því að vaxtahraði á stofneiningu **minnkar** með vaxandi stofni og er **neikvæður** ef $P > K$.

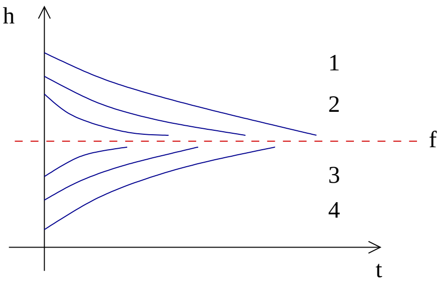
Lausnarferill (ef $0 < P(0) < \frac{K}{2}$) kallast s-ferill (sigmoid).

Berið saman við $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = r$ (ótakmarkaður vöxtur); ($P' > 0$ ef $P > 0$ og $P'' = rP' = r^2P > 0$).

1.6 Dæmi - hitastig

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_u)$$

$H(t)$ = hitastig hlutar á tíma t. H_u = hitastig umhverfis.



$$\begin{aligned} H'' = -kH' &= -k(-k(H - H_u)) \\ &= k^2(H - H_u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{array}{lll} H'' > 0 & \text{ef} & H > H_u \\ H'' < 0 & \text{ef} & H < H_u \end{array}$$

1.6.1 Examples

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_u)$$

$H(t)$ = hitastig hlutar á tíma t. H_u = hitastig umhverfis.

(Hluturinn kólnar hraðar eftir því sem munur á hitastigi hans og hitastigi umhverfisins er meiri).

H_u er jafnvægispunktur: $H' < 0$ ef $H > H_u$; $H' > 0$ ef $H < H_u$.

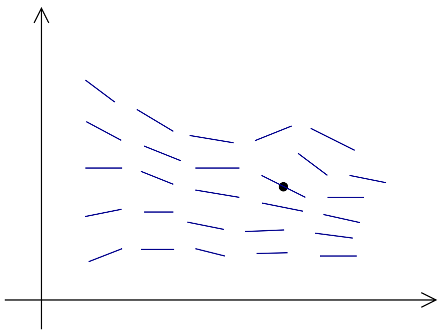
$$\begin{aligned} H'' = -kH' &= -k(-k(H - H_u)) \\ &= k^2(H - H_u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{array}{lll} H'' > 0 & \text{ef} & H > H_u \\ H'' < 0 & \text{ef} & H < H_u \end{array}$$

1.7 Hallasvið

Lausnarferill $y' = f(x,y)$ sem gengur í gegnum punkt (x,y) hefur hallatölu $f(x,y)$ í þeim punkti.

Getum teiknað strik með halla $f(x,y)$ í (x,y) fyrir ýmsa punkta (x,y). Fáum hallasvið $y' = f(x,y)$.



1.7.1 Details

Lausnarferill $y' = f(x,y)$ sem gengur í gegnum punkt (x,y) hefur hallatölu $f(x,y)$ í þeim punkti.
Getum teiknað strik með halla $f(x,y)$ í (x,y) fyrir ýmsa punkta (x,y). Fáum hallasvið $y' = f(x,y)$.
Athugum að ef $y(x_0) = y_0$ er upphafsskilyrði, þá má teikna eitt strikanna út frá (x_0, y_0) og það er þá líka nálgun að þeirri sérlausn.

1.8 Verkefni og lausnaraðferðir

Lítum aftur á verkefnið

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Við byrjum á að kanna eiginleika slíkrar diffurjöfnu þegar hún er **sjálfstæð**.
Tveir flokkar diffurjafna verða síðan kannaðir nánar:

- Diffurjöfnur þar sem aðskilja má breyturnar x og y.
- Línulegar diffurjöfnur

Að lokum verða **blöndunardæmi** tekin sérstaklega fyrir.

1.8.1 Details

Jöfnur af gerðinni

$$\frac{dy}{dt} = r(y+A)(y+B)$$

eru notaðar til að lýsa ýmsum fyrirbærum t.d. hraða efnahvarfs, auk stofnvaxtar.

Eins er jafnan

$$\frac{dL}{dt} = r(L_\infty - L)$$

notuð til að lýsa breytingu í lengd fiska, o.fl. Við getum kannað eiginlega jöfnunnar og líka leyst þessa tilteknu jöfnu.
Við byrjum á því í næsta kafla að kanna eiginleika diffurjöfnunnar þegar hún er **sjálfstæð**.
Verkefnið verður síðan að **leysa** diffurjöfnur af gerðinni

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Lítum sérstaklega á tvenns konar jöfnur

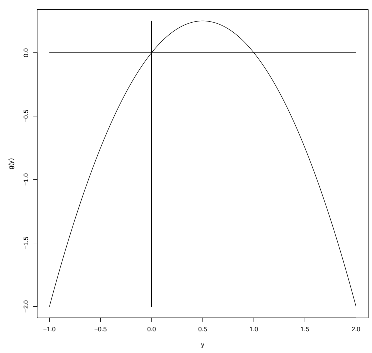
- Diffurjöfnur þar sem aðskilja má breyturnar x og y.
- Línulegar diffurjöfnur

2 Sjálfstæðar diffurjöfnur

2.1 Sjálfstæða diffurjafnan

Diffurjafna er sjálfstæð ef hún er af gerðinni

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$



$g(y) = y(1-y)$ vs y

2.1.1 Details

Skilgreining: Diffurjafna er **sjálfstæð** ef rita má

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Margar diffurjöfnur eru sjálfstæðar og því er gagnlegt að kynna sér afleiðingar þess.

