Vigrar í tveimur og þremur víddum

math121-1linalg Hagnýt línuleg algebra og rúmfræði

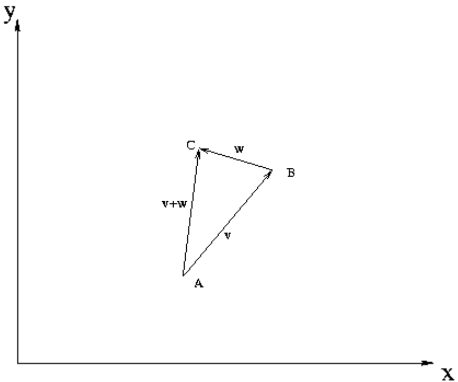
Gunnar Stefánsson, Rögnvaldur G. Möller o.fl.

October 30, 2016

Vigur

Hugtakið vigur á að endurspegla "strik með stefnu" og vigur er því gjarnan teiknaður á milli tveggja punkta, en er samt óháður því, hvar hann er teiknaður.
Vigur **v** sem liggur milli punkta A og B er oft táknaður $\mathbf{v} = \vec{AB}$ Vigrinum má síðan hliðra þ.a. hann gangi út frá öðrum punkti en A.
Efni úr Anton: 3.1, 3.2, 3.3 (sleppa 3.4).

Samlagning vigra



Skilgreining: Vigra $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ má leggja saman, þannig að ef $\mathbf{v} = \vec{AB}$ og $\mathbf{w} = \vec{BC}$, þá er $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \vec{AC}$

Punktar og vigrar

Skilgreining: Ef $\mathbf{v} = \vec{AB}$ þá skilgreinum við $-\mathbf{v}$ sem vigurinn sem liggur í öfuga átt, þ.e. $-\mathbf{v} := \vec{BA}$

Tákn fyrir vigra

Athugum, að nokkuð er á reiki í kennslubókum, hvernig punktar og vigrar eru táknaðir. Hér eru vigrar ætíð "lóðréttir", þ.e.a.s. vigrar í $\mathbb{R}^2$ eru (nánast) eins og 2×1 fylki. Hér er hins vegar punktar skrifaðir "lárétt", þannig að punkturinn $A = (a_1, a_2)$ er strangt til tekið ekki sama fyrirbærið og vigurinn

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Margföldun vigurs með tölu

Skilgreining: Ef $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ og k er tala, þá skilgreinum við $k\mathbf{v} := \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}$.

Vigrar í þrívíðu rúmi

Á saman hátt og fyrir planið má skilgreina vigra og punkta í þrívíðu rúmi, $\mathbb{R}^3$, en vigrar þar eru af gerðinni

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Reiknireglur um vigra

Vigur í $\mathbb{R}^2$ eða $\mathbb{R}^3$ er "eins" og 2×1 eða 3×1 fylki.
Setning: Ef $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ eru vigrar í $\mathbb{R}^2$ eða $\mathbb{R}^3$, þá gilda venjulegar reiknireglur eins og um fylki.
Sönnun: Nákvæmlega eins og fyrir fylkin.

Vigrar og bylt fylki

Munum, að ef A er 1×2 fylki, $A = [a_1 \;\; a_2]$, þá var bylta fylkið skilgreint sem $A' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$.

Yfirleitt gerum við engan greinarmun á vigrum og tilsvarandi fylkjum. Sérílagi skrifum við oft $\mathbf{v} = (v_1, v_2)'$, þ.e. að vigurinn $\mathbf{v}$ sé fengið með því að bylta "fylkinu" eða lárétta vigrinum (v_1, v_2).

Lengd vigra

Skilgreining: Ef $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ þá skilgreinum við **norm** eða **lengd u** sem

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Fyrir $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ þá skilgreinum við **norm u** sem

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

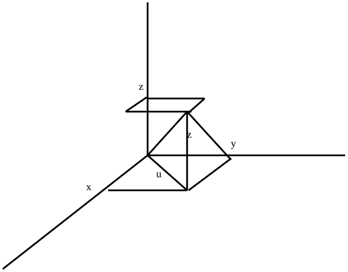


Figure : Á myndinni má sjá almennan vigur, $(x, y, z)'$. Greinilegt er samkvæmt reglu Pýthagorasar í xy-planinu, að $u^2 = x^2 + y^2$ og ef litið er á $||(x, y, z)'||^2$ sem langhlið rétthyrnda þríhyrningsins með skammhliðarnar u og z fæst $||(x, y, z)'||^2 = u^2 + z^2$.

