

Inngangur að diffurjöfnum

math104-5calc Diffurjöfnur

Kjartan G. Magnusson, followed by many others

November 12, 2015

Diffurjöfnur

Við þekkjum jöfnur af gerðinni

$$\frac{dy}{dx} = h(x)$$

þar sem h er eitthvert fall, og við vitum hvernig má leysa þær:

$$y = \int h(x)dx + C.$$

Þetta er dæmi um **diffurjöfnu**: y er eitthvert fall af x , t.d. $f(x)$, og gefið er samband sem diffurkvótinn $\frac{dy}{dx}$ uppfyllir, en finna þarf sjálft fallið $y = f(x)$.

Diffurjöfnur eru mýmargar í líffræði, t.d. fiskifræði og kerfislíffræði, lyfjafræði, eðlisfræði, efnafræði o.s.frv.

Dæmi: Árgangi fækkar vegna affalla um ákveðið hlutfall á dag.

Dæmigerð uppsetning diffurjöfna

Oft byrjum við á að hugsa um, hvernig t.d. fall af tíma hljóti að breytast á stuttu tímabili og skrifum jöfnu sem lýsir $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ sem falli af öðrum þáttum. Þetta leiðir til diffurjöfna þegar við látum Δt stefna á núll.

Dæmi: Veldisvöxtur og -hnignun

Dæmi: Eðlilegt er að gera ráð fyrir að breytingar í fjölda fiska í tilteknum árgangi breytast þannig að fast hlutfall drepist á stuttum tíma:

$$\frac{\Delta N}{N} = -Z \Delta t$$

sem leiðir til diffurjöfna.

Eru til einkvæmar lausnir?

Oft er unnt að heilda og finna þá "almenna lausn".

Ef gefin eru upphafsskilyrði s.s. $y(x_0) = y_0$ má oft finna sérlausn sem uppfyllir skilyrðið.

Hugsanaleikur: Ef við þekkjum byrjunargildi og afleiðu, þá getum við teiknað fallið áfram með línulegum nálgunum (aðferð Euler, sjá síðar).

Diffurjafna af 1.stigi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

(x kallast óháð breyta, y háð breyta).

Diffurjafnan er „sjálfstæð“ (autonomous) ef rita má $f(x, y) = g(y)$ svo jafnan verður

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

(þ.e. x kemur ekki beint fyrir í jöfnunni).

Venjulega er markmiðið að leysa diffurjöfnuna, þ.e. finna fall $y = y(x)$ þ.a.

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

Hins vegar má fá miklar upplýsingar um lausnarfallið án þess að leysa diffurjöfnuna.

"Logistic" jafnan

Jafnan

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

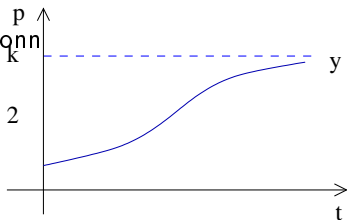
kallast „logistic“ jafnan og er stundum notuð til að lýsa vexti stofns (dýrastofns) þar sem vöxturinn er takmarkaður.

$$\frac{dP}{dt} = \text{vaxtahraði stofnsins.}$$

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \text{vaxtarhraði á stofneiningu, t.d. tonn}$$

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = r \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

merkir því að vaxtahraði á stofneiningu **minskar** með vaxandi stofni og er **neikvæður** ef $P > K$.



Lausnarferill (ef $0 < P(0) < \frac{K}{2}$) kallast

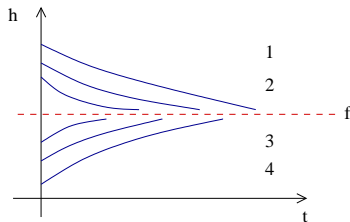
Dæmi - hitastig

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_u)$$

$H(t)$ = hitastig hlutar á tíma t . H_u = hitastig umhverfis.

$$\begin{aligned} H'' &= -kH' = -k(-k(H - H_u)) \\ &= k^2(H - H_u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad H'' &> 0 \quad \text{ef} \quad H > H_u \\ H'' &< 0 \quad \text{ef} \quad H < H_u \end{aligned}$$

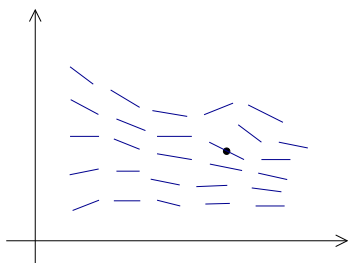


Hallasvið

Lausnarferill $y' = f(x, y)$ sem gengur í gegnum punkt (x, y) hefur hallatölu $f(x, y)$ í þeim punkti.

Getum teiknað strik með halla $f(x, y)$ í (x, y) fyrir ýmsa punkta (x, y) . Fáum hallasvið $y' = f(x, y)$.

Athugum að ef $y(x_0) = y_0$ er upphafsskilyrði, þá má teikna eitt strikanna út frá (x_0, y_0) og það er þá líka nálgun að þeirri sérlausn.



Verkefni og lausnaraðferðir

Lítum aftur á verkefnið

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Við byrjum á að kanna eiginleika slíkrar diffurjöfnu þegar hún er **sjálfstæð**.
Tveir flokkar diffurjafna verða síðan kannaðir nánar:

- Diffurjöfnur þar sem aðskilja má breytur x og y .
- Línulegar diffurjöfnur

Að lokum verða **blöndunardæmi** tekin sérstaklega fyrir.

Dæmi: Vöxtur fiska...

$$\frac{dL}{dt} = r(L_\infty - L)$$

Getum kannað eiginleika þessarar diffurjöfnu, eða almennari jöfnu $y' = a(b - y)$, og líka leyst hana.