2.1.2 Examples

Dæmi: Algeng diffurjafna í líffræði er

$$\frac{dy}{dx} = ry(1 - \frac{y}{K})$$

Þessi jafna er oft notuð til að lýsa framleiðslu dýrastofns sem ekki er veiddur. Þá er $y = y(t)$ lífmassi stofnsins á tíma t og $\frac{dy}{dx}$ er þá framleiðsla stofnsins (nýliðun+vöxtur-náttúruleg afföll).

Meðal lausna eru föllin $y \equiv 0$ og $y \equiv K$ (m.ö.o. $y(x) = 0$, $\forall x$ er lausn á diffurjöfnunni og sömuleiðis $y(x) = K$, $\forall x$).

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$$

2.2 Jafnvægi sjálfstæðrar diffurjöfnu

Gildi á y þ.a. $g(y) = 0$ kallast **jafnvægis-** eða **kyrrstöðupunktar** sjálfstæðrar diffurjöfnu

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Ef upphafsgildi diffurjöfnu, $y_0 = y(x_0)$ er þannig að $g(y_0) = 0$, þá er y í jafnvægi eða kyrrstöðu, þ.e. breytist ekki.

2.2.1 Details

Skilgreining: Gildi á y þ.a. $g(y) = 0$ kallast **jafnvægis-** eða **kyrrstöðupunktar** sjálfstæðu diffurjöfnunnar

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Ath:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{ef} \qquad g(y) = 0$$

því er y í jafnvægi eða kyrrstöðu, þ.e. breytist ekki.

Ef upphafsgildi diffurjöfnu, $y_0 = y(x_0)$ er þannig að $g(y_0) = 0$, þá er y í jafnvægi eða kyrrstöðu, þ.e. y er fast í $y = y_0$ fyrir öll x. Við sjáum raunar við nánari skoðun að $y'' = g'(y)y' = g'(y)g(y)$ svo ef $g(y_0) = 0$, þá er $y''(x_0) = 0$ svo um allar afleiður gildir $y^{(n)}(x_0) = 0$.

2.2.2 Examples

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = ry(1 - \frac{y}{K})$$

Hér eru jafnvægispunktar $y = 0$ og $y = K$.

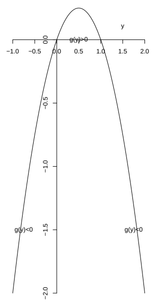
<u>Dæmi:</u>

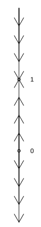
$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$$

Jafnvægispunktar eru $y = 0$ og $y = 1$; þar er $y' = 0$.

2.3 Stöðug og óstöðug jafnvægi

Lausn $y' = g(y)$ getur leitað í átt að jafnvægi eða frá því.
Stöðugt jafnvægi: Lausn leitar í átt að jafnvægispunktinum
Óstöðugt jafnvægi: Lausn leitar frá jafnvægispunktinum





2.3.1 Details

Lausn sjálfstæðrar diffurjöfnu, $y' = g(y)$, getur leitað í átt að jafnvægispunkti $y_0 = y(x_0)$ eða frá honum.
Stöðugt jafnvægi: Lausn leitar í átt að jafnvægispunktinum.
Óstöðugt jafnvægi: Lausn leitar frá jafnvægispunktinum.
Ef $y^* = y(x^*)$ er jafnvægispunktur og upphafsstaðan $y_0 = y(x_0)$ er nálægt y^*, þá laitar fallið y að $y*$ ef um stöðugt jafnvægi er að ræða, en annars frá því. Oftast er x tími í þessum dæmum og oftast er því verið að ræða um að $lim_{x\to\infty} y(t) = y^*$ ef $y(x_0)$ er nálægt stöðugum jafnvægispunkti y^*.
Lítum einnig á $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}g(y) = g'(y)y' = g'(y)g(y)$.

2.3.2 Examples

Dæmi 2.3.1.

