Aðskilnaður breytistærða

(MATH104.5: Diffurjöfnur)

Kjartan G. Magnusson and Gunnar Stefansson

November 4, 2013

1. stigs diffurjöfnur þar sem aðskilja má breytur

$$
\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y) \qquad (\, f(x,y) = g(x)h(y)\,) \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (\,\text{ef } h \neq 0\,) \\
& \text{(þetta köllum við að aðskilja breyturnar)} \\
\Rightarrow \quad & \int \frac{1}{h(y)}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)dx \\
& \text{(finnum stofnfall m.t.t. } x\text{)} \\
\Rightarrow \quad & \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx
\end{aligned}
$$

síðan þarf að finna stofnföllin og leysa fyrir $y(x)$.

Dæmi: Getum leyst $y' = ry\left(1 - \frac{y}{k}\right.$. Fáum $y(x) = \frac{y_0\cdot k}{y_0+(k-y_0)e^{-rx}}$ eftir verulegt möndl.

Dæmi

$$
\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \\
\Rightarrow \quad & y\frac{dy}{dx} = x \\
\Rightarrow \quad & \int y\,dy = \int x\,dx \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{2}y^2 + \hat{C} = \frac{1}{2}x^2 \\
\Rightarrow \quad & x^2 + y^2 = c
\end{aligned}
$$

Dæmi um kælingu

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{dH}{dt} = -k(H - H_u) \qquad H(0) = H_0 \\
\Rightarrow \quad & \int \tfrac{dH}{H - H_u} = \int -k\, dt \\
\Rightarrow \quad & \ln|H - H_u| = -kt + \hat{C} \\
\Rightarrow \quad & H - H_u = Ce^{-kt} \text{ skiptum um fasta} \\
& (t = 0 \qquad H_0 - H_u = C) \\
\Rightarrow \quad & H(t) = H_u + (H_0 - H_u)e^{-kt} \\
& \lim_{t \to \infty} H(t) = H_u
\end{aligned}
$$