Athugum, að þetta eru augljóslega einu skilgreiningarnar á lengd vigra sem eru í samræmi við hefðbundna skilgreiningu á lengd samkvæmt reglum um lengd langhliðs í þríhyrningi.

Einingarvigrar og fjarlægðir

Skilgreining: Einingavigur er vigur með lengdina 1.
Skilgreining: Fjarlægð milli punktanna P og Q er lengd vigursins $\vec{PQ}$.

Innfeldi

Skilgreining Innfeldi tveggja vigra er $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||cos(\theta)$, þar sem θ er hornið milli vigranna, $0 \leq \theta \leq \pi$.
Athugum, að ef tveir vigrar eru teiknaður út frá núllpunkti, þá liggja þeir, ásamt 0, í plani og því má teikna þá eins og í tvívídd.

Pýthagoras

Athugum þá, að regla Pýthagorasar fyrir almenna þríhyrninga gefur

$$||\mathbf{v}-\mathbf{u}||^2 = ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{u}||^2 - 2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||cos(\theta),$$

þ.e.a.s.

$$2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||cos(\theta) = ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{u}||^2 - ||\mathbf{v}-\mathbf{u}||^2$$

og því gildir að

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||cos(\theta) = \frac{1}{2}(||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{u}||^2 - ||\mathbf{v}-\mathbf{u}||^2).$$

Fyrir $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ fæst $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$.
Fyrir $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ fæst $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.
Það er því einfalt að reikna innfeldi og þarmeð hornið á eftir, með

$$cos(\theta) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||}$$

Innfeldi og horn

Setning: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
Sönnun: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff cos(\theta) = 0$. Nú er θ á bilinu frá 0 til π svo θ verður að vera $\pi/2$.

Um línur og þvervigra

Við getum sýnt að $\mathbf{u} = (a, b)'$ er þvervektor línunnar $ax + by + c = 0$. Látum fyrst $P_1 = (x_1, y_1)$ og $P_2 = (x_2, y_2)$ vera á línunni. Þá er $\overrightarrow{P_1P_2}$ samsíða línunni.
Þá gildir líka að

$$\begin{array}{r} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ \hline a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \end{array}$$

þ.e.

$$\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$$

en þetta þýðir einmitt að

$$\mathbf{u} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$$

Innfeldi og núllvigrar

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ ef $\mathbf{v} \neq 0$
en $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ ef $\mathbf{v} = 0$.

Ofanvörp

Látum $\mathbf{a}$ vera vigur. Skrifum almennt $\mathbf{u}$ á forminu $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ með $\mathbf{x} = k\mathbf{a}$ og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{y} = 0$. Þá fæst

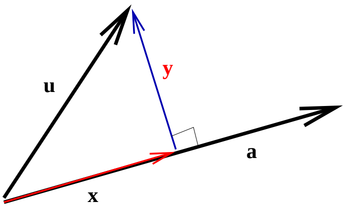
$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{a} \\ &= (k\mathbf{a} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{a} = k\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \underbrace{\mathbf{y} \cdot \mathbf{a}}_{=0} \\ &= k \cdot ||\mathbf{a}||^2 \end{aligned}$$

þ.e.

$$k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2},$$

og því fæst $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ með

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$$

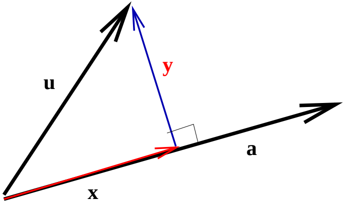


Um ofanvarpið, proj

Ofanvarp $\mathbf{u}$ á $\mathbf{a}$ er stundum táknað með $proj_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$.
Athugum að

$$proj_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$$

var leitt út sem sá vigur $\mathbf{x}$ þannig að $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ með $\mathbf{x}$ samsíða $\mathbf{a}$ og $\mathbf{y}$ þvert á $\mathbf{a}$.
Í þessari útleiðslu var hvergi tekin fram vídd vigranna.



Orðalisti

* Vigur * Ovanvarp