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$$

Jafnvægispunktar eru $y = 0$ og $y = 1$; þar er $y' = 0$.
Finnum svo bilin þar sem $y' > 0$ og $y' < 0$: Skrifum gjarnan $g(y) = y(1 - y)$ svo diffurjafnan er á forminu $y' = g(y)$. Höfum þá að $g(y) = 0$ þá og því aðeins að $y = 0$ eða $y = 1$. Teiknum svo $g(y)$ á móti y eins og á myndinni. Hér sjáum við að $g(y) > 0$ ef $0 < y < 1$. Þetta þýðir að ef $y < 0$ þá minnkar $y(x)$ (því $\frac{dy}{dx} < 0$); ef $0 < y < 1$ þá vex $y(x)$ (því $y' > 0$); og $y(x)$ minnkar ef $y > 1$ ($y' < 0$).

Þetta sýnum við myndrænt á hliðarmyndinni, þar sem við merkjum jafnvægispunktana og hvernig y stefnir að þeim eða frá þeim.
Getum nú dregið ályktanir um eðli jafnvægispunktanna.
Lausn sem tekur (fyrir eitthvert x) gildi $y > 0$ nálgast jafnvægispunktinn $y = 1$. (Lausnarferlar sem „byrja“, ef x er tími, í $y > 0$ stefna á láréttu aðfelluna $y = 1$).
Lausn sem tekur gildi $y < 0$ stefnir á $-\infty$.
Ath: $y = 0$ og $y = 1$ voru jafnvægispunktar. Hins vegar nálgast lausnir $y = 1$, en fjarlægjast $y = 0$. Við segjum að $y = 1$ sé **stöðugur** (stable) jafnvægispunktur, en $y = 0$ **óstöðugur** (unstable).

Dæmi 2.3.2.

$$\frac{dy}{dx} = ry(1 - \frac{y}{K})$$

Hér eru jafnvægispunktar $y = 0$ og $y = K$.

Skoðum hvar $\frac{dy}{dx} = 0$, hvar $\frac{dy}{dx} > 0$ og hvar $\frac{dy}{dx} < 0$ og drögum ályktanir um, hvaða jafnvægi er stöðugt og hver eru óstöðug.

2.4 Lausnarferlar

Getum rissað lausnarferla sjálfstæðrar diffurjöfnu

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Rannsökum fallið g til að kortleggja afleiðuna $\frac{dy}{dx}$ og diffrum jöfnuna (finnum y'') til að finna vendipunkta ferlanna.
Notum formerki g og/eða aðra afleiðu y til að rannsaka stöðugleika.

2.4.1 Examples

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = ry(1 - \frac{y}{K})$$

með jafnvægispunktana $y = 0$ og $y = K$.

Athugum nú hvernig hægt er að teikna lausnarferil $\frac{dy}{dx} = g(y)$ (lauslega).
Skoðum hvar $\frac{dy}{dx} = 0$, hvar $\frac{dy}{dx} > 0$ og hvar $\frac{dy}{dx} < 0$.
Lítum síðan á $\frac{d^2y}{dx^2}$ til að finna vendipunkta.
Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$$

mað jafnvægispunktar $y = 0$ og $y = 1$ þar sem $y' = 0$.

Finnum svo bilin þar sem $y' > 0$ og $y' < 0$.
Þetta þýðir að ef $y < 0$ þá minnkar $y(x)$ (því $\frac{dy}{dx} < 0$);

ef $0 < y < 1$ þá vex $y(x)$ (því $y' > 0$); og $y(x)$ minnkar ef $y > 1$ ($y' < 0$).

Við sjáum því að fyrir $y > 0$ þá mun lausnarferillinn nálgast $y = 1$. Til að fá fram sveigju lausnarferla þurfum við að skoða y''.

$$\begin{aligned} y' &= y(1-y) \qquad \Rightarrow \\ y'' &= y'(1-y) + y(-y') \\ &= y' - 2yy' \\ &= y'(1-2y) \\ &= y(1-y)(1-2y) \end{aligned}$$

Höfum nú nægar upplýsingar til að rissa nokkra lausnarferla.

Ath: Lausn sem tekur gildi $y > 0$ nálgast jafnvægispunktinn $y = 1$. (Lausnarferlar sem „byrja“, ef x er tími, í $y > 0$ stefna á láréttu aðfelluna $y = 1$).
Lausn sem einhvers staðar (fyrir eitthvert x) tekur gildi $y < 0$ stefnir á $-\infty$.
Ath: $y = 0$ og $y = 1$ voru jafnvægispunktar. Hins vegar nálgast lausnir $y = 1$, en fjarlægjast $y = 0$. Við segjum að $y = 1$ sé **stöðugur** (stable) jafnvægispunktur, en $y = 0$ **óstöðugur** (unstable).

3 Aðskilnaður breytistærða

3.1 1. stigs diffurjöfnur þar sem aðskilja má breytur

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y) \qquad (\, f(x,y) = g(x)h(y)\,) \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (\,\text{ef}\, h \neq 0\,) \\ & \text{(þetta köllum við að aðskilja breyturnar)} \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{1}{h(y)}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)dx \\ & \text{(finnum stofnfall m.t.t. } x\text{)} \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx \end{aligned}$$

síðan þarf að finna stofnföllin og leysa fyrir $y(x)$.

