Evklíðsk rúm

math121-1linalg Hagnýt línuleg algebra og rúmfræði

Gunnar Stefánsson, Rögnvaldur G. Möller o.fl.

October 30, 2016

Almennari vigurrúm

Nauðsynlegt er að útvíkka fyrri niðurstöður um $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ til þess að geta talað almennar um “frígráður”, “víddir” og ofanvörp.
Þetta er augljóst þegar það er athugað að flestar tilraunir gefa margar mælingar, miklu fleiri en þær 2 eða 3 sem er hægt að vinna með í $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.
Efni úr Anton: 4.1

Evklíðsk rúm

Skilgreining:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n)' : x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

er mengi allra n-unda. Stökin eru kölluð vigrar í n-víðu rúmi.
Ath: Þetta er næstum því það sama og $n \times 1$ eða $1 \times n$ fylkin og ekki gerður greinarmunur á (dálk-)vigrum í $\mathbb{R}^n$ og $n \times 1$ fylkjum.

Almennar aðgerðir vigra

Skilgreining:
(1) Tveir vigrar $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ eru eins ef öll hnitin eru eins. þ.e . ef $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)', \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)'$ þá er $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ ef $u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n$
(2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)'$
(3) Ef k er tala, þá er $k\mathbf{v} = (kv_1, \ldots kv_n)'$
(4) Núllvigurinn, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ er $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)'$
(5) $-\mathbf{u} = (-u_1, \ldots, -u_n)' = (-1)\mathbf{u}$
(6) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$

Reiknireglur í n-víðu rúmi

Sömu reiknireglur gilda um vigra í $\mathbb{R}^n$ eins og fyrir vigra í $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.

Setning: Ef $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ og k, l eru tölur, þá gildir

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(e) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

(f) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) + (k\mathbf{v})$

o.s.frv.

Sönnun: Skoðast hnit fyrir hnit, nákvæmlega eins og fyrir fylkin áður.

Getum reiknað: $k\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{k}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ ef $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Skilgreining: Ef $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)' \in \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)' \in \mathbb{R}^n$ þá er innfeldi $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$.

Gefur sama ef $n = 2$ eða 3.

Líka: $\mathbf{U} = [u_1, \ldots u_n]$ er $1 \times n$ fylki og $\mathbf{V} = [v_1, \ldots, v_n]'$ er $n \times 1$ fylki, þá er $\mathbf{UV} = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}]$.

Reglur um innfeldi

Setning:
(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
(c) $(k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
(d) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ ef $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ ef $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Sönnun: Þetta eru nákvæmlega sömu fullyrðingar , hnit fyrir hnit, eins og ef við værum með $1 \times n$ og $n \times 1$ fylki í stað vigra í $\mathbf{R}^n$. Sönnunin er því nákvæmlega eins. T.d. (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = v_1 u_1 + \ldots + v_n u_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

Lengd vigra

Skilgreining: Ef $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ er vigur í $\mathbb{R}^n$, þá skilgreinum við lengd $\mathbf{u}$ (norm $\mathbf{u}$) þannig

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$$

Athugasemd: Ef við lítum á hlutrúm í $\mathbb{R}^n$, t.d. $\{(u_1, u_2, 0, 0, \ldots, 0, u_n)' : u_1, u_2, u_n \in \mathbb{R}\}$, sem eru alveg eins og $\mathbb{R}^3$, þá <u>verður</u> svona regla að gilda fyrir öll slík hlutsöfn. Þessi skilgreining er því nauðsynleg í ljósi reglu Pythagorasar.

Orðalisti

* Evklíðsk rúm