Eiginleikar línulegra varpana

math121-1linalg Hagnýt línuleg algebra og rúmfræði

Gunnar Stefánsson, Rögnvaldur G. Möller o.fl.

October 30, 2016

Eintækni og átækni

Skilgreining: Látum $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vera línulega vörpun.
T er kölluð *eintæk*(eða 1-1) ef fyrir sérhvert $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ í $\mathbb{R}^n$ með $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ gildir $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{T}(\mathbf{y})$.
T er kölluð *átæk* ef fyrir hvert $\mathbf{w}$ í $\mathbb{R}^m$ er til $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ þ.a. $T\mathbf{x} = \mathbf{w}$.
Efni úr Anton: 4.3

Ofanvörp

Vörpun er ofanvarp eða hornrétt ofanvarp eða hornréttur ofanvarpi (projection operator) ef hún varpar sérhverjum vigri í ofanvarp sitt í einhverju hlutrúmi, t.d. á línu eða plan í $\mathbb{R}^3$.

Dæmi:

Ef

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

er ofanvarpsfylkið sem svarar til

$$\mathbf{T_A}(x) = \mathbf{A}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

þá er $\mathbf{T_A}$ greinilega ekki eintæk því t.d. er

$$\mathbf{T_A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{T_A}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Andhverfur og eintækni

Ef $\mathbf{A}$ hefur andhverfu, þá er $\mathbf{T_A}$ eintæk.

Dæmi: Ef

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

er ofanvarpsfylkið sem svarar til

$$\mathbf{T_A}(x) = \mathbf{A}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

þá er $\mathbf{T_A}$ greinilega ekki eintæk því t.d. er $\mathbf{T_A}(1,2) = \mathbf{T_A}(1,5)$.

Dæmi: Ef fylki $\mathbf{A}$ hefur andhverfu, þá má alltaf leysa jöfnuna $\mathbf{A}x = y$.

Þar með er líka vitað að ef $\mathbf{T_A}x = \mathbf{T_A}(y)$, þá er $\mathbf{A}x = \mathbf{A}y \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}x = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}y \Rightarrow x = y$, þ.e.a.s. ef $\mathbf{A}$ hefur andhverfu, þá er $\mathbf{T_A}$ eintæk.

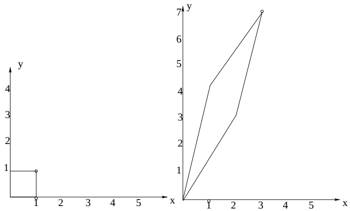
Andhverfur, eintækni og átækni

Setning:
Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki og $\mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vera gefið með $\mathbf{T_A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Þá er eftirfarandi jafngilt.

(a) $\mathbf{A}$ hefur andhverfu.

(b) $\mathbf{T_A}$ er eintæk.

(c) $\mathbf{T_A}$ er átæk.



Dæmi: $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er skilgreint með $w = \mathbf{T}(x)$ þar sem

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1 + 4x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$$

Nokkrar athugasemdir um virkja og fylki

Setning:

$\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er línuleg þoþaa (a) $\mathbf{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{T}(\mathbf{v})$ og (b) $\mathbf{T}(c\mathbf{u}) = c\mathbf{T}(\mathbf{u})$ gildi f. öll $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}$

Sönnun: Það að sýna "$\Rightarrow$" er augljóst með því að nota fylki: Látum $\mathbf{T}(x) = \mathbf{A}x \Rightarrow \mathbf{T}(u+v) = \mathbf{A}(u+v) = (\mathbf{A}u)+)(\mathbf{A}v) = \mathbf{T}(u) + \mathbf{T}(v)$
og $\mathbf{T}(c\mathbf{u}) = \ldots = c\mathbf{T}(u)$.
Hin áttin, "$\Leftarrow$": Skrifum $x \in \mathbb{R}^n$ sem $\mathbf{x} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ Samkvæmt (a) og (b) fæst

$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{T}(e_1) + \ldots + x_n\mathbf{T}(e_n) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = [\mathbf{T}(e_1)\vdots\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)\vdots\ldots\vdots\mathbf{T}(e_n)]\mathbf{x}$. og þá

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \left[\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}\right] x$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Fylki línulegs virkja

Við höfum sannað eftirfarandi:

Setning:

Ef $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er línulegur virki þá gildir að

$$\mathbf{T}(x) = [\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) \vdots \mathbf{T}(e_2) \vdots \ldots \vdots \mathbf{T}(e_n)]x,$$

þ.e.

$$[\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) \vdots \mathbf{T}(e_2) \vdots \ldots \vdots \mathbf{T}(e_n)]$$

er fylkið sem lýsir $\mathbf{T}$.

Orðalisti

* Fylki línulegrar vörpunar