3.1.1 Details

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y) \qquad (\, f(x,y) = g(x)h(y)\,) \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (\,\text{ef}\, h \neq 0\,) \\ & \text{(þetta köllum við að aðskilja breyturnar)} \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{1}{h(y)}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)dx \end{aligned}$$

3.1.2 Examples

Dæmi:

$$\begin{aligned}
& & y' = ry\left(1-\tfrac{y}{k}\right) \\
\Rightarrow & & \frac{1}{y\left(1-\frac{y}{k}\right)}\frac{dy}{dx} = r \\
\Rightarrow & & \int \frac{1}{y\left(1-\frac{y}{k}\right)}dy = \int r\,dx \\
\Rightarrow & & \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{k\left(1-\frac{y}{k}\right)}\right)dy = \int r\,dx \\
\Rightarrow & & \ln|y| - \ln|k-y| = rx + \hat{C} \\
\Rightarrow & & \ln\left|\frac{y}{k-y}\right| = rx + \hat{C} \\
\Rightarrow & & \left|\frac{y}{k-y}\right| = Ce^{rx} \qquad (C = e^{\hat{C}})
\end{aligned}$$

Ef við gerum ráð fyrir að $y(0) = y_0$ þá má ákvarða gildið á C:

$$\begin{aligned}
& & \frac{y_0}{k-y_0} = C \\
& & y = C(k-y)e^{rx} \\
\Rightarrow & & y + Cye^{rx} = C\cdot ke^{rx} \\
\Rightarrow & & y(x) = \frac{C\cdot ke^{rx}}{1+Ce^{rx}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{\frac{y_0}{k-y_0}ke^{rx}}{1+\frac{y_0}{k-y_0}\cdot e^{rx}} \\
&= \frac{y_0\cdot ke^{rx}}{k-y_0+y_0e^{rx}} \\
&= \frac{y_0Ke^{rx}}{k+(e^{rx}-1)y_0}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad y(x) = \frac{y_0\cdot k}{y_0+(k-y_0)e^{-rx}}$$

(ath. $y(x)\to k, \quad x\to\infty$).

3.2 Dæmi

$$\boxed{\begin{aligned}
& & \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \\
\Rightarrow & & y\frac{dy}{dx} = x \\
\Rightarrow & & \int y\,dy = \int x\,dx \\
\Rightarrow & & \tfrac{1}{2}y^2 + \hat{C} = \tfrac{1}{2}x^2 \\
\Rightarrow & & x^2+y^2 = c
\end{aligned}}$$

3.2.1 Examples

1.

$$\begin{aligned} & \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{x}{y} \\ \Rightarrow\quad & y\tfrac{dy}{dx} = x \\ \Rightarrow\quad & \int y\,dy = \int x\,dx \\ \Rightarrow\quad & \tfrac{1}{2}y^2 + \hat{C} = \tfrac{1}{2}x^2 \\ \Rightarrow\quad & x^2 + y^2 = c \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & \tfrac{dy}{dx} = a\tfrac{y}{x} \\ \Rightarrow\quad & \int \tfrac{1}{y}\,dy = \int \tfrac{a}{x}\,dx \\ \Rightarrow\quad & \ln y = \ln x^a + \hat{C} \\ \Rightarrow\quad & y = C \cdot x^a \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} & \tfrac{dy}{dx} = k \cdot y \\ \Rightarrow\quad & \int \tfrac{1}{y}\,dy = \int k\,dx \\ \Rightarrow\quad & \ln y = kx + \hat{C} \\ \Rightarrow\quad & y(x) = Ce^{kx} \end{aligned}$$

$$(y(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = Ce^{kx_0} \qquad \Rightarrow C = y_0 e^{-kx_0}\ )$$

$$y(x) = y_0 e^{k(x-x_0)}$$

Veldisvísisvöxtur ef $k > 0$, en veldisvísishnignun ef $k < 0$.
($\frac{dy}{dt} = ky \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 e^{kt}$ ef $y(0) = y_0$, t er tími).

