Ákveður fylka

math121-1linalg Hagnýt línuleg algebra og rúmfræði

Gunnar Stefánsson, Rögnvaldur G. Möller o.fl.

October 30, 2016

Umraðanir

Látum $(j_1, \ldots, j_u)$ vera um röðun á $(1, \ldots, n)$.
Mælikvarði á hversu röng röðunin er fyrir tiltekið stak fæst með því að telja fjölda staka á eftir, sem eru minni. *Gráða umröðuninnar* er summan af öllum þeim talningum.

Dæmi:

$$(6, 1, 3, 4, 5, 2)$$

Fyrsta tala er 6, en þá eru allar 5 tölurnar á eftir minni, o.s.frv. Við fáum

$$5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8$$

Einfalt margfeldi

Einfalt margfeldi úr fylkinu **A** fæst með því að velja eitt stak úr hverjum dálki og eitt úr hverri línu og margfalda þau öll saman.
Dæmi:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ad og bc eru einu einföldu margfeldin.
Valið er fyrst úr 1.línu, þá úr 2.línu o.s.frv. en þó þannig að sami dálkur er aldrei valin 2svar.

Einföld margfeldi og umraðanir

Einfalt margfeldi tilsvarar tiltekinni umröðun á dálkunum, þ.e. fyrst er valið eitthvert stak úr 1.línu, (þ.e. úr einhverjum dálki) síðan eitthvert stak úr 2.línu (úr einhverjum öðrum dálki) o.s.frv.

Einfalt margfeldi með formerki

Einfalt margfeldi með formerki er einfalt margfeldi margfaldað með $+1$ ef gráða umröðunarinnar er jöfn en með -1 ef gráða umröðuninnar er oddatala.

Ákveða fylkis

Skilgreining: Ákveða fylkis er summa allra einfaldra margfelda með formerki.

Aðferð:

- Veljum stak úr fyrstu línu og skráum dálkinn, j_1
- Veljum stak úr næstu línu og skráum dálkinn, j_2
- ...
- Lítum á dálknúmerin $j_1, j_2, \ldots, j_n$, tilsvarandi línunum $1, \ldots, n$, sem umröðun
- Finnum gráðu umröðunarinnar og notum hana til að velja formerki
- Margföldum stökin saman og setjum formerkið á
- Endurtökum fyrir allar mögulegar umraðanir

Ákveða 2x2 fylkis

Almennt 2×2 fylki,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Tvö möguleg einföld margfeldi, þ.e. ad og cb.
Dálkaraðirnar eru 12 og 21
Gráður: 0 og 1
Formerkin: $+1$ og -1.
Ákveðan: $= ad - cb$ eins og áður.

Dæmi: Ef 2×2 fylki inniheldur núll öðrum megin hornalínu, t.d. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ þá er augljóst að aðeins eitt margfeldi getur verið frábrugðið núlli og því er ákveðan $1 \cdot 3 = 3$.

Ákveða 3x3 fylkis

Almennt 3×3 fylki:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

þá fæst

$$det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Dæmi: Auðvelt er að nota almennu jöfnuna fyrir ákveðu 3×3 fylkis til að reikna ákveðuna beint, en einnig má í mörgum tilvikum reikna hana á einfaldari hátt.
Til dæmis gildir augljóslega um hornalínufylki,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

að $det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33}$, þ.e. ákveðan er einfaldlega margfeldi stakanna á hornalínunni.

Eiginleikar ákveðu

Setning: Ef $\mathbf{A}$ er $n \times n$ fylki er eftirfarandi jafngilt:

- $det(\mathbf{A}) \neq 0$
- $\mathbf{A}$ hefur andhverfu
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ er leysanlegt fyrir öll $\mathbf{b}$.

Örlítið um ákveður

Ef $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru $n \times n$ fylki þá gildir $det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})det(\mathbf{B})$.

Ef $\mathbf{A}$ er hornalínufylki, þá er $det(\mathbf{A})$ margfeldi hornalínustakanna.

Ef $\mathbf{A}$ er efra (eða neðra) þríhyrningsfylki, þá er $det(\mathbf{A})$ margfeldi hornalínustakanna.

Ef $\mathbf{A}$ hefur andhverfu, þá er $det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{det(\mathbf{A})}$.

Orð og hugtök

Helstu orð:
* Umröðun * Einfalt margfeldi * Einfalt margfeldi með formerki * Ákveða