3.3 Dæmi um kælingu

$$\boxed{\begin{aligned} & \tfrac{dH}{dt} = -k(H - H_u) \qquad H(0) = H_0 \\ \Rightarrow\quad & \int \tfrac{dH}{H-H_u} = \int -k\,dt \\ \Rightarrow\quad & \ln|H - H_u| = -kt + \hat{C} \\ \Rightarrow\quad & H - H_u = Ce^{-kt} \text{ skiptum um fasta} \\ & (t = 0 \qquad H_0 - H_u = C) \\ \Rightarrow\quad & H(t) = H_u + (H_0 - H_u)e^{-kt} \end{aligned}}$$

3.3.1 Examples

Dæmi: Lítum á líkan sem lýsir kælingu.
Gerum ráð fyrir að hitanum H á tíma t sé lýst með diffurjöfnu af gerðinni

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_u)$$

og að auki er gefið að kerfið uppfylli byrjunarskilyrði $H(0) = H_0$, þ.e.a.s. hitastig við tímann $t = 0$ er gefið.
Þessar upplýsingar má nota til að leysa diffurjöfnuuna með aðskilnaði breytistærða:

$$\begin{array}{rc}
 & \frac{dH}{dt} = -k(H - H_u) \qquad H(0) = H_0 \\
\Rightarrow & \int \frac{dH}{H-H_u} = \int -k\,dt \\
\Rightarrow & \ln|H - H_u| = -kt + \hat{C} \\
\Rightarrow & H - H_u = Ce^{-kt} \\
 & (t = 0 \qquad H_0 - H_u = C) \\
\Rightarrow & H(t) = H_u + (H_0 - H_u)e^{-kt}
\end{array}$$

Athugið að hér gildir

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = H_u$$

sem er í samræmi við greiningu á hegðun upphaflegu diffurjöfnunnar, ef við lítum á, hvað hún er í jafnvægi og sjáum þá að $H = H_u$ er stöðugt jafnvægi.

4 Línulegar diffurjöfnur af 1.stigi

4.1 Línulegar diffurjöfnur af 1.stigi

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$$

4.1.1 Details

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Til að leysa þessa jöfnu skulum við margfalda með falli $v(x)$, ($v(x) \geq 0$).

<u>Ath:</u> Aðeins er hægt að aðskilja breytur í undantekningartilvikum.

$$v(x)\frac{dy}{dx} + P(x)v(x)y(x) = Q(x) \cdot v(x)$$

Nú ætlum við að velja v þ.a. vinstri hlið jöfnunnar megi skrifa:

$$\frac{d}{dx}(v(x) \cdot y(x))$$

sem er jafnt

$$v\frac{dy}{dx} + \frac{dv}{dx} \cdot y$$

Þetta þýðir að

$$\begin{array}{rc}
 & v'(x) = P \cdot v \\
\Rightarrow & v(x) = e^{\int P(x)\,dx}
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rc}
 & \int \frac{dv}{v} = \int P(x)\,dx \\
\Rightarrow & \ln v = \int P(x)\,dx + \hat{C} \\
\Rightarrow & v = e^{\int P(x)\,dx} \cdot c, \quad \text{veljum svo } c = 1
\end{array}\right)$$

$v(x)$ kallast tegrunarþáttur (integration factor).
Ef $v = e^{\int P\,dx}$ þá verður diffurjafnan

$$\begin{aligned} & \tfrac{d}{dx}(v \cdot y) = Q \cdot v \\ \Rightarrow \qquad & y(x) = \tfrac{1}{v(x)} \int v(x)Q(x)\,dx \\ & \left(v(x) = e^{\int P(x)\,dx}\right) \end{aligned}$$

4.2 Dæmi

$$\boxed{\begin{aligned} & x\tfrac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0 \\ \Rightarrow \qquad & \tfrac{dy}{dx} - \tfrac{3}{x}y = x \\ & \text{þ.e.} \quad P(x) = -\tfrac{3}{x}, \quad Q(x) = x \\ & v(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\int \frac{3}{x}\,dx} = e^{-3\ln x} \\ & \qquad = e^{\ln x^{-3}} = \tfrac{1}{x^3} \\ \Rightarrow \qquad y(x) & = \tfrac{1}{v(x)} \int x \cdot \tfrac{1}{x^3}\,dx \\ & = x^3 \int x^{-2}\,dx \\ & = x^3 \cdot \left(-x^{-1} + C\right) \\ & = Cx^3 - x^2 \qquad (x > 0) \end{aligned}}$$

4.2.1 Examples

<u>Dæmi:</u>

$$\begin{aligned} & x\tfrac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0 \\ \Rightarrow \qquad & \tfrac{dy}{dx} - \tfrac{3}{x}y = x \\ & \text{þ.e.} \quad P(x) = -\tfrac{3}{x}, \quad Q(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\int \frac{3}{x}\,dx} &= e^{-3\ln x} \\ &= e^{\ln x^{-3}} = \tfrac{1}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad y(x) & = \tfrac{1}{v(x)} \int x \cdot \tfrac{1}{x^3}\,dx \\ & = x^3 \int x^{-2}\,dx \\ & = x^3 \cdot \left(-x^{-1} + C\right) \\ & = Cx^3 - x^2 \qquad (x > 0) \end{aligned}$$

Athugið að ekki má sleppa úr stuðlinum C þegar stofnfallið er fundið.

Ef byrjunarskilyrði eru gefin, t.d. $y(1) = 2$, má ákvarða C:

$$\begin{gathered} y(x) = Cx^3 - x^2 \\ y(1) = C - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 3 \\ y(x) = 3x^3 - x^2 \end{gathered}$$

5 Blöndun

5.1 Rúmmál, massi og styrkur

- Rúmmál: Kar af rúmmáli V inniheldur vatn.
  - Einingar: rúmmetrar, lítrar, rúmsentímetrar, millilítrar, rúmdesimetrar
- Massi: Í vatninu er salt með massann M.
  - Mælieining: kg, tonn, g
- Styrkur: Blandan er af styrk C.
  - Mælieiningar: kg/l, kg/m^3, g/l
- Rennsli: Inn í karið eða úr því rennur vökvi með hraðanum q.
  - Mælieiningar: l/s, m^3/klst, l/mín

5.1.1 Details

Í þessum kafla verður fjallað um "blöndun". Slík verkefni eru áhugaverð á mjög mörgum sviðum, ekki síst sameindalíffræði og lyfjafræði.
Verkefnið er eftirfarandi:
Höfum kar sem sem inniheldur tiltekið rúmmál, V, af vökva (V="volume"), en V er mælt í rúmmálseiningum s.s. lítrum, l.
Í vökvanum er uppleyst eitthvert magn, M, efnis (M="mass"), en efnið er mælt í þyngdar- eða massa-einingum s.s. kg.
Styrkur lausnarinnar er þá $C = M/V$, kg/l (C="concentration", mælt í massa-per-rúmmálseiningum)
Inn í karið flæðir síðar vökvi af sömu gerð en með öðrum styrk, á einhverjum hraða.
Í karinu blandast vökvinn fullkomnlega.
Út úr karinu rennur fullblandaður vökvi vökvi á einhverjum hraða.
Þetta verkefni verður leyst í kaflanum, en við byrjum á einfaldri blöndun.

5.2 Einföld blöndun

Kar inniheldur V l af vökva (V="volume"; rúmmálseiningar)
Uppleyst efni, M kg (M="mass"; þyngd/massi)
Styrkur $C = M/V$, kg/l (C="concentration")
Í karinu blandast vökvinn fullkomnlega.
Út úr karinu rennur fullblandaður vökvi á einhverjum hraða.
Inn í karið flæðir (samtímis eða síðar) vökvi, á einhverjum hraða.
Leysum þetta verkefni á nokkrum síðum...byrjum á einfaldri blöndun.

5.2.1 Details

Þegar litið er á hugtök eins og massa, rúmmál, styrk og rennsli er mikilvægt að gera grein fyrir öllum einingum sem eru notaðar.

5.2.2 Examples

Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...
Bætum nú 100l af hreinu vatni saman við og fáum nýjan styrk...

Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...
Bætum nú 10l af hreinu vatni saman við og fáum nýjan styrk...
Töppum af 10l og fáum nýtt heildarmagn af salti...
Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...
Töppum af 10l og fáum nýtt heildarmagn af salti og en óbreyttan styrk...
Bætum nú 10l af vatni með 100g af salti saman við, fáum nýtt heildarmagn af salti og breyttan styrk... **Röðin skiptir máli**
Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...
Bætum nú 10l af vatni með 100g af salti saman við, fáum nýtt heildarmagn af salti og breyttan styrk...
Töppum af 10l og fáum nýtt heildarmagn af salti og en óbreyttan styrk...**Röðin skiptir máli**

5.3 Jöfnur fyrir blöndun

- Höfum kar sem sem inniheldur V l af vökva (V="volume", í rúmmálseiningum s.s. l)
- Í vökvanum er uppleyst efni, alls M kg (M="mass", í þyngdar/massa-einingum s.s. kg)
- Styrkur lausnarinnar er þá $C = M/V$, kg/l (C="concentration", mælt í massa-per-rúmmálseiningum)
- Bætum við vökva, alls v, með styrk c og hrærum vel. Þá bætist við massinn $m = cv$.
- Nýr massi: $M + m$.
- Nýtt rúmmál: $V + v$.
- Nýr styrkur: $\frac{M+m}{V+v}$.

5.4 Lítum á stuttan tíma...

Lítum nú á stutt tímabil, frá t til $t + \Delta t$. Jöfnurnar eiga við um tímann t eða breytingar á tímabilinu:

- Rúmmál vökva við tíma t er V_t
- Uppleyst efni með massa M_t
- Styrkur lausnarinnar er $C_t = M_t/V_t$
- Bætum við vökva, alls ΔV, með styrk C_I og hrærum vel.
- Þá bætist við massinn $\Delta M = C_I \cdot \Delta V$.
- Nýr massi: $M_t + \Delta M = M_t + C_I \cdot \Delta V$.
- Nýtt rúmmál: $V_t + \Delta V$.
- Nýr styrkur: $\frac{M_t+\Delta M}{V_+\Delta V}$.

5.5 Stuttur tími: Tekið út og bætt við

Lítum nú á stutt tímabil, frá t til $t+\Delta t$.

- Kar með V_t l af vökva (V_t="volume",rúmmál)
- Uppleyst efni, alls M_t kg (M_t="mass", þyngd/massi)
- Styrkur lausnarinnar er þá $C_t = M_t/V_t$, kg/l (C_t="concentration", massi-per-rúmmál)
- Tökum út blöndu, alls ΔV, með styrk C_t. Þá fer út massinn $C_t \cdot \Delta V$
- Bætum við **jafnmiklum** vökva, alls ΔV, með styrk C_I og hrærum vel. Þá bætist við massinn $C_I \cdot \Delta V$.
- Massabreyting: $\Delta M = C_I \cdot \Delta V - C_t \cdot \Delta V$.
- Nýr massi: $M_t + \Delta M$.
- Jafnt flæði inn og út: Óbreytt rúmmál.
- Nýr styrkur: $\frac{M_t+\Delta M}{V}$.

5.6 Rennsli og rúmmálsbreyting

Rúmmál í upphafi: V_0	Rúmmál á tíma t: V_t
Rennsli inn: q_I	Rennsli út: q_O
Stuttur tími: $\Delta V = q_I \cdot \Delta t - q_O \Delta t$	Diffurjafna: $\frac{dV}{dt} = q_I - q_O$

– muna að ath einingar
– einfalt: finnum stofnfall
Lausn: $V_t = \ldots$

5.7 Rennsli og massi

Hugsum um rennsli: Rennsli inn, q_I, t.d. í l/s. Rennsli út, q_O, t.d. í l/s. Oft er $q_I = q_O$, en ekki alltaf.ATH: V breytist ef $q_I \neq q_O$
Á tímanum Δt renna inn $q_I \Delta t$ og út $q_O \Delta t$.
Ef styrkurinn inn er C_I, þá rennur inn massinn $q_I \cdot C_I \Delta t$.
Út rennur massinn $q_O \cdot C \Delta t$.
Massabreytingin (nálgun á stuttum tíma) $\Delta M = q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t = (q_I \cdot C_I - q_O \cdot C)\Delta t$

5.8 Rennsli og styrkur

Rennsli inn, q_I, t.d. í l/s. Rennsli út, q_O, t.d. í l/s. Oft er $q_I = q_O$, en ekki alltaf.ATH: V breytist ef $q_I \neq q_O$
Á tímanum Δt renna inn $q_I \Delta t$ og út $q_O \Delta t$.
Ef styrkurinn inn er C_I, þá rennur inn massinn $q_I \cdot C_I \Delta t$.
Út rennur massinn $q_O \cdot C \Delta t$.
Styrkbreytingin verður $\Delta C = \frac{M_t}{V_t} - \frac{M_{t+\Delta t}}{V_{t+\Delta t}}$
Ef $q_I = q_O$:, þá fæst $\Delta C = \frac{\Delta M}{V} = \frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t}{V} = \frac{q_I \cdot C_I - q_O \cdot C}{V} \Delta t$
ATH: Skrifum yfirleitt bara C en ekki C_t o.s.frv. Þurfum að muna, hvað er fall af t og hvað ekki.

5.9 Massabreyting per tímaeiningu

Ath: $\Delta M = q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t$

$$\frac{dM}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t}{\Delta t} = q_I \cdot C_I - q_O \cdot C = q_I \cdot C_I - q_O \cdot M/V$$

Muna: Ef $q_I \neq q_O$ þá er $V_t = V_0 + (q_I - q_O)t$ og við fáum

$$\frac{dM}{dt} = q_I \cdot C_I - q_O \cdot \frac{M}{V_0 + (q_I - q_O)t}$$

Línuleg diffurjafna: $y' + P(x)y = Q(x)$

5.10 Styrkbreyting per tímaeiningu

Ath ef V =fasti, þ.e. $q_I = q_O = q$: $\Delta C = \frac{M_t}{V} - \frac{M_{t+\Delta t}}{V} = \frac{\Delta M}{V} = \frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t}{V} = q \cdot \frac{(C_I - C)\Delta t}{V}$

$$\frac{dC}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t}{V}}{\Delta t} = \frac{q_I}{V}(C_I - C)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dC}{dt}}_{y'} = \underbrace{\frac{q_I \cdot C_I}{V}}_{a} - \underbrace{\frac{q_O}{V}}_{b} \cdot \underbrace{C}_{y} = \frac{q}{V}(C_I - C)$$

Línuleg diffurjafna: $y' = a + by$, en líka sjálfstæð og hér má aðskilja breytistærðir.

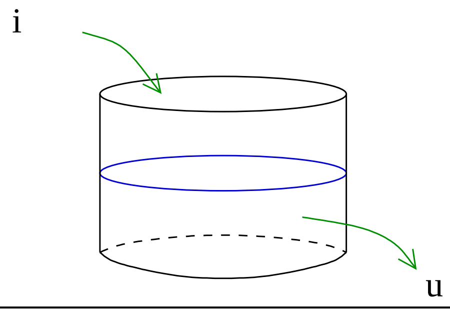
5.11 Lausn massajöfnunnar

Jafna sem lýsir massabreytingu (magn af efni í lausninni) er ekki háð forsendu um að innflæði og útflæði sé jafnt.
Getum leyst diffurjöfnuna...

5.12 Dæmi um tank sem tæmist

Viljum lýsa því hvernig styrkur efnis í lausn breytist.

Vökva með uppleystu efni er dælt í tank með ákveðnum hraða. Síðan er vökva hleypt úr tankinum með gefnum hraða.
Hraði breytinga á styrk = [hraði inn] - [hraði út]



5.12.1 Details

Viljum lýsa því hvernig styrkur efnis í lausn breytist.

Vökva með uppleystu efni er dælt í tank með ákveðnum hraða. Síðan er vökva hleypt úr tankinum með gefnum hraða.
Hraði breytinga á styrk = [hraði inn] - [hraði út]

5.12.2 Examples

Dæmi: Tankur með $100l$ af vatni. Lausn með $1g/l$ af uppleystu efni er dælt í tankinn með hraða $1l/$mín. Blöndunni er dælt út með hraða $3l/$mín. Finnum diffurjöfnu sem lýsir því hvernig magn uppleysta efnisins í tanknum breytist með tíma og leysum hana:
Látum $x(t)$ vera magn efnisins (í g) í tanknum á tíma t og $V(t)$ vera rúmmál vökva í tanknum á tíma t.
Hraði inn: 1 g/l ·1 l/mín = 1 g/mín
Ath: $\frac{x(t)}{V(t)}$ = magn(g)/lítra í blöndunni
Hraði út:

$$\frac{x(t)}{V(t)} \cdot \underbrace{3l/m}_{\text{hraði út á blöndu}}$$

Ath: $\frac{x}{v} \cdot 3l/\text{mín} \quad : g/l \cdot l/\text{mín} = g/\text{mín}.$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{x}{V} \cdot 3$$

Jafna fyrir $V(t)$:

$$V(t) = 100l - 3l/\text{mín} \cdot t\text{mín} + 1l/\text{mín} \cdot t\text{mín}$$

þ.e.

$$V(t) = 100 - 2t$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{3x}{100-2t} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{100-2t} = 1$$

þ.e.

$$P(t) = \frac{3}{100-2t}, \quad Q(t) = 1$$

$$v(t) = \exp\left(\int \frac{3\,dt}{100-2t}\right) = \exp\left(-\frac{3}{2}\ln(100-2t)\right)$$

$$v(t) = (100-2t)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{v(t)} \int v(t) \cdot Q(t)\,dt \\ &= (100-2t)^{\frac{3}{2}} \int \tfrac{1}{(100-2t)^{\frac{3}{2}}}\,dt \\ &= (100-2t)^{\frac{3}{2}} \left((100-2t)^{-\frac{1}{2}} + C\right) \end{aligned}$$

Nú er $x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 100^{\frac{3}{2}}(100^{-\frac{1}{2}} + C) \quad \Rightarrow \quad C = -10^{-1}.$

$$x(t) = (100-2t)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{(100-2t)^{\frac{1}{2}}} - 10^{-1}\right)$$

$$x(t) = (100-2t) - 10^{-1} \cdot (100-2t)^{\frac{3}{2}}$$

Ath: $x(0) = 0$ og $x' + \frac{3x}{100-2t} = 1$

$$x(t) = (100-2t) - \frac{(100-2t)^{\frac{3}{2}}}{10}$$

Finnum nú hvenær styrkurinn í blöndunni nær hámarki:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{dx}{dt} = 1 - \tfrac{3x}{100-2t} = 0 \\
\Rightarrow \quad & \tfrac{3x}{100-2t} = 1 \\
\Rightarrow \quad & \tfrac{3}{(100-2t)}\left((100-2t) - \tfrac{(100-2t)^{\frac{3}{2}}}{10}\right) = 1 \\
\Rightarrow \quad & 3\left(1 - \tfrac{(100-2t)^{\frac{1}{2}}}{10}\right) = 1 \\
\Rightarrow \quad & 3 - 1 = \tfrac{3}{10}(100-2t)^{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \quad & 100 - 2t = \tfrac{400}{9} \\
\Rightarrow \quad & 2t = \tfrac{500}{9} \quad \Rightarrow \quad t = \tfrac{250}{9} \approx 27,8\,\text{mín} \\
& x(27,8) = (100 - 2\cdot 27,8) - \tfrac{(100-2\cdot 27,8)^{\frac{3}{2}}}{10} \\
& \approx 14,8g
\end{aligned}$$

Athugið að tankurinn tæmist á 50 mín.